

K-安定性, Chow norm および漸近的 Bergman 核

大阪大学大学院理学研究科 満洲俊樹

2009 年 5 月 25 日

1 Donaldson による K-安定性

K-安定性の概念はもともと Tian [9] によって定義されたものであるが, Donaldson は [3] に於いて Tian の K-安定性の概念を見直し, 以下のような非常に扱いやすい定義を与えた.

定義 1: 対 $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ が, 偏極代数多様体 (M, L) の **test configuration** であるとは, complex variety 間の $\mathbb{C}^*$ -同変な射影射 $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{A}^1$ とその上の直線束 $\mathcal{L}$ が存在して, 次の 2 条件を満たすものを言う.

- 1) ファイバーへの制限で $(\mathcal{M}_s, \mathcal{L}_s) \cong (M, L^\ell)$, $s \neq 0$.
- 2) $\mathcal{M}$ への $\mathbb{C}^*$ -作用が, $\mathcal{L}$ への $\mathbb{C}^*$ -作用にリフトする.

ただし $\mathbb{C}^*$ は $\mathbb{A}^1 := \{s \in \mathbb{C}\}$ へ複素数の積で作用し, 一方直線束への $\mathbb{C}^*$ -作用は, 常にファイバーをファイバーに線形に写すものとする. また ℓ は test configuration $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ の指数とよばれる. さて direct image sheaf を用いて $\mathbb{A}^1$ 上のベクトル束 E_m を

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(E_m) := \pi_* \mathcal{L}^m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

によって定義する. このとき $\mathbb{C}^*$ はファイバー $(E_m)_0$ に作用するが, それから誘導される $\det(E_m)_0$ への $\mathbb{C}^*$ -作用の重みを w_m とする. またファイバー $(E_m)_0$ の次元を N_m とおく. このとき, $m \gg 1$ に対して

$$(1.1) \quad \begin{cases} N_m &= a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_0, \\ w_m &= b_{n+1} m^{n+1} + b_n m^n + \cdots + b_0. \end{cases}$$

をみたす有理数 a_i, b_j が m と独立にとれる. 特に $a_n = \ell^n c_1(L)^n [M]/n!$ は正数であることに注意する. よって

$$(1.2) \quad \frac{w_m}{mN_m} = F_0 + F_1 m^{-1} + F_2 m^{-2} + \dots$$

と書ける. ここで係数 $F_i = F_i(\mathcal{M}, \mathcal{L})$, $i = 0, 1, 2, \dots$, は m とは独立にとれる有理数で $F_1 = F_1(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ は特に test configuration $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ の**二木不変量**とよばれる. 以下 (M, L) を偏極代数多様体とする.

定義 2: (1) (M, L) が **K-半安定** であるとは, $F_1(\mathcal{M}, \mathcal{L}) \leq 0$ が (M, L) のすべての test configuration $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ に対して成り立つときにいう.

(2) K-半安定な (M, L) が **K-安定** であるとは, いかなる $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ に対しても, $F_1(\mathcal{M}, \mathcal{L}) = 0$ であることと $\mathbb{A}^1$ 上の complex variety $\mathcal{M}$ が trivial (つまり $\mathcal{M} \cong M \times \mathbb{A}^1$) であることが同値であるときにいう.

ただし (2) の triviality は作用は込めないとする. つまり $\mathcal{M}$ への $\mathbb{C}^*$ -作用が, 同型を通して M への trivial な作用を誘導するとは限らないとする.

Tian の導入した K-安定性は 1-パラメーター群に沿った K-energy の漸近挙動で定義されるが, 我々のアプローチでは K-energy の代わりに Chow norm を用い, K-安定性のみならず上記の不変量 $F_i(\mathcal{M}, \mathcal{L})$, $i = 1, 2, \dots$, も特徴付けた. 一つには Chow norm の臨界点たる balanced 計量が漸近的 Bergman 核関数の定数性で特徴付けられ, かつそのような計量の存在が (M, L) の Chow 漸近弱安定性にも対応しているのでこうしたアプローチをとった.

2 Tian による K-安定性

第1章で考えた $\mathbb{A}^1$ 上のベクトル束 E_m に対して, $\mathbb{A}^1$ の原点および $z = 1$ の上のファイバーを, それぞれ $(E_m)_0$, $(E_m)_1$ とする. このとき Quillen による Serre 予想解決の同変版として次が成り立つ (cf. [4]).

事実1: ベクトル空間 $(E_m)_1$ のエルミート計量 H_1 に対し, 正則ベクトル束 E_m の $\mathbb{C}^*$ -同変な trivialization

$$(2.1) \quad E_m \cong \mathbb{A}^1 \times (E_m)_0$$

が存在し, この同型で H_1 から誘導される $(E_m)_0$ のエルミート計量 H_0 は, $\mathbb{C}^*$ の極大コンパクト部分群 ($\cong S^1$) の作用で不変となる.

1 の原始 N_m 乗根を ζ と書き $\Pi := \{\zeta^j \text{id}_{(E_m)_0}; j = 1, 2, \dots, N_m\}$ とする. $(E_m)_0$ への $\mathbb{C}^*$ -作用の定める準同型 $\psi_m : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}((E_m)_0)$ に対し

$$\psi_m^{\text{SL}}(s) := \frac{\psi_m(s)}{(\det \psi_m(s))^{1/N_m}} \in \text{SL}((E_m)_0), \quad s \in \mathbb{C}^*,$$

と行列式を正規化する. ただしこの $\psi_m^{\text{SL}}(s)$ は Π の乗法を法として考える. $m \gg 1$ のとき $\mathbb{C}^*$ -同変な trivialization (2.1) および小平埋め込みによって

$$\mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{P}^*(E_m) = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^*((E_m)_0)$$

を得る. また $\mathcal{M}_s \subset \{s\} \times \mathbb{P}^*((E_m)_0) \cong \mathbb{P}^*((E_m)_0)$ によって $\mathcal{M}_s$ を複素射影空間 $\mathbb{P}^*((E_m)_0)$ の複素部分多様体とみなすと,

$$(2.2) \quad \mathcal{M}_s = \psi_m^{\text{SL}}(s) \cdot \mathcal{M}_1, \quad s \neq 0,$$

が成り立つ. また ω_{FS} を $\mathbb{P}^*((E_m)_0)$ の Fubini-Study 計量とする. 複素射影空間 $\mathbb{P}^*((E_m)_0)$ 内の $\mathcal{M}_1 (= M)$ 上でコホモロジー類 $\ell_{\mathbb{C}_1}(L)_{\mathbb{R}}$ に属する Kähler 計量全体を $\mathcal{K}$ とし, 対応する K-energy を $\kappa : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ と書き

$$(2.3) \quad \nu(t) := \kappa(\psi_m^{\text{SL}}(s)^*(m^{-1}\omega_{\text{FS}}|_{\mathcal{M}_s})), \quad t \in \mathbb{R},$$

とおく. ただし $s = e^t$ とし $\dot{\nu}(t) := (d/dt)\nu(t)$ とおく. Tian が実際に扱ったのは $L = K_M^{-1}$ のときであるが, **一般化された二木不変量** (cf. [9]) を

$$(2.4) \quad \tilde{F}_1(\mathcal{M}, \mathcal{L}) := \lim_{s \rightarrow -\infty} \dot{\nu}(s)$$

で定める. 偏極代数多様体 (M, L) に対し, test configuration $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ をいかによっても $\tilde{F}_1(\mathcal{M}, \mathcal{L}) \leq 0$ が成り立つとき, (M, L) を **Tian の意味で K-半安定** であるという. さらに, そうした K-半安定の (M, L) が **Tian の意味で K-安定** (cf. [9]) であるとは, いかなる $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ に対しても, $\tilde{F}_1(\mathcal{M}, \mathcal{L}) = 0$ であることと, $\mathbb{A}^1$ 上の complex variety $\mathcal{M}$ が (必ずしも作用はこめず) trivial であることが同値であるときにいう.

3 The Chow norm

M の複素次元を n とし, $\mathcal{M}_1 = M$ の $\mathbb{P}^*((E_m)_1)$ への小平埋め込みによる像の次数を d とする. (2.1) の $\mathbb{C}^*$ -同変 trivialization によって

$$(3.1) \quad (E_m)_1 \cong (E_m)_0$$

なる $\mathbb{C}^*$ -同変な同型が得られることに注意する. また $(E_m)_0$ に, 第2章の事実1で得られたのエルミート計量 H_0 を与える. ベクトル空間 $(E_m)_0$ のちょうど dm 回対称テンソルをとった積空間を $S^{dm}((E_m)_0)$ とし, これにさらに $n+1$ 回テンソル積をとってベクトル空間 $W_m = W_m((E_m)_0)$ を

$$W_m((E_m)_0) := \{S^{dm}((E_m^*)_0)\}^{\otimes n+1}$$

で定義する. さらに W_m^* を W_m の双対空間とすると $G_m := \mathrm{SL}((E_m)_0)$ は W_m^* に自然に作用する. 次に, 同型 (3.1) および小平埋め込みにより M を射影空間 $\mathbb{P}^*((E_m)_0)$ の複素部分多様体とみなす:

$$(3.2) \quad M \subset \mathbb{P}^*((E_m)_1) = \mathbb{P}^*((E_m)_0).$$

この M に対し, W_m^* の元 $\hat{M} \neq 0$ が存在して, その射影化 $[\hat{M}] \in \mathbb{P}^*(W_m)$ が, ちょうど $\mathbb{P}^*((E_m)_0)$ 上の既約な代数的サイクル M の Chow point となるようにとれる. そこで W_m^* 上の Chow norm (Zhang [10] 参照)

$$(3.3) \quad W_m^* \ni w \longmapsto \gamma(w) := \|w\|_{\text{CH}(H_0)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

を軌道 $G_m \cdot \hat{M}$ 上に制限した関数 $\gamma : G_m \cdot \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を考える. このとき γ が臨界点をもつのは, 軌道 $G_m \cdot \hat{M}$ が W_m^* の閉集合すなわち $(M, L^{\ell m})$ が Chow 弱安定であるときまたそのときに限る. しかも $g \in G_m$ とすると, $g \cdot \hat{M}$ が γ の臨界点であることと $g^* \omega_{\text{FS}}$ が balanced 計量 (すなわち対応する漸近的 m 次ベルグマン核関数が定数) であることの同値性に注意せよ. さらに $s = e^t$ とおいて, たとえば,

$$(3.4) \quad \nu_m(t) := \log \gamma(\psi_m^{\text{SL}}(s) \cdot \hat{M}), \quad s \in \mathbb{R},$$

とおくと凸関数になっていることが容易に確かめられるが, これは Tian の意味の K-安定性を定義する際に用いた関数 ν の代わりとなるもので, 両者の違いは, ν の定義では K-energy の漸近挙動が本質的である一方, ν_m の定義では Chow norm の漸近挙動が本質的であるという点にある.

4 主定理

この章の目的は次の主定理を示すことにある (関連して [7] 参照) :

主定理 : $\lim_{s \rightarrow -\infty} \dot{\nu}_m(s) = (n+1)! a_n (F_1 m^n + F_2 m^{n-1} + F_3 m^{n-2} + \dots).$

この定理によって Donaldson の K-安定性に Tian 流の energy-theoretic な解釈を与えることが可能になった. その結果, 定スカラー曲率ケーラー計量をもつ偏極代数多様体 (M, L) が K-安定であることの見通しの良い証明が得られるが, その大まかな方針については次章で述べ, この章では主定理の証明だけにとどめる.

証明：座標 $\tilde{s}$ を $\tilde{s}^{N_m} = s$ で導入し，不分岐有限被覆 $\mathbb{C}^* \ni \tilde{s} \mapsto s \in \mathbb{C}^*$ を考える．このとき代数群の準同型 $\tilde{\psi}_m : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathrm{SL}((E_m)_0)$ を

$$(4.1) \quad \tilde{\psi}_m(\tilde{s}) := \frac{\psi_m(s)}{\det \psi_m(\tilde{s})}, \quad \tilde{s} \in \mathbb{C}^*,$$

で定めると $\tilde{\psi}_m(\tilde{s})$ と $\psi_m^{\mathrm{SL}}(s)$ は Π の積を法として一致する．この不分岐被覆を通して $\mathbb{C}^*$ が $(E_m)_0$ に作用する．この $\mathbb{C}^*$ -作用で， $\mathbb{P}^*((E_m)_0)$ 上の代数的サイクル $\mathcal{M}_0$ は（重複度もこめて）保存されるので，対応する Chow point $[\hat{\mathcal{M}}_0] \in \mathbb{P}^*(W_m)$ は固定される．よって，ある整数 q_m が存在して

$$(4.2) \quad \tilde{\psi}_m(\tilde{s}) \cdot \hat{\mathcal{M}}_0 = \tilde{s}^{q_m} \hat{\mathcal{M}}_0.$$

ところで $\mathbb{C}^*$ -作用は対角化可能なので，ある自然数 r について $\hat{M} \in W_m^*$ は $\sum_{j=1}^r w_j$ と書け，各 $0 \neq w_j \in W_m^*$ は

$$(4.3) \quad \tilde{\psi}_m(\tilde{s}) \cdot w_j = \tilde{s}^{\beta_j} w_j, \quad \tilde{s} \in \mathbb{C}^*,$$

を満たす．ただし各 β_j は整数で $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_r$ と仮定できる．よって $\hat{\mathcal{M}}_0 = w_1$ とおけるので， $0 < \tilde{s} \ll 1$ なる各 $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ に対し

$$(4.4) \quad \tilde{\psi}_m(\tilde{s}) \cdot \hat{M} = \tilde{s}^{\beta_1} \left(\hat{\mathcal{M}}_0 + O(|\hat{s}|) \right).$$

さて (4.3) 式で $j = 1$ とし $w_1 = \hat{\mathcal{M}}_0$ を代入したものを，(4.2) 式と比較することによって $\beta_1 = q_m$ が得られる．よって (4.4) より

$$\psi_m^{\mathrm{SL}}(s) \cdot \hat{M} = s^{q_m/N_m} \left(\hat{\mathcal{M}}_0 + O(|\hat{s}|) \right)$$

が Π の作用を法として成り立つ．よって $s = e^t$ に注意して (3.4) 式より

$$\begin{aligned} \nu_m(t) &= \log \gamma(\psi_m^{\mathrm{SL}}(s) \cdot \hat{M}) = \log \gamma \left(e^{q_m t/N_m} \left(\hat{\mathcal{M}}_0 + O(|\hat{s}|) \right) \right) \\ &= \frac{q_m}{N_m} t + \log \gamma \left(\hat{\mathcal{M}}_0 + O(e^{t/N_m}) \right) = \frac{q_m}{N_m} t + \log \gamma(\hat{\mathcal{M}}_0) + O(e^{t/N_m}). \end{aligned}$$

ここで両辺を t で微分し, $t \rightarrow -\infty$ とすることによって

$$(4.5) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{\nu}_m(t) = \frac{q_m}{N_m}$$

を得る. 次に $\tilde{\psi}_m$ を通して $\mathbb{C}^*$ の作用する graded algebra

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} (E_{km})_0$$

を考えると, $\det(E_{km})_0$ への $\mathbb{C}^*$ -作用の重みを p_k とすると, $m \gg 1$ のとき Mumford [6] により

$$(4.6) \quad p_k = -\frac{q_m}{(n+1)!} k^{n+1} + O(k^n).$$

さて $\tilde{\psi}_m(\tilde{s})$ と $\psi_m^{\text{SL}}(s)$ が Π の積を法として一致するので, 式 (4.1) により, 与えられた $\tilde{s}$ に対し $\tilde{\psi}_m(\tilde{s})$ の作用は, $\psi_m(s)$ の作用および $(E_m)_0$ へのちょうど $(\det \psi_m(\tilde{s}))^{-1}$ 倍のスカラー積に分解する. $m \gg 1$ のとき自然な写像

$$(4.7) \quad S^k((E_m)_0) \rightarrow (E_{km})_0$$

は全射なので, $\psi_m(\tilde{s})$ の作用は $(E_{km})_0$ への $\psi_{km}(\tilde{s})$ の作用を誘導するので, こちらの方からの重み p_k への寄与分は ($\tilde{s}$ を基準にすると)

$$(4.8) \quad N_m w_{km}.$$

次に上に述べたスカラー積の重みへの寄与分を計算してみる. ところで $(\det \psi_m(\tilde{s}))^{-1} = \tilde{s}^{-w_m}$ によって, 全射 (4.7) から, スカラー積はベクトル空間 $(E_{km})_0$ の $\tilde{s}^{-kw_m}$ 倍を誘導するが, $(E_{km})_0$ の次元は N_{km} なので, スカラー積から誘導される $\det(E_{km})_0$ への作用が重み p_k への寄与する分は

$$(4.9) \quad -kw_m N_{km}.$$

ここで p_k は (4.8) および (4.9) の和となり, (1.2) を考え併せて

$$\begin{aligned} p_k &= N_m w_{km} - k w_m N_{km} = (km) N_m N_{km} \left\{ \frac{w_{km}}{(km) N_{km}} - \frac{w_m}{m N_m} \right\} \\ &= (km) N_m N_{km} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} F_i (km)^{-i} - \sum_{i=0}^{\infty} F_i m^{-i} \right\} \\ &= -k N_m N_{km} \{ O(1/k) + F_1 + F_2 m^{-1} + F_3 m^{-2} + \dots \} \end{aligned}$$

を得る. 一方 (1.1) より $N_{km} = (km)^n \{ a_n + O(1/k) \}$. これを上式に代入することにより次式を得る.

$$p_k = -k^{n+1} a_n N_m \{ O(1/k) + F_1 m^n + F_2 m^{n-1} + F_3 m^{n-2} + \dots \}$$

これと (4.5) 式を比較し, さらに (4.5) 式と考え併せて

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{\nu}_m(t) = \frac{q_m}{N_m} = (n+1)! a_n (F_1 m^n + F_2 m^{n-1} + F_3 m^{n-2} + \dots).$$

5 Concluding Remarks

偏極代数多様体 (M, L) に対し, $lc_1(L)_{\mathbb{R}}$ に属するケーラー形式 ω を考え, L のエルミート計量 h で $\omega = lc_1(L; h)_{\mathbb{R}}$ となるものをとる. このとき, ベクトル空間 $(E_m)_1 = H^0(M, \mathcal{O}(L^{m\ell}))$ 上のエルミート計量 $H(h)$ を

$$H(h)(\sigma, \tau) := \int_M (\sigma, \tau)_h \omega^n \in \mathbb{C}, \quad \sigma, \tau \in (E_m)_1,$$

で定義する. ここで $(\cdot, \cdot)_h$ は, $L^{m\ell}$ の h による fiberwise なエルミート内積とする. $H(h)$ による $(E_m)_1$ の直交基底 $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N_m}\}$ をひとつ選び

$$B_m(\omega) := \frac{n!}{m^n} \sum_{i=1}^{N_m} (\sigma_i, \sigma_i)_h$$

とおき, これを第 m 漸近的 Bergman 核関数とよぶ. Zhang [10] により, この関数の定数性と $(M, L^{m\ell})$ の弱 Chow 安定性が同値であることが知られて

いる。さて $c_1(L)_{\mathbb{R}}$ が定スカラー曲率ケーラー計量をもつと仮定しよう。ここでは簡単のため、正則自己同型群 $\text{Aut}(M, L)$ が離散的な場合を考えよう。この場合には Donaldson [2] により $m \gg 1$ のとき $(M, L^{m\ell})$ が Chow 安定となるので $B(\omega_m)$ が定数となるような balanced 計量 ω_m が偏極類 $\ell c_1(L)_{\mathbb{R}}$ の中に存在する。一般に balanced 計量（を Fubini-Study 計量とみなせるような埋め込み方に対応する $g \cdot \hat{M}$ ）が Chow norm の臨界点となっているので、(3.4) で定義された関数 $\nu_m(t)$ が $t = 0$ で、

$$\dot{\nu}_m(0) = 0$$

を満たす。ところが関数 $\nu_m(t)$ は凸関数なので、

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{\nu}_m(t) \leq 0$$

が成り立つが、第4章の主定理から $F_1 \leq 0$ を得る。これから (M, L) は K-半安定となる。この議論をもう少し精密にすると、さらに $F_1 < 0$ が示され、 (M, L) の K-安定性も得られるのである。議論がかなり複雑になるが $\text{Aut}(M, L)$ が離散的でない場合にも同様に K-安定性が得られる。（[5] 参照。定スカラー曲率ケーラー計量存在の下での偏極代数多様体の K-安定性や K-半安定性の話題は [1],[4],[8] も参照。）

参考文献

- [1] X. X. Chen & G. Tian, Geometry of Kähler metrics and foliations by holomorphic discs, Publ. Math. IHES, 107 (2008), 1–107.
- [2] S.K. DONALDSON: Scalar curvature and projective embeddings, I, J. Differential Geom. 59 (2001), 479–522.
- [3] S.K. DONALDSON: Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Differential Geom. 62 (2002), 289–349.
- [4] S.K. DONALDSON: Lower bounds on the Calabi functional, J. Differential Geom. 70 (2005), 453–472.

- [5] T. MABUCHI: K-stability of constant scalar curvature polarization, arXiv: math.DG/0812.4093v2.
- [6] D. MUMFORD Stabilities of projective varieties, *L'Enseignement Math.* 23 (1977), 39–110.
- [7] D.H. PHONG AND J. STURM: Lectures on stability and constant scalar curvature, arXiv: math.DG/0801.4179v2.
- [8] J. STOPPA: K-stability of constant scalar curvature Kähler manifolds, arXiv: math.AG/0803.4095.
- [9] G. TIAN: Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, *Invent. Math.* 130 (1997), 1–37.
- [10] S. ZHANG: Heights and reductions of semi-stable varieties, *Compos. Math.* 104 (1996), 77–105.