

抽象的散乱理論と素粒子論

明星大 理工 関根 克彦

抽象的散乱理論の応用として、素粒子論におけるくりこみの問題と、統一理論の問題を扱う。

§ 1. 抽象的散乱理論の定理

あとで使う定理をまとめておく。以下、 B, B_0, B_1 はそれぞれ有界作用素、コンパクト作用素、trace class operator の集合をあらわす。

1. 1. Wave operator の存在定理

定理 1. 1 [1] $\mathcal{H}^0, \mathcal{H}$ を可分ヒルベルト空間とし、 $J \in B(\mathcal{H}^0, \mathcal{H})$ が与えられているものとする。 H^0, H をそれぞれ $\mathcal{H}^0, \mathcal{H}$ における自己共役作用素とし、 $J D(H^0) \subset D(H)$ であり、かつ

$$(1.1) \quad HJ = JH^0 + V, \quad V \in B_1(\mathcal{H}^0, \mathcal{H}),$$

$$(1.2) \quad J^*J - I^0 \in B_0(\mathcal{H}^0),$$

とする (I^0 は $\mathcal{H}^0$ における恒等作用素)。このとき、wave

operator

$$(1.3) \quad W_{\pm} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} J e^{-iH^0 t} P^0$$

が存在し, $\mathcal{H}_{ac}^0$ を $\mathcal{H}_{ac}$ へ等距離的にうつす. ここに, $\mathcal{H}_{ac}^0(\mathcal{H}_{ac})$ は $H^0(H)$ にかんして絶対連続な $\mathcal{H}^0(\mathcal{H})$ の部分空間, P^0 は $\mathcal{H}^0$ の $\mathcal{H}_{ac}^0$ への正射影をあらわす.

この定理で, とくに $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}$ の場合を考えると, Rosenblum-Kato の古典的な定理が得られる.

定理 1.2 [2][3] H^0, H は可分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における二つの自己共役作用素とし,

$$(1.4) \quad H = H^0 + V, \quad V \in B_1(\mathcal{H}),$$

とする. このとき, wave operator

$$(1.5) \quad W_{\pm} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH^0 t} P^0$$

が存在し, $\mathcal{H}_{ac}^0$ を $\mathcal{H}_{ac}$ へ等距離的にうつす.

ここで, (H, H^0) によって与えられる摂動はいわゆる trace class の摂動であるが, 上の定理をもっと一般の摂動の場合に拡張するには, 次の定理を用いる.

定理 1.3 [4] $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数 $\phi(\lambda)$ は次の場合に class (M) の関数であるという. すなわち, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ は有限個の重ならない開区間 I_k , およびこれらの端点の和集合としてあらわされ, 各 I_k において, $\phi(\lambda)$ は真に単調で微分可能, 導関数 $\phi'(\lambda)$ は連続で $\neq 0$, かつ

局所的に有界変動, という場合である. また, class (M) の関数の列 $\{\psi_n\}$ は, 区間 $(-n, n)$ ($n = 1, 2, \dots$) において univalent であるとき, approximate univalent sequence であるという. いま,

(1.6) $\psi_n(H) = \psi_n(H^0) + V_n, V_n \in B_1(\mathcal{H}),$
 であるとする. このとき, wave operator (1.5) が存在して, $\mathcal{H}_{ac}^0$ を $\mathcal{H}_{ac}$ へ等距離的にうつす.

この定理で, とくに,

$$\psi_n(\lambda) = i \left[\frac{1}{n - i\lambda} - \frac{1}{n + i\lambda} \right]$$

にとることにより, 次の定理が得られる.

定理 1.4 [5][6] H^0, H を可分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における自己共役作用素とし, これらの resolvent を R_z^0, R_z , resolvent set を ρ^0, ρ であらわす. $z \in \rho^0 \cap \rho$ について,

$$(1.7) \quad A_z \equiv R_z - R_z^0 \in B_1(\mathcal{H}),$$

であるとき, wave operator (1.5) が存在して, $\mathcal{H}_{ac}^0$ を $\mathcal{H}_{ac}$ へ等距離的にうつす.

1.2. Wave operator の表現定理

定理 2.1 [1] 定理 1.1 の条件のもとで, wave operator (1.3) は次のようにあらわされる:

$$(1.8) \quad (W_{\pm} f, g) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda} Q_{\mu \pm i0}^{\circ} f, g) \right]_{\mu=\lambda} d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} (f, E_{\lambda}^{\circ} Q_{\mu \pm i0} g) \right]_{\mu=\lambda} d\lambda.
\end{aligned}$$

ここに, $f \in \mathcal{H}^{\circ}$, $g \in \mathcal{H}$, $(\cdot, \cdot)_{\circ}$ と $(\cdot, \cdot)$ はそれぞれ $\mathcal{H}^{\circ}$, $\mathcal{H}$ の内積をあらわし, $E_{\lambda}^{\circ} (E_{\lambda})$ は $H^{\circ}(H)$ のスペクトル分解にあらわれる射影作用素, $Q_{\pm}^{\circ} = J + VR_{\pm}^{\circ}$, $Q_{\pm} = J^{*} - V^{*}R_{\pm}$ である.

とくに, 二つのヒルベルト空間が一致した場合には,

定理 2. 2 [7] 定理 1. 2 の条件のもとで, wave operator (1. 5) は次のようにあらわされる:

$$\begin{aligned}
(1. 9) \quad (W_{\pm} f, g) &= \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda} Q_{\mu \pm i0}^{\circ} f, g) \right]_{\mu=\lambda} d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} (f, E_{\lambda}^{\circ} Q_{\mu \pm i0} g) \right]_{\mu=\lambda} d\lambda.
\end{aligned}$$

ここに, $Q_{\pm}^{\circ} = I + VR_{\pm}^{\circ}$, $Q_{\pm} = I - VR_{\pm}$.

また, 定理 1. 4 が成り立つ場合に使える公式として, 次のものが得られる.

定理 2. 3 [8] 定理 1. 4 の条件のもとで,

$$\begin{aligned}
(1. 10) \quad (W_{\pm} f, g) &= \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow \pm 0} (-i\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} (E_{\lambda} R_{\mu+i\varepsilon}^{\circ} f, g) \right]_{\mu=\lambda} d\lambda \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow \pm 0} i\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} (f, E_{\lambda}^{\circ} R_{\mu+i\varepsilon} g) \right]_{\mu=\lambda} d\lambda
\end{aligned}$$

この公式は, 定理 1. 2 の条件が成り立っている場合には,

(1. 9) に変形できる.

1. 3 Trace formula と scattering operator

定理 3. 1 [9] 定理 1. 2 の条件のもとで, 実数値

可測関数 $\xi(\lambda) \in L^1(-\infty, \infty)$ が存在し,

$$(1. 11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)| d\lambda \leq \operatorname{tr} |V|$$

$$(1. 12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) d\lambda = \operatorname{tr} V$$

定理 3. 2 [9][5] 定理 1. 4 の条件のもとで,

$$(1. 13) \quad \operatorname{tr} A_z = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda$$

ここに ξ は, 附加定数を除いて定まる可測関数で, $(1 + \lambda^2)^{-1} \xi(\lambda) \in L^1(-\infty, \infty)$

定理 3. 3 [5] 定理 1. 4 の条件のもとで, scattering operator

$$(1. 14) \quad S = W_+^* W_-$$

が存在し, $\mathcal{H}_{ac}^0$ 上のユニタリー作用素である. $\mathcal{H}_{ac}^0$ は,

$$(1. 15) \quad \mathcal{H}_{ac}^0 = \int \oplus \mathcal{H}_\lambda d\sigma(\lambda)$$

の形に分解でき, S によって $\mathcal{H}_\lambda$ に誘導される変換を S_λ とすると, $I_\lambda - S_\lambda$ (I_λ は $\mathcal{H}_\lambda$ における恒等作用素) $\in B_1(\mathcal{H}_\lambda)$ で,

$$(1. 16) \quad \det S_\lambda = e^{-2\pi i \xi(\lambda)}$$

この式は, (H と H^0 とに共通な) 絶対連続スペクトルの殆どすべての λ において成り立つ.

S_λ を scattering suboperator, $\xi(\lambda)$ を spectral

shift function という.

§ 2. 無限大のくりこみを含む場の量子論のモデル [10]

2. 1. ハミルトニアンの定義

質量 $m = 1$ の二個の粒子の (非相対論的な) 散乱を考える. 相対運動の波動関数を $\psi(\vec{r})$ とすると, シュレーディンガー方程式は,

$$(2.1) \quad [-\Delta - \lambda_0 \delta(\vec{r})] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

と書かれる. ここに, $\lambda_0 > 0$ は相互作用の大きさを定める定数, $\delta(\vec{r})$ は 3次元のデルタ "関数" である. 物理的には, これは, 二個の粒子が同じ時刻に, 空間の同一の点で相会したときにのみ, 相互作用がみこることをあらわす. $\psi(\vec{r})$ のフーリエ変換

$$(2.2) \quad \beta(\vec{k}) = \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \psi(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

にたいしては, 次の形の積分方程式が得られる:

$$(2.3) \quad k^2 \beta(\vec{k}) - \lambda_0 (2\pi)^{-3} \int \beta(\vec{k}') d^3\vec{k}' = E \beta(\vec{k}).$$

通常, $\beta(\vec{k}) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ と仮定される. シュレーディンガー方程式の左辺により定義される作用素を, ハミルトニアンという. ところで, いまの場合, $\int \beta(\vec{k}) d^3\vec{k} \neq 0$ なる β にたいして (2.3) の左辺の二項は $\mathcal{L}^2$ の元でない. 従って, (2.3) の左辺が $\mathcal{L}^2$ にあける作用素を定義するのは, β が

次の集合 D に属する場合だけである :

$$(2.4) \quad D = \{ \beta \mid \int \beta(\vec{k}) d^3\vec{k} = 0, k^2\beta \in \mathcal{L}^2 \}.$$

そして, D 上でこの作用素は,

$$(2.5) \quad \hat{H}^0 : \beta \mapsto k^2\beta$$

に reduce してしまう. あるいは, 相互作用の効果はまったく表現されない.

そこで, Berezin と Faddeev [11] は, D 上で定義された対称作用素 $\hat{H}^0$ の自己共役拡大として, 相互作用を記述するハミルトニアンを求めた. $\hat{H}^0$ の不足指数は $(1, 1)$ である. 実際, $\hat{H}^0$ のテイラー変換を $U = (\hat{H}^0 - iI)(\hat{H}^0 + iI)^{-1}$ とすると, $D(U)^\perp$ および $R(U)^\perp$ は, それぞれ $(k^2 - i)^{-1}$ および $(k^2 + i)^{-1}$ のはる一次元の部分空間である. そこで $D(U)^\perp \rightarrow R(U)^\perp$ の等距離作用素: $(k^2 - i)^{-1} \mapsto e^{i\theta}(k^2 + i)^{-1}$ を定めれば, $\hat{H}^0$ のすべての自己共役拡大 H は, von Neumann の公式によ, 2次のように求まる:

$$(2.6) \quad \beta = \beta_0 + c \left(\frac{1}{k^2 - i} + \frac{e^{i\theta}}{k^2 + i} \right) \\ H\beta = \hat{H}^0\beta_0 + ic \left(\frac{1}{k^2 - i} - \frac{e^{i\theta}}{k^2 + i} \right)$$

ここに, $\beta_0 \in D$.

$\theta = \pm\pi$ のときの H をとくに H^0 と書くと, これは (2.6) から直ちに,

$$(2.7) \quad H^0\beta = k^2\beta, \quad D(H^0) = \{ \beta \mid k^2\beta \in \mathcal{L}^2 \}.$$

こうして、相互作用しない自由な粒子を記述するハミルトニアン H^0 は、 $\hat{H}^0$ の一つの自己共役拡大として得られる。

$-\pi < \theta < \frac{\pi}{2}$ のときは、

$$(2.8) \quad \alpha = -c(1 + e^{i\theta})$$

$$(2.9) \quad \sqrt{-2\mu} = 1 - \tan \frac{\theta}{2}, \quad -\infty < \mu < 0,$$

とみると、

$$c \left(\frac{1}{k^2 - i} + \frac{e^{i\theta}}{k^2 + i} \right) = -\frac{\alpha}{k^2 - \mu} + f_0, \quad f_0 \in D.$$

この関係を用いると、(2.6)の二つの式は次のように書きかえられる：

$$(2.10) \quad \int \left(\beta + \frac{\alpha}{k^2 - \mu} \right) d^3\vec{k} = 0,$$

$$(2.11) \quad H\beta = k^2\beta + \alpha.$$

このようにして、パラメータ μ ($-\infty < \mu < 0$) に依存するハミルトニアン H が得られた。

H^0 はスペクトル的に絶対連続で、そのスペクトルは、実軸の正の部分をおおむね連続スペクトルである。 H は、 μ を固有値にもつ。これは、(二個の粒子の)束縛状態の結合エネルギーをあらわす。

2.2. 散乱理論

(H, H^0) によって与えられる摂動を考えると、定理 1.4 の条件が満たされていることが分る。実際、

$$(2.12) \quad (A_\beta \beta)(\vec{k}) = \frac{1}{(k^2 - \mu)D(\beta)} \int \frac{\beta(\vec{k}')}{k'^2 - \mu} d^3\vec{k}'$$

ここに, $D(z) = 2\pi^2 [(-z)^{1/2} - \sqrt{-\mu}]$. 関数 $(-z)^{1/2}$ は, 実軸の正の部分に cut をいれた複素平面で, $z = E < 0$ において $\sqrt{-E}$ に一致するような解析接続として定義する. 従って, $z = E \pm i0$ ($E > 0$) のとき $(-z)^{1/2} = \mp i\sqrt{E}$ であることを注意しておく. (2.12) を見ると, $R(A_z)$ は $(k^2 - z)^{-1}$ のはる一次元の部分空間であるから, $A_z \in \beta_1(\mathcal{H})$.

従って, 定理 2.3 の公式により wave operator $W_{\pm}$ が求められる. いまの場合 $\mathcal{H}_{ac}^0 = \mathcal{H}$, 従って $P^0 = I$ で,

$$(2.13) \quad (W_{\pm} \beta)(\vec{k}) = \beta(\vec{k}) + \int \frac{\beta(\vec{k}')}{(\omega - \omega' \pm i0) D(\omega' \mp i0)} d^3 \vec{k}',$$

$\forall \beta \in \mathcal{H}.$

これより,

$$(2.14) \quad (W_{\pm}^* \beta_{ac})(\vec{k}) = \beta_{ac}(\vec{k}) - \frac{1}{D(\omega \pm i0)} \int \frac{\beta_{ac}(\vec{k}')}{\omega - \omega' \pm i0} d^3 \vec{k}'$$

$\forall \beta_{ac} \in \mathcal{H}_{ac}$

従って, scattering operator $S = W_+^* W_-$ は,

$$(2.15) \quad (S\beta)(\vec{k}) = \beta(\vec{k}) + \frac{i\pi\sqrt{\omega}}{D(\omega + i0)} \iint \beta_{\omega}(\theta, \varphi) d\cos\theta d\varphi$$

ただし, $k^2 = \omega$, $\beta(\vec{k}) = \beta_{\omega}(\theta, \varphi)$ といった. さらに,

$$(2.16) \quad \mathcal{H} = \int \oplus \mathcal{H}_{\omega} d\sigma(\omega), \quad d\sigma(\omega) = \frac{1}{2} \theta(\omega) \sqrt{\omega} d\omega,$$

とし、scattering suboperator S_ω を求めると、

$$(2.17) \quad S_\omega \beta_\omega = \beta_\omega - \frac{2i\sqrt{\omega}}{i\sqrt{\omega} + \sqrt{-\mu}} \langle \beta_\omega, Y_{00} \rangle Y_{00}.$$

ここには $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathcal{H}_\omega$ における内積、すなわち

$$\langle \beta_{\omega_1}, \beta_{\omega_2} \rangle = \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \beta_{\omega_1}(\theta, \varphi) \overline{\beta_{\omega_2}(\theta, \varphi)}$$

をあらわし、 $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ である。球関数 Y_{lm} のうち Y_{00} だけしかあらわれないことは、S波（角運動量 $l=0$ の波）の散乱しかおこらないことを示す。

$S(\omega) = \det S_\omega$ によつて定義される関数が、通常 S 行列とよばれているものである。 $S(\omega) = e^{2i\delta(\omega)}$ とおいて、phase shift $\delta(\omega)$ は、

$$(2.18) \quad \delta(\omega) = \arctg\left(-\sqrt{\frac{\omega}{-\mu}}\right)$$

と求められる。

Trace formula は、

$$(2.19) \quad \text{tr } A_\beta = \frac{1}{\beta - \mu} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\delta(\omega)}{(\omega - \beta)^2} d\omega$$

と計算される。従つて、spectral shift function は、

$$(2.20) \quad \xi(\omega) = -\theta(\mu - \omega) - \frac{1}{\pi} \theta(\omega) \delta(\omega) + \text{const.}$$

である。この $\xi(\omega)$ は、定理 3.2 が述べているように、

$$(1 + \omega^2)^{-1} \xi(\omega) \in \mathcal{L}^1(-\infty, \infty) \text{ であるが、 } \xi(\omega) \in \mathcal{L}^1$$

ではない。従つて、定理 3.1 により、摂動 (H, H^0) は trace class の摂動ではないことが分る。

2.3. Resolvent 収束とくりこみ

摂動 (H, H^0) によつて non trivial な散乱理論が展開できたことから、ハミルトニアン H がたしかに相互作用を記述していることが分った。 H はパラメータ μ によつて特徴づけられるが、この μ と、最初に予想したパラメータ λ_0 との関係はどうなっているであろうか？ これを見るために、次のようなハミルトニアンを考える。

$$(2.21) \quad H_K : \beta \mapsto k^2 \beta - \lambda_0(K) f_K(\beta), \quad f_K(\vec{k}) = 1 \quad (|\vec{k}| \leq K \text{ のとき}), \quad = 0 \quad (|\vec{k}| > K \text{ のとき}).$$

ここに、 $f_K(\vec{k}) = 1$ ($|\vec{k}| \leq K$ のとき), $= 0$ ($|\vec{k}| > K$ のとき). K は運動量空間の積分領域を制限するために導入したパラメータで、通常 momentum cutoff とよばれる。 λ_0 は K の関数であると考え、この関数のふるまいが、大きい K にたいし、

$$(2.22) \quad \frac{1}{\lambda_0(K)} = 4\pi K + \frac{1}{\lambda} + \dots$$

のようであるとすると、書かなかった部分は、 $K \rightarrow \infty$ のとき 0 になる項をあらわす。

このように定義した作用素 H_K は、 $K \rightarrow \infty$ のとき、前に出て来た H に resolvent 収束することが示せる。ただし、

$$(2.23) \quad \frac{1}{\lambda} = -2\pi^2 \sqrt{-\mu}$$

とする。ここに resolvent 収束とは、 λ を複素平面上のある集合に近くするとき、 $(H_K - \lambda)^{-1} \xrightarrow{s} (H - \lambda)^{-1}$ の意味である。

この resolvent 収束が, 通常 "無限大のくりこみ" とよばれて
 いる操作の数学的表現にまつている. 通常のくりこみ理論との
 関係を明らかにするために,

$$(2.24) \quad S(\omega) = 1 - 2\pi i T(\omega)$$

により定義される散乱振幅 $T(\omega)$ を計算してみよう. まず,
 H_K から出発して対応する $T_K(\omega)$ を求めると, $\omega \leq K^2$ に
 たいし,

$$(2.25) \quad T_K(\omega) = \frac{-2\pi\sqrt{\omega}\lambda_0}{1 - 4\pi\lambda_0 \int_0^K \frac{k'^2 dk'}{k'^2 - \omega - i0}}$$

ここで, 普通やるように, $\lambda_0(K)$ のかわりに単に λ_0 と書
 いた. これを unrenormalized の相互作用定数といい, こ
 れにたいして, くりこまれた相互作用定数を

$$(2.26) \quad \lambda = Z\lambda_0$$

で定義する. ここで Z は,

$$(2.27) \quad Z = (1 - C\lambda_0)^{-1}$$

の形であると仮定してみよう. (2.26) (2.27) より,

$$(2.28) \quad Z = 1 + C\lambda$$

が得られる. λ を使って (2.25) を書き直すと,

$$(2.29) \quad T_K = \frac{-2\pi\sqrt{\omega}\lambda}{1 + C\lambda - 4\pi\lambda \int_0^K \frac{k'^2 dk'}{k'^2 - \omega - i0}}$$

ここで分母の積分は, $K \rightarrow \infty$ では発散するが, 大きい K に

たいていして,

$$4\pi \int_0^K \frac{k'^2 dk'}{k'^2 - \omega - i0} = 4\pi K + 2\pi^2 i\sqrt{\omega} + \dots$$

と書ける. 従って, もし

$$(2.30) \quad C = 4\pi K + \dots$$

にとれば, 発散部分が丁度うちけして,

$$(2.31) \quad T_K \rightarrow T = \frac{-2\pi\sqrt{\omega}}{\frac{1}{\lambda} - 2\pi^2 i\sqrt{\omega}}$$

が得られる. (2.23) に注意すれば, ここに得られた T は, 摂動 (H, H^0) による散乱理論で計算される散乱振幅と一致する.

なお, H_K は

$$H_K = H^0 + V_K, \quad V_K = -\lambda_0(K) f_K(\beta, f_K),$$

と書かれ, 明かに $V_K \in \beta_1(F_2)$. 従って, (H_K, H^0) によって与えられる摂動は trace class の摂動である. したがって,

$$\text{tr } V_K = -\lambda_0(K) \|f_K\|$$

と計算される. ここで, $K \rightarrow \infty$ のとき $\text{tr } V_K$ が発散することは, H_K の resolvent 極限である H を用いた (H, H^0) が trace class の摂動でなかったことと符合する.

2.4. その他のモデル

上で扱ったのは, 相互作用定数のくりこみを含む理論のモデルであったが, このほか, 質量のくりこみのモデルもつく

れる。これは、二種類の粒子の間に $A + A \rightleftharpoons B$ のような相互作用が行なわれるとするもので、cutoffしたハミルトニアンを用いた摂動 (H_K, H^0) は前と同様 trace class の摂動になるが、この場合は、 $-it V_K$ が丁度 B 粒子の質量のくりこみを与える。従って $K \rightarrow \infty$ のときの $it V_K$ の発散がそのまま質量のくりこみの発散になる。一方、 H_K の resolvent 極限として定義される H を用いた (H, H^0) は、定理 1.4 の条件を満たし、(発散を含まない) 散乱理論が展開できる。

くりこみの対象となる発散量が(本質的に)二つあるようなモデルとしては、Lee のモデルが知られている。これは、三種類の粒子の間で $V \rightleftharpoons N + \theta$ のような相互作用が行なわれるもので、この相互作用の定数と V 粒子の質量がくりこみの対象となる。このモデルでは、それぞれの発散を処理する操作が互いに両立するかどうかに関連して、若干の新しい問題がある。

量子電気力学は、電子と光子の相互作用を扱うもので、電子の質量と電荷がくりこみの対象となる。その桌上的 Lee model と似ているが、違うことは、 $e \rightarrow e + \gamma \rightarrow e + 2\gamma \rightarrow \dots$ のように電子は光子を何個でも放出できること、またこれらの光子が、 $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ のように陰陽電子対を発生する過程があることで、このような“無限”に関連した問題がある。

§ 3. 簡単な強磁性モデルと素粒子の統一理論

3. 1. 一次元 Heisenberg モデル

N 個のスピンが輪の形に並んだものを考え、ハミルトニアンとして次のものとする：

$$(3.1) \quad H^{(N)} = -\sum_{j=1}^N (\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} - \frac{1}{4}).$$

ここに $\vec{S}_{N+1} \equiv \vec{S}_1$ とし、 $\vec{S}_j$ は

$$\vec{S}_j = I \otimes \cdots \otimes I \otimes \frac{1}{2} \vec{\sigma} \otimes I \otimes \cdots \otimes I,$$

I は 2×2 の単位行列、 $\vec{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ は Pauli 行列で、Kronecker 積の j 番目にあらわれるものとする。因子の総数は N で、 N は、以下の取扱いの便宜のため、3以上の奇数としておく。

ハミルトニアン $H^{(N)}$ は 2^N 次の行列であるから、状態ベクトルのヒルベルト空間 $\mathcal{H}^{(N)}$ とし、 2^N 次元ユタリ空間を考える。これを、 $S^z = \sum_{j=1}^N S_j^z$ の固有空間の直和に分解しておく：

$$(3.2) \quad \mathcal{H}^{(N)} = \bigoplus_{r=0}^N \mathcal{H}_r^{(N)}.$$

ここに $\mathcal{H}_r^{(N)}$ は S^z の固有値 $\frac{N}{2} - r$ に属する固有空間をあらわす。[$S^z, H^{(N)}$] = 0 であるから、 $H^{(N)}$ の固有値問題は各部分空間 $\mathcal{H}_r^{(N)}$ 毎に解かれる。すなわち、

$$(3.3) \quad H^{(N)} |\Phi_r\rangle^{(N)} = E |\Phi_r\rangle^{(N)}, \quad |\Phi_r\rangle^{(N)} \in \mathcal{H}_r^{(N)}.$$

ここで $|\Phi_r\rangle^{(N)}$ は次の形に書ける：

$$(3.4) \quad |\Phi_2\rangle^{(N)} = \sum a(m_1, \dots, m_2) S_{m_1}^- \cdots S_{m_2}^- |0\rangle^{(N)}.$$

ただし $S_j^\pm = S_j^x \pm i S_j^y$, 各 m_j は 1 から N までの整数値をとるものとする. $|0\rangle^{(N)} \in \Omega_0^{(N)}$ は基底状態のベクトルである. (3.4) を (3.3) に代入することにより, 係数 a について定差方程式が得られる.

$2 = 1$ の場合,

$$(3.5) \quad E a(m) = a(m) - \frac{1}{2} a(m-1) - \frac{1}{2} a(m+1).$$

ここで a は $\forall m \in \mathbb{Z}$ について定義されているものとし, そのかわり周期性条件

$$(3.6) \quad a(m') = a(m), \quad m' \equiv m \pmod{N},$$

をみる. 従って, $\Omega_1^{(N)}$ は N 成分ベクトル $(a(1), \dots, a(N))$ の全体からなる N 次元ユークリッド空間であり, (3.5) の右辺はこの空間における一つの作用素 $H_1^{(N)}$ を定義する.

$2 = 2$ の場合は, $\mathbb{Z}^2$ から直線 $m_1 = m_2$ を除いたものを $\mathbb{Z}^{2*}$ とし, $a(m_1, m_2)$ は $\forall (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^{2*}$ について定義されているとする. さらに次の条件をみる:

$$(3.7) \quad a(m_2, m_1) = a(m_1, m_2),$$

$$(3.8) \quad a(m'_1, m'_2) = a(m_1, m_2),$$

$$m'_1 \equiv m_1, \quad m'_2 \equiv m_2 \pmod{N}.$$

ここで m_1, m_2 を適当に選んで,

$$-\frac{N-1}{2} \leq m_1 \leq \frac{N-1}{2},$$

$$-\frac{N-1}{2} \leq m_2 - m_1 \leq \frac{N-1}{2}, \quad m_2 \neq m_1,$$

になるようにする. この条件が成り立つような (m_1, m_2) の集まりを Δ_N と書く. 独立な $a(m_1, m_2)$ は, $(m_1, m_2) \in \Delta_N$, $m_1 < m_2$ の条件によつて NC_2 個あるから, $\hat{H}_2^{(N)}$ はこれらの NC_2 成分ベクトルの全体からなる NC_2 次元ユークリッド空間である.

このとき, $a(m_1, m_2)$ は次の定差方程式を満たす:

$$(3.9) \quad E a(m_1, m_2) = a(m_1, m_2) - \frac{1}{2} a(m_1 - 1, m_2) - \frac{1}{2} a(m_1, m_2 + 1) \\ (m_1 - m_2 = \pm 1 \text{ のとき})$$

$$(3.10) \quad E a(m_1, m_2) = 2 a(m_1, m_2) - \frac{1}{2} a(m_1 - 1, m_2) - \frac{1}{2} a(m_1 + 1, m_2) - \frac{1}{2} a(m_1, m_2 - 1) - \frac{1}{2} a(m_1, m_2 + 1) \\ (m_1 - m_2 \neq \pm 1 \text{ のとき})$$

これらの方程式の右辺によつて定義される $\hat{H}_2^{(N)}$ の作用素を $H_2^{(N)}$ と書く.

ここで, Trotter の意味における極限として [12][13],

$$(3.11) \quad \hat{H}_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{H}_2^{(N)},$$

$$(3.12) \quad H_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} H_2^{(N)},$$

を定義する (ただしあたり $r = 0, 1, 2$ にたいして). ここに,

Trotter の意味の極限とは次のことをいう. 一般に X, X_N

を Banach 空間とし, 各 n にたいし $P_n \in B(X, X_n)$ が存在し, i) $\|P_n\| \leq M$ (n によらない), ii) $n \rightarrow \infty$ のとき, 各 $x \in X$ にたいし $\|P_n x\| \rightarrow \|x\|$, iii) $\sup \|P_n\| < \infty$ とする.* ベクトルの列 $\{x_n\}$, $x_n \in X_n$, が Trotter の意味で $x \in X$ に収束するとは, $\|x_n - P_n x\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) なることをいう. 作用素の列 $\{A_n\}$, $A_n \in B(X_n)$, が Trotter の意味で A (X における作用素で, 必ずしも有界であることを要しない) に収束するとは, $\|A_n P_n x - P_n A x\| \rightarrow 0$, $\forall x \in D(A)$, なることをいう.

こうして求められた $\mathcal{H}_1$ および H_1 は, 具体的には次のようなものである.

$$(3.13) \quad \mathcal{H}_1 \sim \ell^2(\mathbb{Z}),$$

$$(3.14) \quad H_1 : a(m) \mapsto a(m) - \frac{1}{2} a(m-1) - \frac{1}{2} a(m+1).$$

フーリエ変換

$$(3.15) \quad \hat{a}(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m) e^{ikm}$$

を行なうと, $\mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ における作用素

$$(3.16) \quad \hat{H}_1 : \hat{a}(k) \mapsto (1 - \cos k) \hat{a}(k),$$

が得られる. この結果は, 物理的には次のように解釈される:

$\mathcal{H}_1$ におけるハミルトニアン^{*}の“固有状態”は, 運動量が k でエネルギーが $1 - \cos k$ に等しい一団の粒子 (magnon と

* Trotter はこのとき, “Banach 空間の列 $\{X_n\}$ が X を近似する”と云っている. (3.11) は, この関係をシンボリックに示しただけである.

よばれる)をあらわす. 数学的には, $\mathcal{H}_1$ は,

$$(3.17) \quad \mathcal{H}_1 = \int_0^{2\pi} \oplus \mathcal{H}_{1k} \frac{dk}{2\pi},$$

の形に分解され, H_1 によつて $\mathcal{H}_{1k}$ に誘導される変換 H_{1k} は, (3.16) と同じく $\hat{a}(k) \mapsto (1 - \cos k) \hat{a}(k)$ で与えられる. ただし, ここで $\hat{a}(k) \in \mathcal{H}_{1k} \sim \mathbb{C}$.

二個の magnon が相互作用を行ふ, という系は, $\mathcal{H}_2$ のベクトルで記述される. Trotter の極限として求められた $\mathcal{H}_2$ は, $\{a(m_1, m_2)\}$, $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^{2*}$ 2,

$$\sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^{2*}} |a(m_1, m_2)|^2 < \infty$$

であるようなものの全体であるが, ここで変数を $M = m_1 + m_2$,

$\mu = m_2 - m_1$ に変えると, $a(m_1, m_2) \equiv A(M, \mu) \in \ell^2$

$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$ となる. ここに, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$. 変数 M に

ついてフーリエ変換を行ふ,

$$(3.18) \quad \hat{A}(K, \mu) = \sum_{M \in \mathbb{Z}} A(M, \mu) e^{iKM}$$

とすると, これによつて $\mathcal{H}_2$ は,

$$(3.19) \quad \mathcal{H}_2 = \int_0^{2\pi} \oplus \mathcal{H}_{2K} \frac{dK}{2\pi}$$

の形に分解され,

$$(3.20) \quad \mathcal{H}_{2K} \sim \ell^2(\mathbb{Z}^*).$$

H_2 によつてこの空間に誘導される変換を具体的に求めると,

$$(3.21) \quad \hat{H}_2 : \quad c(\pm 1) \mapsto c(\pm 1) - \cos \frac{K}{2} c(\pm 2), \\ c(\mu) \mapsto 2c(\mu) - \cos \frac{K}{2} [c(\mu-1) + c(\mu+1)], \\ (\mu = \pm 2, \pm 3, \dots)$$

が得られる。Kは、 $=10$ の magnon の運動量の和をあらわす。

自己共役演算子 $\hat{H}_2$ はヒスベートルをもち、固有値・固有関数は、

$$(3.22) \quad E = 2 - 2 \cos \frac{K}{2} \cosh v,$$

$$(3.23) \quad c(\mu) = e^{-|\mu|v}.$$

ただし、 $e^{-v} = \cos \frac{K}{2}$ である。この解は、 $=10$ の magnon の束縛状態をあらわす。

一方、magnon の散乱を扱うには、上の ψ_{2K} , $\hat{H}_2$ をそれぞれ ψ , H とし、これと対にする ψ^0 , H^0 を次のように定める。これらは、自由な（相互作用しない） $=10$ の magnon を記述すべきであるから、まず、

$$(3.24) \quad \psi_2^0 \equiv \psi_1 \otimes \psi_1 \sim l^2(\mathbb{Z}^2)$$

を考え、これを

$$(3.25) \quad \psi_2^0 = \int_0^{2\pi} \oplus \psi_{2K}^0 \frac{dK}{2\pi}$$

の形に分解する。こうして、

$$(3.26) \quad \psi_{2K}^0 \sim l^2(\mathbb{Z})$$

が得られる。これを ψ^0 とする。他方、 ψ_2^0 における作用素 $H_1 \otimes I + I \otimes H_1$ をとり、これによって ψ_{2K}^0 に誘導される変換を求めると H_1 が得られるから、これを H^0 とする。

こうして、摂動 (H, H^0) を考えることが出来る。この場合、 $=10$ の自己共役作用素 H , H^0 の作用する空間は同じで

ないが、定理 1. 1 の条件が成り立っていることが示せる。

J とし、 $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^*)$ を $\mathcal{H}^0 = \ell^2(\mathbb{Z})$ の部分空間と
考えたときの、 $\mathcal{H}^0$ の $\mathcal{H}$ への正射影をとる。定理 1. 1, 2. 1
により wave operator をつくり、さらに scattering
operator や S 行列を求めることができる。

しかし、ここでは、その計算の結果よりも、上に論じたスキームが素粒子の統一理論のモデルになっていることに興味がある。

3. 2. 素粒子の統一理論との比較

実験によってさまざまな素粒子の存在が知られているが、
これらを、一つの基礎方程式の多様な解として統一的に理解
しようというのが、統一理論の思想である。Heisenberg は、
たとえば、二成分スピノル場 $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ を用いて一つの
基礎方程式を与えた [14]。これは、次のようなハミルト
ニアン H^{Ω} を考えることと同じである：

$$(3.27) \quad H^{\Omega} = \int_{\Omega} \mathcal{H}(\vec{r}) d^3\vec{r},$$

$$\mathcal{H} = -i\chi^* \vec{\sigma} \vec{\nabla} \chi - \ell^2 [(\chi^* \chi)^2 - (\chi^* \vec{\sigma} \chi)^2].$$

ここに Ω は、空間の任意の有限領域を示す。ハミルトニアン
密度 $\mathcal{H}$ の第 1 項は、空間の同じ点における場の積をどう定
義するかという問題が生ずるが、これは相互作用が一瞬で行
なわれることを記述するためで、§2 で扱ったくりこみの問

題につながらる。一方、 Ω が全空間になつた極限は、Trotterの意味の極限として扱うことが可能である。

このように定義した一つのハミルトニアンを「固有状態」として、真空（基底状態）、一粒子状態（たとえば核子）、二粒子の束縛状態（たとえば核子・反核子の束縛状態と解釈される中間子）や散乱、が記述できることが期待される。ここで、強磁性モデルの $\vec{S}_j = (S_j^x, S_j^y, S_j^z)$ に当るものが $\chi(\vec{r}) = (\chi_1(\vec{r}), \chi_2(\vec{r}))$ である。

上の H^{Ω} が χ を用いて書かれていたのと同様に、強磁性モデルの $H^{(N)}$ は $\vec{S}_j$ を用いて書かれていた。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}^{(N)}$ は、 $\mathcal{H}^{(N)} = \bigoplus_{n=0}^N \mathcal{H}_n^{(N)}$ のように分解された。必要に応じて始めの方の数項（たとえば $n = 0, 1, 2$ ）に話を限ると、Trotterの意味の極限で、

$$(3.28) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

およびハミルトニアン

$$(3.29) \quad H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$$

を定義することが出来る。そのとき、基底状態、自由な magnon 一団の状態、magnon = 1 団の束縛状態は、それぞれ $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ に属する H の固有状態として求められた。また = 1 団の magnon の散乱は、それぞれ $\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ で作用する $H_2, H_1 \otimes I + I \otimes H_1$ を用いて、抽象的散乱理論により記述でき

た. このせい, total Hamiltonian と free Hamiltonian の作用する空間が異なるとして散乱理論が具体的に定式化されたことは, とくに注目してよい. なぜなら, 一般に相対論的不変な場の量子論では, Haag の定理 [15] によつて, いわゆる Fock space の中で non trivial な相互作用は記述できない, とされているからである.

文 献

- [1] A. L. Belopolski and M. Sh. Birman, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. mat. 32 (1968) 1162 - 1175.
- [2] M. Rosenblum, Pacific J. Math. 7 (1957) 997 - 1010.
- [3] T. Kato, Proc. Japan Acad. 33 (1957) 260 - 264.
- [4] T. Kato, Pacific J. Math. 15 (1965) 171 - 180.
- [5] M. Sh. Birman and M. G. Krein, Dokl. Akad. Nauk SSSR 144 (1962) 475 - 478.
- [6] C. R. Putnam, Commutation Properties of Hilbert space Operators and Related Topics, Springer-Verlag, 1967, p108.
- [7] M. Sh. Birman and S. B. Entina, Dokl. Akad. Nauk SSSR 155 (1964) 506 - 508 ; Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. mat. 31 (1967) 401 - 430.

[8] K. Sekine, Méthode stationnaire de construction des opérateurs d'onde, 1969, unpublished.

[9] M. G. Krein, Dokl. Akad. Nauk SSSR 144 (1962) 268 - 271.

[10] K. Sekine, Structure mathématique d'une théorie renormalisable, 1966, unpublished.

関根 克彦, 数理科学 28 (1969) 42-47.

関根 克彦, 数理解析研講究録「ハミルト=アンの定義とスノゴトル」, to be published.

[11] F. A. Berezin and L. D. Faddeev, Dokl. Akad. Nauk SSSR 137 (1961) 1011 - 1014.

[12] H. F. Trotter, Pacific J. Math. 8 (1958) 887-919.

[13] T. Kato, Perturbation Theory of linear Operators, Springer-Verlag, 1966, p 512 - 513.

[14] W. Heisenberg, Introduction to the Unified Field Theory of Elementary Particles, Interscience, 1966.

[15] R. Haag, Dan. Mat. Fys. Medd 29 (1965) No. 12.

D. Hall and A. S. Wightman, Dan. Mat. Fys. Medd. 31 (1967) No. 5.

ボゴリユ-ボフ 他, 「場の量子論の数学的方法」, 東京図書, オ5章 §4.