

氏 名	あか ほ 穂 ま な ぶ 赤 穂 ま な ぶ
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2262 号
学位授与の日付	平 成 12 年 9 月 25 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	An Intersection Theory of Lagrangian Immersions (ラグランジアンはめ込みの交差理論)

論文調査委員 (主 査)
教 授 深 谷 賢 治 教 授 河 野 明 教 授 井 川 満

論 文 内 容 の 要 旨

学位申請者赤穂まなぶの論文「An Intersection Theory of Lagrangian Immersions」はシンプレクティック多様体のラグランジュ部分多様体の交点の数の評価に関わるものである。

ラグランジュ部分多様体の交点の数の評価の問題はハミルトン力学系の周期軌道の数の評価に関わる問題の一般化と考えられている。これら一連の問題はアーノルド予想と呼ばれ、その解決はシンプレクティック幾何学の基本問題の一つとして多くの人によって研究されてきた問題である。

たとえば, A. Floer は次のことを証明していた。

(M, ω) をコンパクトシンプレクティック多様体, L をそのラグランジュ部分多様体, $\varphi: M \rightarrow M$ をハミルトン微分同相写像とし, L と $\varphi(L)$ は横断的と仮定する。さらに $\pi_2(M, L) = 0$ とする。このとき, $L \cap \varphi(L)$ の元の個数は L の Z_2 ベッチ数の和より大きい。

この Floer の定理の証明は無限次元モース理論に基づく画期的なものであった。

Floer の定理の仮定を弱める試みは多くの人によってなされ, 重要な問題であると広く認められている。

主論文「An Intersection Theory of Lagrangian Immersions」ではより一般的な状況である, 特異点を許すようなラグランジュ部分多様体の場合に, Floer の定理を拡張することを試みたものである。

主論文で扱われている場合は, ラグランジュ部分多様体 L が, なめらかな微分多様体 $\tilde{L}$ からのはめ込み $\psi: \tilde{L} \rightarrow M$ の像である場合である。一般には, $L = \psi(\tilde{L})$ は自己交叉を持ち従って L はなめらかな部分多様体ではない。

赤穂は次の定理を証明した。

定理: (M, ω) を $2n$ 次元コンパクトシンプレクティック多様体, $\tilde{L}$ を n 次元閉多様体, $\psi: \tilde{L} \rightarrow M$ を $\psi^*\omega = 0$ を満たすはめ込みとする。 $L = \psi(\tilde{L})$ とおく。 $\varphi: M \rightarrow M$ をハミルトン微分同相写像とし, L と $\varphi(L)$ は横断的と仮定する。さらに $\pi_2(M, L)$ の元でシンプレクティック型式を積分したものは 0 であるとする。このとき,

$L \cap \varphi(L)$ の元の個数 $\geq \tilde{L}$ の Z_2 ベッチ数の和 $+ 2 \times$ 自己交叉の数

この定理は前記 Floer の定理の特異点を持つラグランジュ部分多様体への拡張としては最初に研究すべき場合に対して, 明確に肯定的な回答を与えたもので, 大変重要なものである。

定理の証明は, 無限次元のモース理論に関わる Floer の定理の一般化に基づいている。すなわち, L と $\varphi(L)$ の和集合上に境界値を持つ概正則円盤のモジュライ空間を用いて Floer ホモロジー $HF(L, \varphi(L))$ を定義し,

$HF(L, \varphi(L))$ のランク $\leq L \cap \varphi(L)$ の元の個数

$HF(L, \varphi(L))$ のランク $\geq \tilde{L}$ の Z_2 ベッチ数の和 $+ 2$ 自己交叉の数。

を証明することでなされる。

これを実行するには, まず第一に Floer ホモロジー $HF(L, \varphi(L))$ を定義し, それがハミルトン変形で不変なことを証

明し、さらにそれを計算するという3つのステップが必要である。

L の特異点(自己交叉が起っている点)の存在から、いずれのステップも従来のFloerの議論をそのまま一般化できるわけではない。

Floerの議論そのものも、概正則曲線や非線形楕円が田方程式などに関わる高度な解析的議論にもとづいており、それを特異点のある状況に拡張するには、種々の困難を解決する必要がある。

論文審査の結果の要旨

学位申請者赤穂まなぶは、シンプレクティック幾何学・ゲージ理論などの、非線形方程式を用いて幾何学を研究する分野において、様々な優れた研究を行ってきた。

非線形方程式を用いてモジュライ空間を構成し、その性質を方程式が定義される空間の幾何学的な性質の研究に役立てる、というのは、近年多くの研究者によって研究されている重要な研究分野である。

そのような分野の代表的なものが、ゲージ理論(ベクトル束の接続に対する方程式の解のモジュライの研究)と概正則曲線をもちいたシンプレクティック幾何学の研究である。学位申請者はその双方において、優れた貢献をしている。

すでに修士論文において、ゲージ理論の一種であるサイバーグ・ウィッテンのモノポール方程式についての深い理解に基づき、結び目やからみめにそれを応用するという重要な研究をしている。これはすでにその方面の重要な専門雑誌、Knot theory and its ramification に掲載されている。

さらにその後の研究では、概正則曲線の理論のラグランジュ部分多様体への応用を研究し、重要な成果を上げている。

今回提出された博士申請論文では、ラグランジュ部分多様体の交わりの研究という、シンプレクティック幾何学の研究で古くから中心的な問題の一つに対して、新たな結果を得た。

すなわち、従来考察されていたなめらかなラグランジュ部分多様体とは限らないラグランジュ部分「多様体」の最初に考えるべき例である、はめ込まれたラグランジュ部分多様体 L に対して、 L とそのハミルトン変形 $\varphi(L)$ との交点の数を、 $\pi_2(M, L)$ 上シンプレクティック形式の積分が0という条件の下で、評価する不等式を証明した。

これは、この方面で画期的な業績であった、A. Floerの結果を一般化するものである。

このような定理を証明するには、概正則曲線の理論を組み立てていく上でのさまざまな困難な点と、それがどのような場合にどのように解決されていくか、を深く理解する必要がある、その上で、今まで考察されてこなかった場合すなわちはめ込まれたラグランジュ部分多様体が境界条件を与えている場合、に、概正則曲線の理論の基本的な部分のどこに新たな困難が生じ、どこが、どのような条件のしたで成立するか、どこで成立しない可能性があるかを、精密かつ的確に把握する必要がある。

従来はめ込まれたラグランジュ部分多様体を境界条件にした概正則曲線があまり考察されてこなかったのは、それを阻む困難があったからであり、申請者の論文は、 $\pi_2(M, L)$ 上シンプレクティック形式の積分が0という条件下ではそのような困難を回避できる、という、概正則曲線の理論全般に関する深い理解に基づく、発見によるものである。

このような優れた論文であるので、権威ある研究雑誌に掲載されることは確定的である。

このように、主論文は、シンプレクティック幾何学の中心に位置する重要な問題に対して、新しい知見を与える卓越した業績であり、国際的にも高く評価されるべきものである。従って、申請者は大学院在学5年未満であるが、例外的に博士(理学)の学位を授与するのに十分であると判断した。