

不安定・散逸・分散を伴う非線形発展方程式の解について

京大・理 藤 定義, 川原 琢治, 山田 道夫

§ 1. はじめに

自由度の大きな系のカオスは、少数自由度系のそれに比べ不明な部分が多い。ここでは、以下の偏微分方程式を用いて、秩序解とカオス解の関連を調べる。

$$\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + \alpha \partial^2 u / \partial x^2 + \beta \partial^3 u / \partial x^3 + \gamma \partial^4 u / \partial x^4 = 0 \quad (1)$$

第 3, 4, 5 項は α , β , γ が正のとき、それぞれ不安定 (エネルギー注入)、分散、散逸効果を表わす。 $\beta = 0$ の場合、(1) 式は Kuramoto-Sivashinsky 方程式 (K. S. E) となり、カオス解をもつことが知られている。特に以下で用いる α , γ の値に対して、Lyapunov 次元が約 20 の強いカオスとなる。一方、 $\alpha = \gamma = 0$ の場合、(1) 式はよく知られたソリトン解をもつ K-dV 方程式となる。もちろん α , γ が有限ならば、(1) 式は散逸系であり、本質的に K-dV 方程式とは異なる。しかし、分散が比較的強いと、図 1 に見られるようにソリトンによく似たパルスから成る定常進行波解が存在し、パルスの配列の違いによる解の多重性をもつ。以上のように散逸系においても、分散は秩序構造を作る役割を担っている。K. S. E. での強いカオスが分散によって秩序化されるわけである。それでは秩序-カオスの遷移はいかなる形で起こるのであろうか。又、秩序状態の多重性はカオス状態にどのように反映されるだろうか。ここで、分散は、系へ出入りするエネルギー量を直接支配する。たとえば Reynolds 数とは異なり、その流れを調節するだけであること

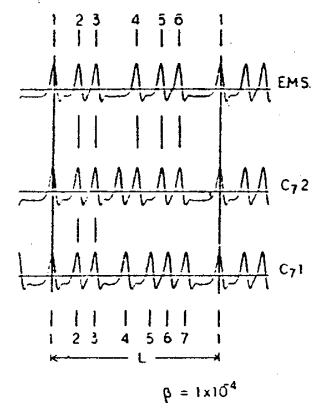


図 1

に注意してほしい。分散の大きさにかかわらず系のアクティブな自由度は大きいのである。

§ 2. 計算法及び結果

以下では、 $\alpha (= 1 \times 10^{-2})$, $\gamma (= 5.066 \times 10^{-6})$ を固定し、(1) 式を数値的に解いて、解の β (分散) 依存性を調べる。数値スキームは、時間、空間についてそれぞれ修正 Runge-Kutta 法、擬スペクトル法を用い、周期 $L = 2$ の周期境界条件を課した。Lyapunov 数, correlation

exponent, $u(x, t_0)$, $u(x_0, t)$, $\text{Re}[A_2(t)]$ ($U(x, t) = \sum A_n e^{in\pi x}$, x_0, t_0 は固定) の各スペクトル, 及び Poincaré map ($\text{Re}[A] = 0$, $d\text{Re}[A_2]/dt > 0$ のとき, $(\text{Re}A_2, \text{Im}A_2)$ をプロットする) を用いて解の性質を調べた。得られた結果を β の値に対応させて図 2 に示す。□, △, ○ は, カオス, 二重周期解 (QP 2), 定常進行波解 (limit cycle) をそれぞれ表わしている。本図は, 1. 初期条件に $\sum_{n=1}^N \cos n\pi x$, $N=2$ (INT₁), $N=4$ (INT₂) の 2 つを用いそれぞれ β を $[3.0 \times 10^{-5}, 4.8 \times 10^{-5}]$, $[2.8 \times 10^{-5}, 5.5 \times 10^{-5}]$ (← 及び ←← で示される系列) の範囲で変化させて求めた解と, 2. 1. で得られた解を初期条件に用いて得られる一連の解 (直線で結ばれたもの) によって構成されている。C, Q, S は初期条件にカオス, QP 2, 定常解を用いたことを表わし, 下付添字はパルス数, 数字は多重解を区別する。E. M. S. は偶波数成分が優勢な解を表わす。

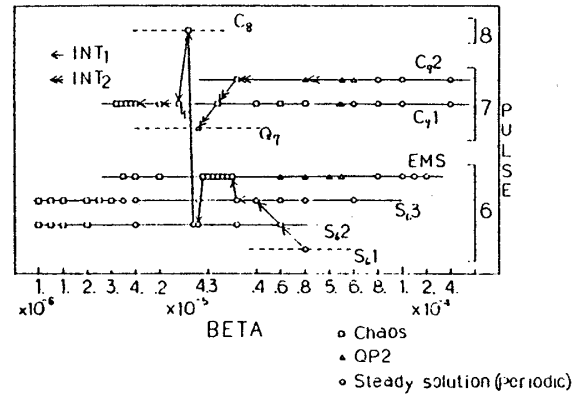


図 2

明らかに, どの β の値に対してもいくつかの異なる解が存在する。定常解はパルス数及びその配列によって区別することができる。(図 1 参照) 一方, カオス解も β が比較的大きい場合, パルス数を保存するために相互に識別することが可能であり, 同数のパルスをもつものに対しても, 空間スペクトルの時間平均や Poincaré map, correlation exponent を用いて区別できる。(図 3, 4, 6 参照) 又, QP 2 もパルス数を保存する。しかし, β が小さくなるとカオス

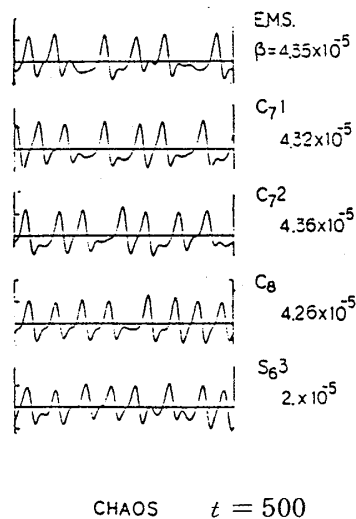


図 3

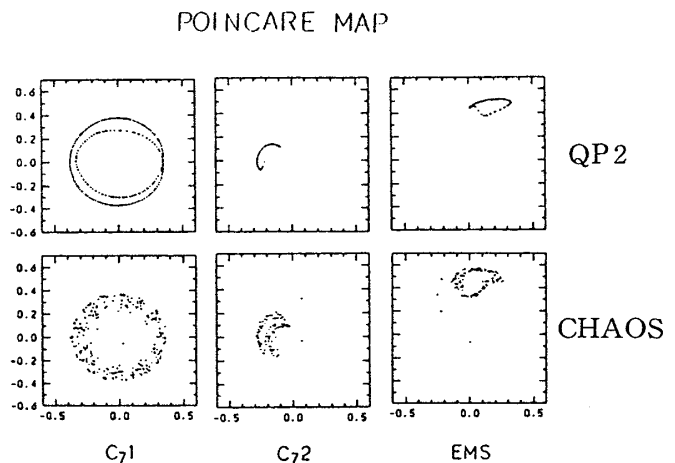
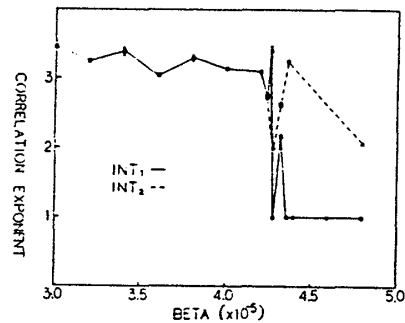
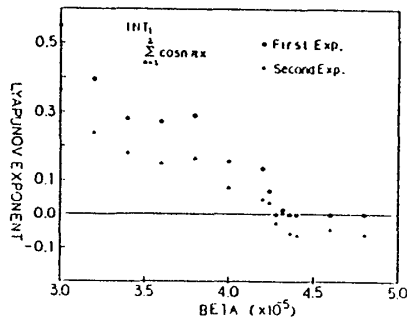


図 4

が成長し強くなるため（図3の S_6 3），パルスの生成消滅がみられカオスの識別は困難となる。

次に2.で得られた系列であるが， β の増加に従ってカオス $\rightarrow$ QP2 $\rightarrow$ 定常解と変化するため，一つの attractor の分岐を示すものと考えられる。E.M.S. の系列では解の特殊性により各解が同一の attractor に属すると思われる。 C_7 1, C_7 2では，カオス $\rightarrow$ QP2 の分岐は確からしいが（図4），QP2 $\rightarrow$ 定常解が分岐かどうか判別するのは難しい。いずれにせよ適当な初期条件を選べば完全な attractor の分岐が見られるであろう。以上より，初期条件 INT_1 , INT_2 を用いた系列（図2，図5）は分岐ではなく， β の変化に従って引き込まれる attractor



が換わる現象が見えていると思われる。

§ 3. 結論

定常解の多重性はカオスにも引き継がれる。従って，(1)式の秩序-カオス遷移を決める臨界の分散値 (β_c) は決定できないが，数値実験の結果では $\beta \lesssim 5 \times 10^{-5}$ でカオスが優勢である。この多重性は，パルス個数及び配列が一意的に決まらないためであり，このことはパルスが重ね合せ可能な基本解となり得ることを示唆している。従って，解の分岐やカオスの性質をパルスの運動（相互作用）によって理解できる可能性がある。

個々の attractor の分岐は QP2 が存在することから Ruelle-Takens 型であると思われるが現状では断定できない。分散が比較的大きな場合にはカオスも多重性を示す。それぞれの弱いカオスが K.S.E. の強いカオスとどの様に結びつくかという点も興味ある問題である。数値実験の結果を見ると強いカオスにおいてもパルス構造が重要な役割を担っているように思われることを付記しておく。