

Random Field の確率論的定義

津田塾大 小野山 卓 爾

§ 1. 準 備

1. Differentiable manifold $M^m \longleftrightarrow$ (1) Locally compact Hausdorff space. 次元 m . (2) C^∞ structure. 即ち $\forall a \in M^m$, $U(a)$ は a の近傍。
 $\forall p \in U(a)$ に対して $U(a)$ の 2 点を分離する m 個の実数値連続函数の組

$$(u_1^a(p), \dots, u_m^a(p))$$

が存在する (局所座標)。 $\forall p \in U(a) \cap U(b)$ に対し $U(a)$, $U(b)$ での局所座標をそれぞれ

$$(u_1^a(p), \dots, u_m^a(p)), (u_1^b(p), \dots, u_m^b(p))$$

とすると

$$u_i^b(p) = F_i(u_1^a(p), \dots, u_m^a(p)), \quad i = 1, \dots, m.$$

但し F_i は C^∞ function となっている。

2. C^∞ 写像 $f \longleftrightarrow$ (1) f は M^m から M^n への写像。 (2) $\forall a \in M^m$ に対し f は a で連続。即ち $U(a) \cap U \ni p$ となるある U があって $f(U) \subset V(f(a))$ 。ここで $V(f(a))$ は M^n の $f(a)$ 近傍。又, $f(p)$ の局所座標が

$$(v_1(f(p)), \dots, v_n(f(p)))$$

の時, 各 $v_i(f(p))$ は $p = a$ で C^∞ 。

3. Tangent space T_a^m , $a \in M^m$. (1) $p = p(t)$, $(\alpha < t < \beta)$ は M^m の上のグラフで $p(0) = a$ とし, また $[\alpha, \beta] \rightarrow M^m$ の写像として C^∞ 写像とする。 $p(t)$ を C^∞ motion starting at a と呼びその全体を $\mathcal{M}_a$ とする。(2) 2つの motion の同値 $p(t) \sim q(t)$ とは

$$p(0) = q(0) = a$$

$$\left. \frac{d}{dt} u_i^a(p(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} u_i^a(q(t)) \right|_{t=0}, \quad i = 1, \dots, m$$

を意味する。つまり $\sim$ は 2 次の微小量を除いての一致を意味する。(3) $\mathcal{M}_a$ を同値関係 $\sim$ で割る。

$T_a^m \equiv \mathcal{M}_a / \sim$. T_a^m は a における M^m の tangent space. これは m 次元ベクトル空間である。

(4) $p(t)$ に同値な motion 全体の表わす T_a^m の点を $\{p(t)\}$ と記す。

4. Tangent space の座標。(1) $p_i(t)$ を

$$p_i(t) \equiv (\underbrace{0, \dots, 0}_i, t, 0, \dots, 0)$$

で定める。

$$p(t) \sim \sum_{i=1}^m \frac{d}{dt} u_i^a(p(t)) \Big|_{t=0} p_i(t)$$

であるから, $\{p_i(t)\} \equiv e_i(a)$, $i = 1, \dots, m$ なる基底により T_a^m に座標を導入することができて,

$$\{p(t)\} = \sum_{i=1}^m \frac{d}{dt} u_i^a(p(t)) \Big|_{t=0} e_i(a).$$

(2) M^m から M^n への C^∞ 写像 S , $Sa = b$, により T_a^m から T_b^n への写像 ∂S :

$$\partial S \{p(t)\} = \{Sp(t)\}$$

を定義する。(3) M^n の b での局所座標を v_j^b とし, T_b^n での基底を $e_j(b)$, $j = 1, \dots, n$, と記す。

$$\{p(t)\} \equiv x = \sum x_i e_i(a),$$

$$\{q(t)\} \equiv \{Sp(t)\} \equiv y = \sum y_j e_j(b)$$

とおけば,

$$v_j^b(Sp) = F_j(u_1^a(p), \dots, u_m^a(p)), \quad j=1, \dots, n$$

であるから写像 ∂S が次で直接定義される:

$$y_j = \sum \partial F_j / \partial u_i^a|_{p=a} x_i.$$

(4) 特に M^m が Riemannian manifold (T_a^m が内積をもった空間) とすれば $(e_i^a(a),$

$e_j^b(a) \equiv g_{ij}$ は C^∞ 函数となり, リーマン計量を与える。

§ 2. 定 義

1. Random vector field $x(P, \omega) \longleftrightarrow$ 上で定義した $x(P)$, $P \in M^n$ が random element ω に依存するとき $\longleftrightarrow x(P, \omega)$ は確率空間 $(\Omega, \underline{B}, P)$ と Riemannian manifold M^n の積 $M^n \times \Omega$ 上に定義された T^n valued random variable.

2. Temporal homogeneity (強定常性) $\longleftrightarrow x(P, \omega)$ と $\partial Sx(S^{-1}P, \omega)$ が同じ確率法則に従うこと。

3. 特別な場合 (強定常)。(1) $M^n = R^n$ (n 次元ユークリッド空間)。 S は $h(h_1, \dots, h_n)$ shift $T_h \cdot P = (u_1, \dots, u_n)$ なら

$$(T_h P)_i \equiv u_i(T_h P) = u_i(P) + h_i, \quad i=1, \dots, n.$$

$x(P, \omega)$ を

$$x(P, \omega) = \sum_i x_i(P, \omega) e_i(P)$$

とすれば

$$\begin{aligned}
& \partial T_h x(T_h^{-1}P, \omega) \\
&= \partial T_h \sum_i x_i((u_1 - h_1, \dots, u_n - h_n), \omega) e_i(T_h^{-1}P) \\
&= \sum_i x_i((u_1 - h_1, \dots, u_n - h_n), \omega) \partial T_h e_i(T_h^{-1}P) \\
&= \sum_i x_i(T_h^{-1}P, \omega) e_i(P) .
\end{aligned}$$

そこで強定常性は $x_i(T_h^{-1}P, \omega)$ と $x_i(P, \omega)$ が同じ確率法則に従うことを意味する。(2)

$M^n = R^n$, S が原点のまわりの回転 S_g の場合, $Q = S_g(P)$ とすれば直交行列 $\{g_{ij}\}$ により

$$u_i(Q) = \sum_j g_{ij} u_j(P)$$

と書ける。そこで

$$\begin{aligned}
\partial S_g x(S_g^{-1}P, \omega) &= \partial S_g \sum_i x_i(Q, \omega) e_i(Q) \\
&= \sum_i x_i(S_g^{-1}P, \omega) \sum_j g_{ij} e_j(P) .
\end{aligned}$$

従って定常性は, $\sum_i x_i(Q, \omega) g_{ij}$ と $x_j(P, \omega)$ とが同法則ということになる。

4. 弱定常性 $M^n = R^n$ とし, C_u は $R^n \rightarrow T_u$ で

$$C_u a = \{u + at\}, a \in R^n$$

とする。また τ は translation, σ は rotation とし,

$$\partial \tau : T_u \rightarrow T_{\tau u},$$

$$\partial \sigma : T_u \rightarrow T_{\sigma u}$$

とおく。量

$$R_x(u, v, a, b) \equiv E[(C_u^{-1}x(u, \omega), a)(C_v^{-1}x(v, \omega), b)]$$

に関して

$$R_x(u, v, a, b) = R_x(u-v, a, b)$$

が成り立つ時, x を弱定常と呼べば, R_x に対する標準スペクトル表現ができる。