

p -飽和マヤゲームと対称群の既約表現

千葉大学大学院 理学研究科 入江 佑樹

Yuki Irie

Graduate School of Science,

Chiba University

マヤゲームと対称群の既約表現の関係を与える. 本稿の詳細は [6] にある.

1 佐藤の予想: ゲームと表現の関係

佐藤 [12] は対称群の既約表現とマヤゲームとは何らかの関係があると予想した. その根拠から話をはじめ. λ を n の分割とする. ρ^λ で対称群 $\text{Sym}(n)$ の λ に対応する既約表現を表す. フック公式 [4] より, ρ^λ の次数は次で求められる:

$$\deg(\rho^\lambda) = \frac{n!}{\prod_{h \in H(\lambda)} h}. \quad (1.1)$$

ただし, $H(\lambda)$ は λ のフック長全体の多重集合を表す. さて, 分割 λ はマヤゲームの局面とすることができる. また, 一般にゲームの局面はエネルギーと呼ばれるものによって解析できる (次節で述べる). 佐藤 [9, 10, 11] は λ のエネルギーは次のように表せることを示した:

$$\text{eg}(\lambda) = \bigoplus_{h \in H(\lambda)} N_2(h). \quad (1.2)$$

ただし, $\oplus_2$ は 2 進展開での繰り上がりのない足し算を表し, $N_2(h) = h \oplus_2 (h-1)$ である. 例えば, $5 \oplus_2 7 = (1+4) \oplus_2 (1+2+4) = 2$ である. 式 (1.1) と (1.2) は見かけがよく似ている. これが佐藤予想の根拠の 1 つである. これ以外にも佐藤 [12] はゲームと表現の様々な類似を指摘した.

本稿では, p -飽和マヤゲームというゲームを与える. ここで p は素数であり, 2-飽和マヤゲームは普通のマヤゲームになる. p -飽和マヤゲームの局面は, マヤゲームの局面と同じであり, 分割とすることができる. 主結果は次である.

定理 1.1. λ を p -飽和マヤゲームの局面とする. すなわち, n の分割とする.

(1) λ のエネルギーは次である:

$$\text{eg}(\lambda) = \bigoplus_{h \in H(\lambda)} N_p(h). \quad (1.3)$$

ただし, $\oplus_p$ は p 進展開での繰り上がりのない足し算, $N_p(h) = h \ominus_p (h-1)$, $\ominus_p$ は p 進展開での繰り下がりのない引き算を表す.

(2) $\text{eg}(\lambda) = n$ となる必要十分条件は ρ^λ の次数が p と素であることである.

(3) ρ^λ の $\text{Sym}(\text{eg}(\lambda))$ への制限は次数が p と素な既約成分を持つ. ただし, $\text{Sym}(0) = \text{Sym}(1)$ とする.

定理 1.1 の証明について述べる^{*1}. (2) と (3) の主張の $\text{eg}(\lambda)$ を (1.3) の右辺で置き換えた主張を (2') と (3') としよう. (1) の証明の鍵は, (3') を (2') を使ってゲームの言葉に翻訳した結果である^{*2}. (3') を証明することさえできれば, (1) を示すことができ, ここから (2) と (3) が従う. なお, 一般に $\text{eg}(\lambda) \leq n$ のため, (2) の条件はこの上限を達成していることを表す.

例 1.2. 定理 1.1 の具体例をみる. $p = 2, \lambda = (4, 3, 2)$ とする. このとき $|\lambda| = 4 + 3 + 2 = 9$ であり, (1) から $\text{eg}(\lambda) = 7$ がわかる. よって (2) から, ρ^λ の次数は偶数である. 実際, その値は 168 である. 以下, (3) が成立していることをみる. まず, ρ^λ の $\text{Sym}(8)$ への制限は, 3 つの既約成分 $\rho^{(3,3,2)}, \rho^{(4,2,2)}, \rho^{(4,3,1)}$ を持つ. 得られた 3 つの既約成分の次数は, それぞれ 42, 56, 70 であり, 全て偶数である. ここで, $\rho^{(3,3,2)}$ の $\text{Sym}(7)$ への制限は 2 つの既約成分 $\rho^{(3,2,2)}$ と $\rho^{(3,3,1)}$ を持つ. この 2 つの既約成分の次数はどちらも 21 であり, 奇数, 言い換えると 2 と素である. これが (3) の主張である. また, (2) から局面 $(3, 2, 2)$ と $(3, 3, 1)$ のエネルギーが 7 であることもわかる.

本稿の残りでは, ゲーム理論を紹介した後, p -飽和について述べる.

^{*1} 公式 (1.3) は佐藤の公式 (1.2) の一般化になっている. 佐藤の公式は偶奇性を用いて証明されており, 今回の証明方法とは大きく異なる.

^{*2} (2') の証明には Macdonald による次数が p と素な既約表現 ρ^λ の特徴付け [8] を用いる.

2 ゲーム理論

ゲームを有向グラフとして定義し、ニムとマヤゲームを紹介する。そして、どのようにゲームとして遊ぶかを述べた後、必勝戦略を与えるために、エネルギーを定義する。最後にニムとマヤゲームのエネルギー公式をみる。

2.1 定義と例

Γ を有向グラフ (V, A) とする。すなわち、 V は集合で、 A は $V \times V$ の部分集合である。 V を Γ の 頂点集合、 A を Γ の 辺集合 と呼ぶ。 $X^0, \dots, X^n$ を Γ の 頂点、すなわち、 $X^0, \dots, X^n \in V$ とする。列 $(X^0, \dots, X^n)$ が X^0 から X^n への長さ n の パス とは $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ に対して (X^i, X^{i+1}) が Γ の 辺、すなわち、 $(X^i, X^{i+1}) \in A$ であることを表す。また X^0 をこのパスの 始点 と呼ぶ。 Γ の 頂点 X に対して、 $\lg(X)$ で X を始点に持つパスの最大の長さを表す。

本稿では、有向グラフ Γ が ゲーム とは、全ての $X \in V$ に対して $\lg(X)$ が有限であることと定義する^{*3}。 Γ をゲームとする。 Γ の 頂点集合 V を Γ の 局面集合、 Γ の 頂点を 局面 と呼ぶ。 X と Y が Γ の 局面で (X, Y) が Γ の 辺のとき、 Y を X の オプション と呼ぶ。 X がオプションを持たないとき、 X を 終局面 と呼ぶ。

例 2.1. 図 1 の 2 つのグラフを考えよう。左のグラフの頂点は $\lg$ がそれぞれ 2, 1, 0 のため、ゲームである。一方、右のグラフの頂点は $\lg$ がどちらも ∞ のため、ゲームではない。

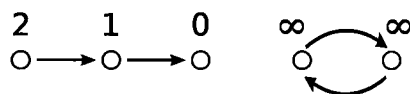


図 1 左はゲームだが、右はゲームでない。

例 2.2 (ニム). m を非負整数、 V を $\mathbb{N}^m$ とする ($\mathbb{N}^0 = \emptyset$ とする)。 $\mathbb{N}$ は非負整数全体である。 $X \in V$ に対して、 X_i で X の i 番目の成分を表す。すなわち、 $X = (X_1, \dots, X_m)$ である。この記法は本稿を通して用いる。

$$A = \{ (X, Y) \in V^2 : X_i \geq Y_i \ (i = 1, \dots, m) \text{ and } \text{dist}(X, Y) = 1 \}$$

^{*3} ゲーム理論では、このようなゲームは有限な不偏ゲームと呼ばれている。

としよう。ただし, $\text{dist}(X, Y)$ は X と Y の Hamming 距離を表す。すなわち

$$\text{dist}(X, Y) = |\{i \in \{1, 2, \dots, m\} : X_i \neq Y_i\}|.$$

$\mathcal{N}^m = (V, A)$ とする。 $\mathcal{N}^m$ はゲームであり, ニム と呼ばれる。このゲームは Bouton [2] によって解析された。

例 2.3 (マヤゲーム). V' を $\mathbb{N}^m$ の元で成分が全て異なるもの全体とする:

$$V' = \{X \in \mathbb{N}^m : X_i \neq X_j \ (1 \leq i < j \leq m)\}.$$

$\mathcal{M}^m$ を $\mathcal{N}^m$ の V' への誘導部分グラフとする。すなわち, 局面集合が V' であり, 辺集合が $\{(X, Y) \in A : X, Y \in V'\}$ である。ただし, A は $\mathcal{N}^m$ の辺集合を表す。このゲーム $\mathcal{M}^m$ は マヤゲーム または 佐藤-Welter ゲーム と呼ばれる。

マヤゲームの局面 X は, 次のように分割と思える。 σ を $X_{\sigma(1)} > X_{\sigma(2)} > \dots > X_{\sigma(m)}$ を満たす置換とする。このとき分割 $\lambda(X)$ を $(X_{\sigma(1)} - m + 1, X_{\sigma(2)} - m + 2, \dots, X_{\sigma(m)})$ で定義する。例えば, $X = (5, 3, 2)$ のとき $\lambda(X) = (3, 2, 2)$ である。なお, Y が X のオプションである必要十分条件は, $\lambda(Y)$ が $\lambda(X)$ から 1 つのフックを抜いて得られることである。そのため, マヤゲームはフックを抜くゲームとも思える。この文脈で, 川中 [7] はマヤゲームを含む平明アルゴリズムというゲームのクラスを構成し, エネルギー公式や必勝手順を求める効率的な方法といった, 多様な結果を得ている。

2.2 ゲームの遊び方

ゲーム Γ の遊び方を紹介する。このゲームは 2 人対戦のゲームである。対戦する 2 人を Player 1 と Player 2 と呼ぼう。ゲームの前に局面を 1 つ選び, この局面からゲームを始める。2 人は, Player 1・Player 2 の順番で, 現在の局面からその局面のオプションへ交互に移動する。交互に移動していき, 終局面に到達した方が勝ちである。

例 2.4. それではニムで遊んでみよう。局面 $(2, 2)$ から始める。図 2 を参照してほしい。最初は Player 1 の番であり, 彼には 4 つのオプション $(2, 1), (2, 0), (1, 2), (0, 2)$ がある。 $(1, 2)$ に移動したとしよう。次は Player 2 の番であり, 3 つのオプション $(1, 1), (1, 0), (0, 2)$ がある。 $(1, 1)$ を選んだとしよう。この手は必勝の手になっている。実際, 次は Player 1 の番であるが, $(1, 0)$ か $(0, 1)$ に移動するしかない。仕方なく $(0, 1)$ に移動したとしよう。すると, Player 2 は $(0, 0)$ に移動することができるため, Player 2 の勝ちである。

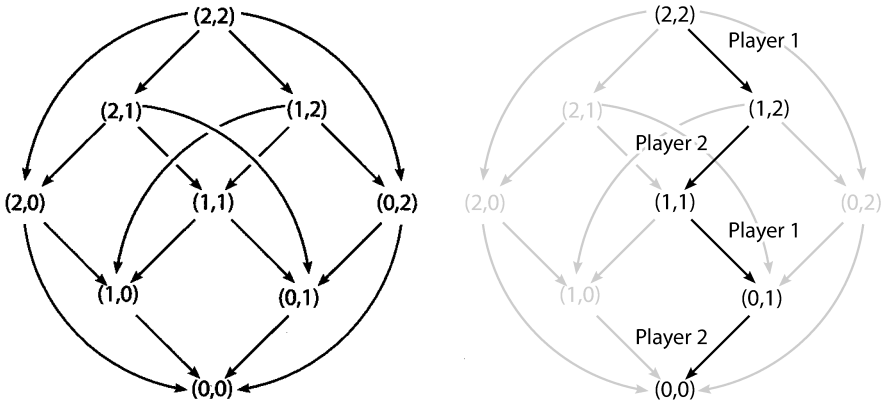


図2 Player 2 の勝ち

さて、どうして Player 2 は勝つことができたのだろうか？実は、彼には必勝の戦略があったのだ。

2.3 エネルギー (Sprague-Grundy 数)

必勝戦略を与えるために、エネルギーを定義しよう (エネルギーは Sprague-Grundy 数とも呼ばれる). N の真の部分集合 S に対して, $\text{mex } S$ で S に入らない最小の非負整数を表す. 例えば, $\text{mex } \emptyset = 0, \text{mex } \{0, 1, 3\} = 2$ である. X をゲーム Γ の局面とする. X のエネルギーを次で再帰的に定義する:

$$\text{eg}(X) = \text{mex} \{ \text{eg}(Y) : Y \text{ は } X \text{ のオプション} \}. \quad (2.1)$$

X が終局面のとき, $\text{eg}(X) = \text{mex } \emptyset = 0$ である. エネルギーは終局面から lg が小さい順に (2.1) によって定義される. 定義から $\text{eg}(X) \leq \text{lg}(X)$ が示せる. 特にマヤゲームの場合, $\text{eg}(X) \leq \text{lg}(X) = |\lambda(X)|$ であり, 等号が成立するときが定理 1.1 の (2) の場合である.

2.4 必勝戦略

それでは必勝戦略を与える. X をゲーム Γ の局面とする. Grundy [5] と Sprague [13] は, X が後手必勝局面 (下で詳細を述べる) である必要十分条件は X のエネルギーが 0 であることを独立に示した. さらに、彼らは X がニムの局面 ($\text{eg}(X)$) と「同値」であることを示した. 詳細は例えば [1, 3] を参照して欲しい.

エネルギー 0 の局面が後手必勝局面であることをみよう。すなわち、エネルギー 0 の局面 X から始めると、Player 2 が必ず勝てることを示す。エネルギーの定義から X のオプションは全てエネルギーが 1 以上である。よって Player 1 は、エネルギーが 1 以上のオプションにしか移動できない。また、次の番の Player 2 は必ずエネルギーが 0 のオプションに移動できる。ここで、終局面はエネルギー 0 であることと、ゲームの定義から有限回の移動で終局面に到達することから、エネルギー 0 のオプションに移動していけば、Player 2 は必ず勝てる。

2.5 エネルギー公式

エネルギーの定義は再帰的なため、一般のゲームでは全ての局面のエネルギーを求めることは困難である。しかし、一部の良いゲームはエネルギー公式があり、簡単にエネルギーを計算できる。ニムとマヤゲームはその代表例である。両者の公式を表 1 にまとめる。ニムの公式は Sprague [5] と Grundy [13] が独立に与えた。マヤのエネルギーは前述の (1.2) で表せる。ここではニムとの比較のため、別の形を紹介する。マヤの表 1 の形のエネルギー公式は Welter [14] と佐藤 [9, 10, 11] が独立に与えた。

表 1 エネルギー公式

	$\text{eg}(X)$
ニム	$X_1 \oplus_2 \cdots \oplus_2 X_m$
マヤ	$X_1 \oplus_2 \cdots \oplus_2 X_m \oplus_2 \bigoplus_{1 \leq i < j \leq m} N_2(X_i - X_j)$

ニムやマヤのようにエネルギー公式を持つゲームは、ゲームの中で最も良いクラスとすることができ、また希少である。このようなエネルギー公式を持つゲームはどうしたら構成できるだろうか？以下では、その 1 つの方法として p -飽和を与える。

3 p -飽和

p -飽和を定義する前に記号を用意する。整数 x に対して、 $\text{ord}_p(x)$ で x の p -adic order を表す。すなわち

$$\text{ord}_p(x) = \begin{cases} \max \{ L \in \mathbb{N} : x \text{ is divisible by } p^L \} & \text{if } x \neq 0, \\ \infty & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

次にゲーム $\mathcal{N}_k^m$ を定義する. まず, $\mathcal{N}_2^m$ で普通のニム $\mathcal{N}^m$ を表す. $\mathcal{N}_3^m$ を X と Y の距離が 1, 2 のいずれか, かつ

$$X - Y \in \left\{ D \in \mathbb{N}^m : \text{ord}_p \left(\sum_{i=1}^m D_i \right) = \min \{ \text{ord}_p(D_i) : 1 \leq i \leq m \} \right\} \quad (*p)$$

のときに X から Y に結んだゲームとしよう. 一般に $\mathcal{N}_k^m$ を X と Y の距離が 1, 2, ..., $k-1$ のいずれか, かつ $(*p)$ のときに結んだゲームとする. $\mathcal{N}_k^m (k \geq m+1)$ は全て $\mathcal{N}_{m+1}^m$ と一致するため, $\mathcal{N}_2^m, \mathcal{N}_3^m, \dots, \mathcal{N}_{m+1}^m$ を得る. ここで $(*p)$ は $\mathcal{N}_2^m$ では自明に成立するため, k が大きくなるほど, どんどん辺の数が増えることに注意しよう.

例 3.1. $p = 2$ として, ニムの対戦例で見た図 2 の場合を再び考えよう. 距離が 2 の辺は次の 3 通りある.

- (1) $X - Y = (1, 1)$
- (2) $X - Y = (1, 2), (2, 1)$
- (3) $X - Y = (2, 2)$

この内, (2) のみ $(*2)$ を満たす. そのため, $\mathcal{N}_3^2$ では図 3 のように辺が 4 本増える.

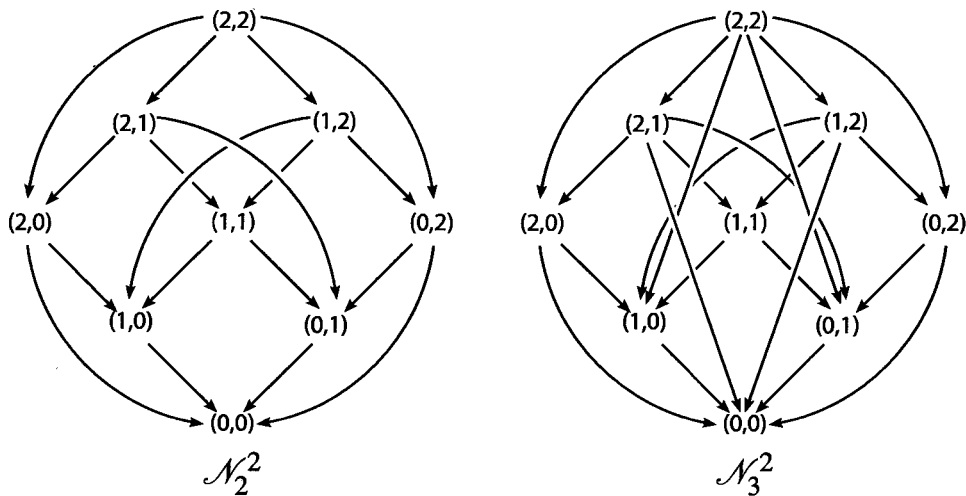


図3 $p = 2$ の場合の $\mathcal{N}_2^2$ と $\mathcal{N}_3^2$

それでは p -飽和を定義する. 大雑把にいうと, p -飽和とは辺をどんどん増やしてもエネルギーが変わらない状態を指す. ニム $\mathcal{N}^m$ の p -飽和を定義した後, 一般の場合を定義

する. $\text{eg}_k(X)$ で $\mathcal{N}_k^m$ での X のエネルギーを表そう. すると $p=2$ のときはエネルギーが全ての局面で一致する. すなわち, 任意の $X \in \mathbb{N}^m$ に対して

$$\text{eg}_2(X) = \text{eg}_3(X) = \cdots = \text{eg}_{m+1}(X)$$

である. 一方 $p=3$ のときは, $\mathcal{N}_2^m$ と $\mathcal{N}_3^m$ ではエネルギーが異なることがある. しかし, $\mathcal{N}_3^m$ 以降ではエネルギーが全ての局面で一致する. すなわち, 任意の $X \in \mathbb{N}^m$ に対して

$$\text{eg}_3(X) = \cdots = \text{eg}_{m+1}(X)$$

である. そこで $\mathcal{N}_k^m (k \geq 3)$ を $\mathcal{N}^m$ の **3-飽和** と呼ぶ. 一般の p に対して, $\mathcal{N}_k^m$ 以降ではエネルギーが全ての局面で一致するとき, それらを $\mathcal{N}^m$ の **p -飽和** と呼ぶ^{*4}. 定義から $\mathcal{N}_{m+1}^m$ は $\mathcal{N}^m$ の p -飽和である.

例えば, $p=2$ のときはニム $\mathcal{N}^m$ 自身を含めた $\mathcal{N}_k^m (k \geq 2)$ が $\mathcal{N}^m$ の 2-飽和になっている. また, 上で述べたように $p=3$ のときは $\mathcal{N}_k^m (k \geq 3)$ が 3-飽和である. 一般の p に対して, $\mathcal{N}_k^m (k \geq p)$ が p -飽和になる.

p -飽和の定義は自然にニムの誘導部分グラフに拡張できる. 特に, p -飽和マヤゲームを考えることができる. 例えば, $p=2$ のときはニムと同様に, マヤゲーム $\mathcal{M}^m$ 自身が $\mathcal{M}^m$ の 2-飽和になる.

ニムとマヤゲームの p -飽和はエネルギー公式を持つ. 最後にそれらのエネルギー公式を表 2 にまとめる.

表 2 Energy formulas

	$\text{eg}(X)$
p -飽和ニム	$X_1 \oplus_p \cdots \oplus_p X_m$
p -飽和マヤ	$X_1 \oplus_p \cdots \oplus_p X_m \ominus_p \bigoplus_{1 \leq i < j \leq m} N_p(X_i - X_j)$

参考文献

- [1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. A.K. Peters, Natick, Mass., 2nd edition, 2001.

^{*4} p が合成数の場合も p -飽和を定義でき, エネルギー公式も同様に成立する. しかし, この場合は定理 1.1 の (2) と (3) は成立しない.

- [2] C. L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *The Annals of Mathematics*, 3(1/4):35–39, 1901.
- [3] J. H. Conway. *On Numbers and Games*. A.K. Peters, Natick, Mass., 2nd edition, 2001.
- [4] J. S. Frame, G. d. B. Robinson, and R. M. Thrall. The hook graphs of the symmetric group. *Canadian Journal of Mathematics*, 6(0):316–324, Jan. 1954.
- [5] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–8, 1939.
- [6] Y. Irie. p-saturations of Welter’s Game and the Irreducible Representations of Symmetric Groups. *arXiv:1604.07214*, 2016.
- [7] 川中宣明. フック構造をもつゲームとアルゴリズム. *数学*, 63(4):421–441, 2011.
- [8] I. G. Macdonald. On the Degrees of the Irreducible Representations of Symmetric Groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 3(2):189–192, Jan. 1971.
- [9] 佐藤幹夫 (上野健爾 記). あるゲームについて. 第 12 回代数分科会シンポジウム報告集, pp. 123–136, 1968.
- [10] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記). Maya game について. *数学のあゆみ*, 15(1):73–84, 1970.
- [11] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記). マヤ・ゲームの数学的理論. 数理解析研究所講究録, 第 98 巻, pp. 105–135, 1970.
- [12] 佐藤幹夫 (梅田亨 記). 佐藤幹夫講義録 (1984 年度・1985 年度 1 学期). 数理解析レクチャー・ノート刊行会, 1989.
- [13] R. Sprague. Über mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, 41:438–444, 1935.
- [14] C. P. Welter. The Theory of a Class of Games on a Sequence of Squares, in Terms of the Advancing Operation in a Special Group. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 57:194–200, 1954.