

多項式写像の位相型について

京大 理 中居 功

この小論の中で、我々は多項式で定義された写像の位相型と Thom の Af-condition の関連について考え、また多項式写像の位相型が連続濃度あることを示す。

可微分写像の研究は長い間続けられ、それらは写像の C^0 、位相的性質を明らかにしてきている。しかし、それらの多くは generic な写像のみを対象としている。今、次の問題を考えるのは、自然なことだろう。

問題 多項式で定義された写像は、どのような、又どれくらい位相型を持つか。

次数 K 以下の多項式写像 $f: (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^p, 0)$ 全体の集合を $P(n, p, K; \mathbb{K})$ で表わす、また それらの $0 \in \mathbb{K}^n$ での germs の集合を $P_0(n, p, K; \mathbb{K})$ で表わす。 $f, g \in P(n, p, K; \mathbb{K})$ が

(resp. $f, g \in P_0(n, p, k; \mathbb{K})$) が $\mathcal{C}^0$ -同値 (以下, 単に同値という) であるとは, 位相同型 (resp. 位相同型の germs)

$\phi: \mathbb{K}^n, 0 \rightarrow \mathbb{K}^n, 0$, $\psi: \mathbb{K}^p, 0 \rightarrow \mathbb{K}^p, 0$ が存在し $f \circ \phi = \psi \circ g$

となることをいう。 $P(n, p, k; \mathbb{K})$ の (resp. $P_0(n, p, k; \mathbb{K})$ の) 同値類の集合を $P(n, p, k; \mathbb{K})/\text{top}$ ($P_0(n, p, k; \mathbb{K})/\text{top}$) で表わす。

ここに, 我々の今までに知られている結果を述べよう。

- (1) R. Thom はすでに 1962 年に [T1] の中で, 次の多項式写像 $f_t: \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ $t \in \mathbb{R}$, $f_t(x, y, z) =$
 $(x(x^2+y^2-a^2)-2axyz)^2((ty-x)(x^2+y^2-a^2)-2az(y-tx))^2, x^2+y^2-a^2, z),$
 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ は $t = \pm t'$ のときのみ $f_t, f_{t'}$ が同値になることを示している。このことは, $P(n, p, k; \mathbb{R})/\text{top}$ は $n, p \geq 3, k \geq 12$ のとき連続濃度の集合となることを示す。
- (2) T. Fukuda は 1976 [F1] の中で $P(n, 1, k; \mathbb{K})/\text{top}$ $P_0(n, 1, k; \mathbb{K})/\text{top}$ がすべての $n, k, \mathbb{K}$ に対して有限集合であることを示した。
- (3) K. Aoki は $P_0(2, 2, k; \mathbb{K})/\text{top}$ が $K < \infty, \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ に対し, 有限集合であることを示した [A], このことは Thom, Fukuda の予想 " $P(n, 2, k; \mathbb{K})/\text{top}, P_0(n, 2, k; \mathbb{K})/\text{top}$ は有限集合 " の肯定的結果である [F]。

この予想に反して, 次の結果を得た。

定理 A. $P(n, p, k; \mathbb{R}) / \text{top}$, $P_0(n, p, k; \mathbb{K}) / \text{top}$ は
 $n, p, k \geq 3$, 又は $n \geq 2, p \geq 2, k \geq 4$ のとき連続濃度を持つ。

定理 B. $P(n, p, k; \mathbb{C}) / \text{top}$, $P_0(n, p, k; \mathbb{C}) / \text{top}$ は
 $n, p, k \geq 3$ のとき連続濃度を持つ。

以下に、定理 A, B の例を示す。

ex. A. $f_e: (\mathbb{R}^{3+r}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2+r}, 0)$

$$f_e(x, y, z, w) = ((e_1 x - y)(e_2 x - y)(e_3 x - y), (e_4 x - y)(e_5 x - y)(e_6 x - y) z, 0)$$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, w \in \mathbb{R}^r$, ここで $e = (e_1, \dots, e_6) \in \mathbb{R}^6$.

ex. B. $g_a: (\mathbb{K}^{3+r}, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^{3+r}, 0)$

$$g_a(x, y, z, w) = ((a_1 x^2 + a_2 x y + a_3 y^2), (a_4 x^2 + a_5 x y + a_6 y^2) z, (a_7 x^2 + a_8 x y + a_9 y^2) z, 0)$$

$(x, y, z) \in \mathbb{K}^3, w \in \mathbb{K}^r, \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, ここで $a = (a_1, \dots, a_9) \in \mathbb{K}^9$.

f_e は Hilbert-Schmidt 空間の中に 2次元の位相型の族を、 g_a は
 1次元の族を持つ。これらの事実は、定理 A, B と共に
 $[N_1, N_2]$ の中に証明された。以下、これらの証明の概略
 を述べる。また最近 C. Pabbiah により次の定理が証明
 された。

(定理) $f_s: X \rightarrow Y$ を complex analytic map-の族とする,
 ここで $s \in S$, $\dim X = 2$. このとき f_s の位相型は S の
 中で局所有限. (C. Sabbah)

系. $P(2, n, k; \mathbb{C}) / \text{top}$ は有限集合.

上の定理は、さらに一般的な代数幾何的平法によっている。
 $[S_1, S_2]$.

さて、我々の目的は f_e, g_e の位相型も調べることであった。
 始めに、次のことを注意しておこう。 f_e は Thom stratification
 を持たないが、flat morphism である ($K = \mathbb{C}$)。また g_e は Thom
 stratification を持たず、flat でもない。Thom の A_f -condition
 は可微分写像の位相型を考える上で、重要な役割を果たしている。
 $([M_1, M_2])$ 。ここで A_f -condition について簡単にふれておく。

可微分写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ の stratification とは $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ の
 stratification の組 (S, S') で、任意の $X \in S$ に対して $Y \in S'$ が
 存在し $f(X) \subset Y$, $f|_X: X \rightarrow Y$ submersion となるものをいう。
 (S, S') が Thom's A_f -condition を満たすとは、次のことをいう；
 $x, Y \in S$, $y_i \in Y$ を sequence とする。もし

$$(1) \quad y_i \rightarrow x \in X$$

$$(2) \quad \text{Ker } d(f|Y)(x) \longrightarrow T \subset T_x \mathbb{R}^n,$$

ならば $T \cap \text{Ker } d(f|X)(x)$.

A_f -condition は、 x, y が十分に近ければ $f^{-1}(f(x))$, $f^{-1}(f(y))$ が "平行" であることを意味している。

さて、我々の写像 $f_e: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は、いかなる Thom stratification も持たない。逆に、 A_{f_e} -condition を精密化して、 Z 軸の部分集合 $M(f_e)(p)$, $p \in S'$ を次のように定義する。 $M(f_e)(p)$ は次のような点 $z \in Z$ からなる。

sequence $x_i \in \mathbb{R}^3$ が存在して次の条件を満たす,

(1) $x_i \rightarrow z$, $f_e(x_i) \notin f_e(Z(f_e))$ で半直線 $\widehat{of_e(x_i)}$ は原点を通る半直線 L_p , $p \in S'$ に収束する, ここで S' は、 $0 \in \mathbb{R}^2$ を中心とする単位円,

$$(2) \quad \text{Ker } df_e(x_i) \longrightarrow T \subset T_x \mathbb{R}^3, \quad T \cap \text{Ker } df_e(x_i) = \{0\}.$$

Z^ω を Z の compact subsets 全体の集合とする。 $M(f_e)(p)$ は $M(f_e): S' \rightarrow Z^\omega$ を定めることがわかる。 S' の (1,0) のまわりの coordinate $\frac{y}{x} = \theta$ で次の型となる,

$$M(f_e)(\theta) = \{d_1 \theta, \dots, d_i \theta\}, \quad d_1, \dots, d_i \in \mathbb{R}.$$

命題 1, $([N_1, N_2])$ Open dense subset $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^6$ が存在し、 $f_e \xrightarrow{\text{top}} f_{e'}$, $e, e' \in \mathcal{U}$ ならば $M(f_e), M(f_{e'})$ は conjugate, つまり homeomorphisms の germ

$\varphi: (S^1, (1,0)) \rightarrow (S^1, (1,0))$, $\psi: (Z, 0) \rightarrow (Z, 0)$ が存在し,
 $\psi^w \circ M(fe) = M(fe) \circ \varphi$ となる, ここで $\psi^w: (Z^w, \{0\}) \rightarrow$
 $(Z^w, \{0\})$ は $\psi^w(A) = \psi(A) \in Z^w$, $A \in Z^w$ で定義され
 3.

この命題は, $M(fe)$ が fe の topological invariant である
 ことを示している。また $[N, N_2]$ によると, $M(fe)$ の
 conjugacy class は 連続濃度存在することが知られて
 いる。従って, 定理 A が証明された。同様に, g_a に
 対しても Topological invariant $M(g_a): S^2 \rightarrow Z^w$ を定義し,
 これにより定理 B も証明される。

References

- [A] K. Aoki, On topological types of polynomial map-germs
 of plane to plane, *Memoirs of the school of science &
 Engineering*. No 88 (1980) pp. 133-156.
- [F] T. Fukuda, Types topologiques des polynomes, *Publ.
 Math. IHES* 86 (1976) 87-106.
- [Ni] On topological types of polynomial map-germs.
 Preprint.

- [N2] Topological classification of polynomial map-germs,
to appear in Proceedings of Symposia in Pure Mathematics
Vol 40.
- [T] R. Thom. La stabilité topologique des
applications polynomiales. Enseig. Math., 8 (1962) pp 24-33.
- [S₁] C. Sabbah Morphismes analytiques stratifiés
sans éclatement et cycles évanescents, Preprint.
- [S₂] Le type topologique éclate d'une application
Analytique, Preprint.