

η 函数の超局所解析についての一, この注意

京大・数理研 河合隆裕

佐藤先生が η 函数, 或いはその零値 (η -Nullwerte), の大域的性質を超局所的に捉える試みを発表され (Sato, M.: Pseudo-differential equations and theta functions, Asterisque, 2-3 (1973) pp. 286-291) からかなりの年月が経ったけれども, この論文は余り世の注意を惹いていないように見える。併作, アーベル多様体の変形と云う主題を解析的に考えて行く際, もう一度見直してみるべき方向を指し示した重要な論文と思われる。

本稿では, この論文の定式化 (Definitions in p. 289 and p. 290) に於いてやや不親切に思われる点があるので, それに関する注意を与える。

まず, 最初に, 上述の論文の定式化を復習しておこう。

話は, 次の条件 (1), (2) を満たす (micro-)differential operators (の行列) $P_j(x, \partial/\partial x)$ ($j=1, \dots, 2n$) ($x \in U \subset \mathbb{R}^n$) の組を考えることから始まる。

$$(1) [P_j, P_k] (\stackrel{\text{def}}{=} P_j P_k - P_k P_j) = -2\pi\sqrt{-1} e_{jk} \quad (1 \leq j, k \leq 2n)$$

$$\text{但し } e_{jk} \in \mathbb{Z}, \quad \det(e_{jk}) \neq 0.$$

$$(2) \text{ord } P_j < 1 \quad (1 \leq j \leq 2n)$$

以下, $E \stackrel{\text{def}}{=} (e_{jk})_{1 \leq j, k \leq 2n}$, $\langle E y, x \rangle = \sum_{j, k} e_{jk} y_k x_j$,
 $(E y)_j = \sum_k e_{jk} x_k$ なる記法を用いることとする。

ここで, 条件(1)により,

$$(3) \quad [\exp(P_j), \exp(P_k)] = 0 \quad (1 \leq j, k \leq 2n)$$

が成立する。更に, 条件(2)により

$$(4) \quad \exp(P_j) \in \mathcal{E}^\infty \quad (\text{無限階擬微分作用素の層})$$

が成立する。(1)なる代数的条件を合わせれば, より一般に,

$$(4') \quad \exp\left(\sum_j c_j P_j\right) \in \mathcal{E}^\infty \quad (c_j \in \mathbb{C})$$

が成立することも容易に判る。

(3), (4) より, $\{\exp(P_j)\}_j$ の同時固有(超)函数を考へることが出来る。これを ヤコビ(超)函数 と名付けることとする。即ち, ヤコビ(超)函数とは, 適当な $c_j \in \mathbb{C}$ が存在して

$$(5) \quad [\exp(P_j)] h(x) = c_j h(x) \quad (j=1, \dots, 2n)$$

を満たす超函数(すは, microfunction) $h(x)$ のことを謂う。

さて, テ-タ函数 $\vartheta(x|x)$ は上の条件(1), (2)を満たす (micro-)differential operators の組 (P_j) (それ, 或いはより正確には, それ等の線型結合の全体を, 以下 ヤコビ構造 と呼ぶことがある。)を用いて次のように定義される。

$$(6) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \pi \sqrt{-1} (E x)_j\right) \vartheta(x|x) = P_j(x, \frac{\partial}{\partial x}) \vartheta(x|x) \quad (1 \leq j \leq 2n)$$

$$(7) \quad \text{任意の } \nu \in \mathbb{Z}^{2n} \text{ に対して, 或る } c(\nu) \in \mathbb{C} \text{ が存在して}$$

$$\vartheta(x+\nu|t) = c(\nu) \varepsilon(\langle E\nu, x \rangle) \vartheta(x|t)$$

が成立する。但し、ここで $\varepsilon(\varphi) = \exp(\pi\sqrt{-1}\varphi)$ とし $t \neq 0$ 。

なる 2 条件を満たす $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{U}$ 上の超函数 (又は, microfunction) $\vartheta(x|t)$ を テータ函数 と呼ぶ。

ここで条件 (1) により, 方程式系 (6) は閉じていることに注意。以下条件 (7) を 擬周期性 の条件と呼ぶ。

さて, 佐藤先生の主要な論点の一つは, 次の定理 (上述論文 p. 290) であった。

THEOREM. - If $\theta(x|t)$ is a theta function associated to the Jacobi structure then the 'zero-value' $\theta(0|t)$ is a Jacobi function. Conversely, any Jacobi function $f(t)$ on W determines uniquely a theta function $\theta(x|t)$ with the property $\theta(0|t) = f(t)$ uniquely.

なお, この定理に言うテータ函数とヤコビ函数を具体的に書き下せば

$$(8) \quad \vartheta(x|t) = \exp\left(\sum_j x_j P_j\right) f(t)$$

であり, ε , $c(\nu)$ と c_j の間には,

$$(9) \quad c(\nu) = \varepsilon(\langle E\nu, \nu \rangle) \prod_{j=1}^{2n} c_j^{\nu_j}$$

なる関係があることは, 直接計算により容易に確かめ得る。

さて, 上の意味でのテータ函数の例として最も基本的なものは, リーマンのテータ函数 $\Theta(z|t)$ を用いて与えられるであろう, と期待される。(以下通常の記号と合わせる為に t

τ と記す。ここで τ は $m \times n$ 実対称行列^(*), $\oplus(\mathbb{Z}|\tau)$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \varepsilon(2\langle \nu, \tau \rangle + \langle \tau \nu, \nu \rangle) \text{ とする。}$$

以下では, レルチの η - τ 函数の考察と関係して, $\oplus$ を少し変形した

$$(10) \quad \eta(x, y|\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon(\langle x, \tau x + y \rangle) \oplus(\tau x + y|\tau)$$

を考えることとする。又,

$$(11) \quad \eta_l(x, y|\tau) = \left(\frac{\partial}{\partial y_l} + \pi \sqrt{-1} x_l \right) \eta \quad (l=1, \dots, n)$$

と定める。(別に楕円 η - τ 函数の記号と関係がある訳

ではない。) 以下 $\vec{\eta} = (\eta, \eta_1, \dots, \eta_n)$ と記すこととする。

ここで, $m=1$ の時は, $\vec{\eta}$ は既述の意味で η - τ 函数となり, その零値の保型性 (所謂ヤコビの虚変換) が

(5) なる無限階の方程式系に翻訳されることを確かめる。

(上述の論文では触れられていないが, これが佐藤先生の最も重要な論点であったと私には思われる。) 併作, $n > 1$ の時, 上の定式化を余りに文字通りに解釈すると, $\vec{\eta}$ は, 一見, η - τ 函数とはならないことになってしまう。勿論, 佐藤先生は, この例については十分御計算になられたはずで, 多分, 超局所化した陳述においては, それは重要な論点ではない, と御判断になられた物と思われる。ここでは, その

(*) 以下 η etc. は $\text{Im } \tau \gg 0$ 方向からの境界値を取って考える超函数と考える。

間の事情について，一，二の計算を示して議論を行いた
い。

$n > 1$ の場合を論じるに先立ち， $n=1$ の時の結果と復習
しておこう。この時，

$$(12) \begin{cases} (\frac{\partial}{\partial x_1} - \pi\sqrt{-1}y_1)\vec{J} = P_1\vec{J} \\ (\frac{\partial}{\partial y_1} + \pi\sqrt{-1}x_1)\vec{J} = Q_1\vec{J} \end{cases}$$

$$(13) \begin{aligned} \vec{J}(x+\mu, y+\nu | \tau) \\ = \varepsilon(\langle \mu, \nu \rangle) \varepsilon(\langle x, \nu \rangle - \langle y, \mu \rangle) \vec{J}(x, y | \tau) \\ (\mu, \nu \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

但し

$$\begin{cases} P_1 = \begin{pmatrix} & \tau \\ 2\pi\sqrt{-1}(1+2\tau\frac{\partial}{\partial\tau}) & \end{pmatrix} \\ Q_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 4\pi\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial\tau} & \end{pmatrix} \end{cases},$$

が成り立ち，所要の条件がすべて満たされることは直ちに
確かめ得る。特に $[P_1, Q_1] = -2\pi\sqrt{-1}$ に注意。

同様に， $n \geq 2$ の時も，(12)に類似した次の方
程式系(14)は容易に見出だし得る：

$$(14) \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x_\ell} - \pi \sqrt{-1} y_\ell \right) \vec{f} = P_\ell \vec{f} & (1 \leq \ell \leq n) \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_\ell} + \pi \sqrt{-1} x_\ell \right) \vec{f} = Q_\ell \vec{f} & (1 \leq \ell \leq n) \end{cases}$$

但し

$$P_\ell = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{\ell 1} & \cdots & \tau_{\ell n} \\ 2\pi\sqrt{-1}(\delta_{\ell 1} + 2T_{\ell 1}) & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 2\pi\sqrt{-1}(\delta_{\ell n} + 2T_{\ell n}) & & & \end{pmatrix}$$

$$(ここで T_{jg} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \frac{\tau_{pj}}{(2 - \delta_{jg})} \frac{\partial}{\partial \tau_{jg}})$$

$$Q_\ell = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\ell 1} & \cdots & \delta_{\ell n} \\ \frac{4\pi\sqrt{-1}}{2 - \delta_{\ell 1}} \frac{\partial}{\partial \tau_{\ell 1}} & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \frac{4\pi\sqrt{-1}}{2 - \delta_{\ell n}} \frac{\partial}{\partial \tau_{\ell n}} & & & \end{pmatrix}.$$

以下擬周期性に関して問題は無いので，方程式系についてのみ論じることとする。

このようにして，一見 (12) とよく似た式が得られるけれども，上に得られた $(P_\ell, Q_\ell)_{1 \leq \ell \leq n}$ はヤコビ構造

を与えない。以下、しばらく、簡単の爲 $n=2$ としよう。この時、例えば、

$$(15) [P_1, P_2] = 2\pi\sqrt{-1} (\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}) R_0, \text{ etc.}$$

但し、

$$(16) R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{12} & -2\partial_{11} \\ 2\partial_{22} & -\partial_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

(ここで $\partial_{jk} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau_{jk}}$.)

従って条件(1)は満たされる、また、(14)はまた"関連した方程式系"になっている。

ただ、この場合、

$$(17) \begin{cases} [P_j, P_k] = f_{jk} R_0, & [Q_j, Q_k] = g_{jk} R_0 \\ [P_j, Q_k] = -2\pi\sqrt{-1} \delta_{jk} + h_{jk} R_0 \end{cases}$$

$$\text{但し、} \begin{cases} f_{12} = 2\pi\sqrt{-1} (\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}) \\ g_{12} = -2\pi\sqrt{-1} \\ h_{11} = 2\pi\sqrt{-1} \tau_{12} \\ h_{12} = -2\pi\sqrt{-1} \tau_{11} \\ h_{21} = 2\pi\sqrt{-1} \tau_{22} \\ h_{22} = -2\pi\sqrt{-1} \tau_{12} \end{cases}$$

と言う特別な形の交換関係が成り立っているから方程式系(14)に、 $R_0 \nabla = 0$ なる方程式を附加すれば、元素の定式化

と少し異なるが、求むる方程式系が得られるかと思われる。併作、
 実は、計算してみると、これでもまだ方程式系は閉じる。

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = [Q_1, R_0] = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{12} & -2\partial_{11} \\ 0 & & 0 \\ -2\pi\sqrt{1}\Delta & & 0 \end{pmatrix} \\ R_2 = [Q_2, R_0] = \begin{pmatrix} 0 & 2\partial_{22} & -\partial_{12} \\ 2\pi\sqrt{1}\Delta & & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$(\text{但し } \Delta = 4\partial_{11}\partial_{22} - \partial_{12}^2)$$

も合わせて考える必要があることが判る。即ち、

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} - \pi\sqrt{1}y_l\right)\vec{\psi} = P_l\vec{\psi} & (l=1,2) \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_l} + \pi\sqrt{1}x_l\right)\vec{\psi} = Q_l\vec{\psi} & (l=1,2) \\ R_j\vec{\psi} = 0 & (j=0) \end{array} \right.$$

を考えると、始めて閉じた方程式系が得られる。言い換えれば、

(14)と云う方程式系を補助条件

$$(20) \quad R_j\vec{\psi} = 0 \quad (j=0, 1, 2)$$

を満たす部分空間 $\mathcal{S}$ 上で考えるのが適当であることが判る。更に、この場合、交換関係の特殊性、即ち、 $[R_j, P_k]$, $[R_j, Q_l]$ がいづれも再び R_l の線型結合で書けると云う事実により、 $\exp P_k$, $\exp Q_l$ はいづれも $\mathcal{S}$ に制限して考える

ことが出来、しかもそのように考えれば、それ等はいずれも互いに可換である。従ってすべてを $\mathcal{S}$ 上に制限して考えることにより、テータ函数とヤコビ函数の対応を示すことが出来る。他方 R_j の形より、超局所的には、 $\mathcal{S}$ は δ 次元の低い接触多様体上の層と（少くとも一般の点では）考え、差障りは無いと考えられる。このような了解の下に、結局、 $\mathcal{S}$ は佐藤先生の意味でのテータ函数であると言いつつ構わない。

次に、超局所的観点をより強調することにより、上述の議論がより見易くなることを示そう。

実際、超局所的には、一般の点では、 $\sqrt{4\pi\sqrt{-1}} \partial_{jj}$ は well-defined であるから、(14), (20) の代わりに、

$$(21) \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{\partial}{\partial x_\ell} - \pi\sqrt{-1} y_\ell \right) \mathcal{S} = \sum_k \tau_{\ell k} \sqrt{4\pi\sqrt{-1}} \partial_{k\ell} & (a) \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_\ell} + \pi\sqrt{-1} x_\ell \right) \mathcal{S} = \sqrt{4\pi\sqrt{-1}} \partial_{\ell\ell} & (b) \\ \partial_{jk} \mathcal{S} = 2\sqrt{\partial_{jj}} \sqrt{\partial_{kk}} \mathcal{S} \quad (j \neq k) & (c) \end{array} \right.$$

を考えれば、(21)(a), (b) の右辺に現れた作用素が条件(1)を満たす（この場合は補助条件(c)を考えに入れないで）ことは容易に確かめることが出来る。このように

分数階の作用素の導入は議論を見通し良くすることにより有用であると思われる。例えば今扱った $\mathcal{J}(x, y | \tau)$ の場合, $\tau \in GL(n)/O(n)$ と考えれば、むしろ τ なく $g \in GL(n)$ をパラメータに用いて議論した方が、(概平均ベクトル空間の変形、という観点から)他の例を考察する際の Vorbild としては、より適切であると考えられるけれども、微分方程式として所要の方程式を書き下そうとするとかなり面倒な式になるようである。併作、より一般に、

$$(22) \quad \mathcal{J}(x, y | g) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon(\langle x, y \rangle) \sum_{v \in \mathbb{Z}^n} \varepsilon(2\langle v, y \rangle) f_0(x+v | g)$$

$$\text{但し} \quad \begin{cases} f_0(x | g) = \varepsilon(P(gx)) \\ P(y) = \sum_{j=1}^n y_j^{m_j} \quad (m_j \text{ は } 2 \text{ 以上の自然数}) \end{cases}$$

(加減束縛すれば) 満たす方程式系 (23) を、分数階の作用素と用いれば、比較的簡明に書き下すことができる:

$$\text{以下} \quad (h_{jk}) = (g_{jk})^{-1}$$

$$D_j = \left(\sum_{k=1}^n g_{jk} \frac{\partial}{\partial g_{jk}} \right) / \pi \sqrt{-1} m_j$$

$$P_\ell = 2\pi \sqrt{-1} \left(\sum_k h_{\ell k} D_k^{1/m_k} \right)$$

$$Q_\ell: \sum_k m_k \left(\sum_p g_{kp} x_p \right)^{m_k-1} g_{k\ell} =$$

$$= \sum_{\alpha} g_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{とて,}$$

(次元に続く)

$$\sum_{\alpha} g_{\alpha} \left(\frac{P_n}{2\pi\sqrt{-1}} \right)^{\alpha_n} \cdots \left(\frac{P_1}{2\pi\sqrt{-1}} \right)^{\alpha_1}$$

$$\begin{aligned} R_{jk} : \quad \pi\sqrt{-1} m_j \left(\sum_p g_{jp} x_p \right)^{m_j-1} x_k &= \\ &= \sum_{\alpha} r_{jl, \alpha} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \text{etc} \end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha} r_{jl, \alpha} \left(\frac{P_n}{2\pi\sqrt{-1}} \right)^{\alpha_n} \cdots \left(\frac{P_1}{2\pi\sqrt{-1}} \right)^{\alpha_1}$$

と記すこととする。この時、

$$(23) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} - \pi\sqrt{-1} y_l \right) \tilde{\mathcal{F}} = P_l \tilde{\mathcal{F}} & (l=1, \dots, n) \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_l} + \pi\sqrt{-1} x_l \right) \tilde{\mathcal{F}} = Q_l \tilde{\mathcal{F}} & (l=1, \dots, n) \\ \frac{\partial}{\partial g_{jk}} \tilde{\mathcal{F}} = R_{jk} \tilde{\mathcal{F}} & (1 \leq j, k \leq n) \end{cases}$$

尚、(23)の最後の補助条件は、超局所的には、 $\varphi(x/g) = \varphi(gx)$ の形の函数に対して一般的に成立する

$$(24) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial g_{ik}} & \frac{\partial}{\partial g_{il}} \\ \frac{\partial}{\partial g_{jk}} & \frac{\partial}{\partial g_{jl}} \end{vmatrix} \varphi = 0 \quad (1 \leq i, j, k, l)$$

なる関係式と同等と思うがチェックはしてない。

因みに、(24)は問題を超局所的に考えるならば、 g -変数については、 $(2n-1)$ 次元の接触多様体上に話を限ることができることを示している。(rank $C = 1 \Rightarrow \exists a, b \neq 0$

s.t. $C = a^t b$ (a, b は縦ベクトル), に注意せよ。

以上, 分数階の作用素を導入することにより, 議論が見易くなることを注意したか, このような問題の捉え方の欠点についても一言した方がよいであろう。

一つの明らかな欠点は, 分数階の作用素を導入する為
にいくつかの除外点が生れることである。又, 未知函数を一つ
にした為 (行列を用いれば分離できた) δ 函数に関連した項
を, テータ函数が拾い込んでしまうことであろう。即ち, ここで
謂うテータ函数が, 通常のテータ函数 ($\eta \rightarrow 0$ の極限
値) に限られない点であろう。尤も, この点は, その方が面白
い, と云う見方も出来よう。例えば, $m=1$ の時,

$$(25) \quad \eta(x, y | \tau) = \varepsilon(-\langle x, y \rangle) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \varepsilon(2\langle \nu, x \rangle) g_0(y - \nu | \tau)$$

$$\text{但し } g_0(y | \tau) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^{2m} (4\pi\sqrt{\tau} \vartheta_0 \tau)^m}{(2m)!} \right) (\tau_+^{-1/2}) \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\sqrt{\pi} y)^{2m+1} \varepsilon(m+1/2)}{(2m+1)!} \sqrt{\pi} \delta^{(m)}(\tau)$$

等と云う函数も (収束性を厳密にチェックしては無いが) 本稿の意味でのテータ函数である。(g_0 の定義式の第一項は通常のテータ函数にその counterpart を見出すが, 第二項はそうではない。複素領域では, 即ち定義函数に移ると, コホモロガス 0 の項が全に残る為である。)