

地盤—構造物系の総合振動特性の表現について

小堀 鐸二・南井良一郎・鈴木 有

GENERAL REPRESENTATIONS FOR THE VIBRATIONAL CHARACTERISTICS OF A COUPLED GROUND-STRUCTURE SYSTEM

By *Takuji KOBORI, Ryoichiro MINAI and Tamotsu SUZUKI*

Synopsis

The vibrational characteristics of a coupled ground-structure system are investigated which consists of a super-structure, a rigid rectangular foundation and a linear-viscoelastic, horizontally multi-layered medium subjected to plane harmonic waves incident obliquely to its lowest foundation medium. Under some restrictions derived from the treatment of the soil-structure interface, the general expressions of the vibrational characteristics are obtained as a combination of the wave-transfer characteristics representing the amplification effect of the multi-layered medium and the Dynamical Ground Compliance representing the interaction effect between the rigid foundation and its surrounding soil medium.

1. ま え が き

地震工学ないし耐震工学の分野において、構造物の耐震安全性を論ずるのに地盤の影響を無視しえないことはいまや常識化しつつあるが、構造物自体に関する研究に比べると、この分野には未開拓の部分がまだまだ多い。立地地盤の巨視的な把握も地盤を構成する媒質の本質的な構造解明も十分でなく、基本的にはどのような思想のもとに構造物の耐震安全性に及ぼす立地地盤の影響を明らかにすればよいかについて、普遍的な捉え方——理論や解析方法が確立しているとはいえない現状にある。このような状況のなかにあつて、地震動の作用を受ける地盤上の構造物の振動現象を下記の3つの構成要因に分離して解析しようとする立場は、現段階では一つの有力な考え方であろう。所謂波動論的 approach からこの構成要因を説明すれば次のようになる。

第一は“地震基盤”と呼ばれる地層の存在とここでの“基盤地震動”の想定である。個々の構造物に作用する地震動は地表層付近の各々の立地地盤の局所的な性質に大きく左右されるのに対して、この地震基盤層から入射する地震動はかなり広い面積にわたってほぼ一様な性質をもち、それは震源での性質と震源から基盤層に至る伝播経路によって定まるとする立場である。地震基盤の定義やその位置の定め方に関する研究¹⁾が行なわれ、また発震機構から基盤に至る伝達過程を追って、確率統計的な手法に基づいたあるいは実測強震記録に基づいた基盤地震動の性質に関する研究^{2) 3)}が行なわれている。しかし、地中での実測記録がほとんど得られていないだけに、地震基盤なるものを実際にどこに設定すればよいか、あるいは基盤地震動をどのように想定すればよいかについては極めて問題点が多い。第二は地表層付近の地層による地震動の増巾作用である。地震基盤から地表に至るまでの地盤の性質により定まり、本論ではこの部分の地盤を“波動媒体地盤”と呼ぶことにする。通常この増巾作用の性質は、構造物が存在せず地表が自由表面のときに基盤層から white な性状をもつ地動が入射したときの地盤の振動特性——“波動伝達特性”によって表現される。地震波動のなかで卓越し構造物への影響が大きいと考えられる SH の成分をもつ平面波が基盤層から鉛直に入

射する場合を扱った、所謂重複反射理論に基礎をおく研究^{4)~8)}が圧倒的に多い。第三は構造物と“基礎周辺地盤”との動的相互作用である。波動論ではこの作用をさらに上部構造物のみの振動特性と下部構造物とその周辺地盤の振動特性に分離し、連成系の運動方程式を介して両者を総合するという取扱いが一般に行なわれている。後者の振動特性は基礎周辺地盤の性質と下部構造物の性質とくに基礎部分の形状・寸法などによって定まる。基礎部分に根入れがなく地表面に剛体の基礎がのるという理想的な model に対して、質量のない基礎に加振力が作用するときの振動特性が、“displacement function”⁹⁾や“振動 admittance”¹⁰⁾あるいは“Dynamical Ground Compliance (D.G.C.)”^{11) 12)}と名付けられた、基礎変位と加振力の関係を規定する伝達関数で表現されている。本論ではこの作用を表わす伝達関数を代表的に“剛体基礎の D.G.C.”と呼ぶことにする。

地盤—構造物連成系の地震応答を正當に評価するためには、これら3つの構成要因が正しく解明され、それらの性質がすべて総合された形で解析されなければならない。ところで系の地震応答解析に入る前に、まずこのような連成系の振動特性を知る必要がある。地震基盤と基盤地震動の想定という第一の要因はここではいちおう別の問題として立入らないことにすると、基盤層から入射する地震波動に対して、地震基盤から波動媒体地盤と基礎周辺地盤を経て構造物に至る一連の連成系としての振動特性を求めなければならない。本論ではこれを“地盤—構造物系の総合振動特性”と定義する。いま増巾作用と相互作用という残る2つの構成要因を分離し、それぞれ個別に振動特性の表現を求め、しかるのち両者を組合わせて総合振動特性が表現できるとすれば、問題の扱いも単純化され、かつ2つの要因に関するこれまでの個々の研究成果がほとんどそのままの形で活用できるという長所が生まれる。

本研究は、地震基盤からの入射地震動に対する波動媒体地盤—基礎周辺地盤—構造物という連成系の総合振動特性の表現を導く目的をもつものであるが、波動伝達特性と剛体基礎の D.G.C. に関する筆者等の既往の研究^{7) 8) 11) 12)}に基礎をおき、これらの結果を前述のようなねらいのもとに総括しようとしてなされたものである。水平な境界面をもつ多層線形粘弾性地盤を対象に、基盤層から P, SV または SH 平面波が一般に斜に入射するとき、このような総合系の振動特性が、波動媒体地盤の増巾作用を表わす波動伝達特性と基礎系とその周辺地盤との動的相互作用を表わす何らかの境界値問題の解とに分離しようとして、後者の解がどのような設定の問題に帰着するかをまず検討する。そして、とくにこの解が基礎系として剛体基礎を選んだ場合の剛体基礎の D.G.C. によって表わされ、総合振動特性がこれと波動伝達特性とを用いて分離して表現しようのはどのようなときかについて、その分離可能条件を明らかにし、同時に分離可能な場合に連成系の総合振動特性を導く手順とその一般的な表現を求めようとするものである。なお本論の扱う範囲は、増巾作用と動的相互作用に関するこれまでの解析理論を上述のようなねらいのもとに総合しようとする本手法の有効性と適用限界を明らかにするところであり、先に触れた境界値問題の解を導くことを目的とするものではない。

地盤—構造物系の総合振動特性を扱った既往の研究は、本研究の観点からみると2つの group に分類できるように思われる。第一は半無限弾性地盤の下方から P または SH 平面波が鉛直入射するときの総合振動特性を剛体基礎の D.G.C. を用いて求めようとする研究の系列^{14)~17)}である。この地盤 model では波動媒体地盤としての増巾作用が存在せず、地盤を伝わる平面波には深さ方向に位相差が生じるのみで、地盤内の同一水平面上にある各媒質は一樣な動きをする。したがって、この場合の結果をより正確に表現すれば、構造物に作用する地表面位置での一樣な入射地動が与えられたときの構造物系の振動特性が求められることになる。言換えると上部構造物系と基礎周辺地盤との動的相互作用の総合的表現に止まった段階ともいえる。第二の group は、2層地盤の基盤層から P または SH 平面波が鉛直入射する同種の問題を扱った研究の系列^{18) 19)}である。成層構造による波動の増巾作用がくみこまれるので、本論の観点からいえば、この系列においてはじめて総合振動特性としての意味をもつことになる。地表面における波動伝達特性と剛体基礎の D.G.C. の両者を総合する形で基盤層からの入射波に対する総合振動特性の表現が求められている。以上いずれも単純な地盤構造に対する平面波の鉛直入射の場合で、かつ剛体基礎の D.G.C. には所謂混合境界値

問題としての解ではなく基礎を分布圧力に置換えた近似解が多く用いられており、上述のように総合振動特性が2つの要素に分離でき両者を総合した形で表現可能かという厳密な検討はとくに行なわれてはいないようである。

本論の構成は次のとおりである。従来一般に扱われてきた波動伝達特性を求める問題は、水平な境界面をもつ弾性媒体からなる多層地盤で鉛直入射する平面波の場合にほとんど限られている。そこでまず第2章では、一般性を失わないという意味から2次元問題に簡略化し、線形粘弾性媒体からなる任意の層数の多層地盤において、地震基盤にあたる最下層から P, SV または SH 型の調和平面波が境界面に斜入射するとき、地盤内の任意点の波動伝達特性を求めた。多層地盤の表面波に関する固有値問題の解法として工夫された Thomson-Haskell 法²⁰⁾ に基礎をおき、ここでは基盤層の境界面における入射波が既知および同位置での応答が既知とした2つの場合について、解の表現を matrix 形式で定めた。また鉛直に入射するその特別な場合を、すでに得られている SH 平面波の1次元伝播の解と対比させた。第3章の前半では、多層粘弾性地盤の基盤層から調和平面波が一般に斜入射するとき、地表面上の構造物系に生じる振動を基礎底面と地表面が密着するとして扱った場合について、連成系の総合振動特性を解析するための基本的な考え方を述べ、総合振動特性の表現において波動伝達特性を分離するとき、残る部分がどのような境界値問題の解に帰着するかを検討した。また後半では、波動伝達特性と剛体基礎の D.G.C. の和として扱える分離可能条件を提示し、一般に斜入射のときにはこの条件にあてはまらないが近似的に成立する場合があること、鉛直入射のときには厳密な意味で分離できること、さらに基礎底面と地表面とが密着するという接触条件をゆゑめて、基礎を仮定された分布圧力に置換える境界条件を考える場合には、形式的分離が常に可能なことをそれぞれ示した。第4章では、前章までの解析結果をふまえ、入射地震動の性質と地盤と構造物を表わす系の特性値を知って連成系の総合振動特性を導く解析手順を示し、その一般的な表現を求めた。最後に上部構造物系として最も単純な剛体長方形基礎を例にとり、その総合振動特性の具体的な表現を波動入射の一般的な場合について求め、入射平面波の種類 (P, SV および SH 波) とその入射方向 (斜および鉛直入射) の各組合わせに対して、それらの解析的表現を個別に示した。

2. 平面波入射による多層粘弾性地盤の波動伝達特性

2.1 基礎方程式

直交座標系 $\{x_1, x_2, x_3\}$ に関する等質等方な線形粘弾性媒体の運動方程式は、time factor を $e^{i\omega t}$ とする変位 vector $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ に対して次式で与えられる。

$$[\lambda_v(i\omega) + \mu_v(i\omega)] \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + [\mu_v(i\omega) \nabla^2 + \rho \omega^2] \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

いま両辺に divergence $[\nabla \cdot]$ を作用させると

$$[\nabla^2 + h_v^2(\omega)] (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (2.2)$$

が、また rotation $[\nabla \times]$ を作用させると

$$[\nabla^2 + \kappa_v^2(\omega)] (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (2.3)$$

がそれぞれ得られる。ここに

$$\begin{cases} h_v(\omega) = \frac{\omega}{c_{dv}(i\omega)}, & c_{dv}(i\omega) = \left[\frac{\lambda_v(i\omega) + 2\mu_v(i\omega)}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}}, & \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{dilatation} \\ \kappa_v(\omega) = \frac{\omega}{c_{sv}(i\omega)}, & c_{sv}(i\omega) = \left[\frac{\mu_v(i\omega)}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}}, & \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \text{rotation} \end{cases} \quad (2.4)$$

また、 $\lambda_v(i\omega)$, $\mu_v(i\omega)$ は線形粘弾性を表わす Lamé の複素常数である。(2.1) 式を変形し変位 vector を dilatation と rotation によって表わすと

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{h_v^2(\omega)} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\kappa_v^2(\omega)} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (2.5)$$

一方、応力 tensor τ_{ij} は次式で表わされる。

$$\tau_{ij} = \lambda_v(i\omega)\delta_{ij}\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu_v(i\omega)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad [i, j=1, 2, 3] \quad (2.6)$$

ここに, δ_{ij} は Kronecker の delta である。

以下の解析においては, 1, 2, 3 軸をそれぞれ x, y, z 軸にとり, 慣例にしたがって各成分を次のように表現する。

$$\begin{cases} \{u_1, u_2, u_3\} = \{u, v, w\}, & \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\} \\ \{\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\} \\ \{\tau_{12} = \tau_{21}, \tau_{23} = \tau_{32}, \tau_{31} = \tau_{13}\} = \{\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}\} \end{cases} \quad (2.7)$$

2.2 P 波または SV 波斜入射の場合

2.2.1 基本解の誘導

媒体の各点の運動が xz 平面内にある P または SV 平面波が境界面に斜入射する場合を考える。媒体の運動はすべて xz 平面内に限られる 2 次元問題となるから

$$v = \omega_x = \omega_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.8)$$

したがって各成分は (2.4)~(2.6) 式より次のように表わされる。

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.9a)$$

$$u = -\frac{1}{h_v^2(\omega)} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial x} - \frac{2}{\kappa_v^2(\omega)} \cdot \frac{\partial \omega_y}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{h_v^2(\omega)} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{2}{\kappa_v^2(\omega)} \cdot \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \quad (2.9b)$$

$$\begin{cases} \sigma_z = \lambda_v(i\omega)\Delta + 2\mu_v(i\omega) \left[-\frac{1}{h_v^2(\omega)} \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa_v^2(\omega)} \cdot \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x \partial z} \right] \equiv \sigma \\ \tau_{xz} = 2\mu_v(i\omega) \left[-\frac{1}{h_v^2(\omega)} \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x \partial z} + \frac{1}{\kappa_v^2(\omega)} \left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2} \right) \right] \equiv \tau \end{cases} \quad (2.9c)$$

いま z 軸を鉛直下方にとり, 地層の境界面は xy 平面に平行とし, 全体として x 方向に伝播する平面波を考えると, 解 $\{\Delta, \omega_y\}$ の形は

$$\Delta = f(z) \exp\{i(\omega t - \zeta x)\}, \quad \omega_y = g(z) \exp\{i(\omega t - \zeta x)\} \quad (2.10)$$

のように仮定できる。ここに, $\zeta = \omega/c_p$ は wave number で, c_p は x 方向に伝わる平面波の位相速度である。これらを (2.2) および (2.3) 式にそれぞれ代入すると

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \{h_v^2(\omega) - \zeta^2\} \right] f(z) = 0, \quad \left[\frac{d^2}{dz^2} + \{\kappa_v^2(\omega) - \zeta^2\} \right] g(z) = 0 \quad (2.11)$$

が得られる。

ここで基礎方程式の無次元化を行なう。線形粘弾性体という仮定から, まず (2.1) 式中の Lamé の複素常数を

$$\begin{cases} \lambda_v(i\omega) + 2\mu_v(i\omega) = \{\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)\} + i\{\lambda'(\omega) + 2\mu'(\omega)\} = \{\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)\} \{g_d(\omega)\}^{-1} \\ \mu_v(i\omega) = \mu(\omega) + i\mu'(\omega) = \mu(\omega) \{g_s(\omega)\}^{-1} \end{cases} \quad (2.12)$$

ここに

$$\begin{cases} \{g_d(\omega)\}^{-1} = 1 + i \frac{\lambda'(\omega) + 2\mu'(\omega)}{\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)}, & \{g_s(\omega)\}^{-1} = 1 + i \frac{\mu'(\omega)}{\mu(\omega)} \\ \lambda(\omega), \mu(\omega), \lambda'(\omega), \mu'(\omega); \text{実数} \end{cases} \quad (2.13)$$

のように表わすと, (2.4) 式中の記号は下式のようになる。

$$\begin{cases} c_{dv}(i\omega) = c_d(\omega) \{g_d(\omega)\}^{-\frac{1}{2}}, & h_v(\omega) = h(\omega) \{g_d(\omega)\}^{\frac{1}{2}} \\ c_{sv}(i\omega) = c_s(\omega) \{g_s(\omega)\}^{-\frac{1}{2}}, & \kappa_v(\omega) = \kappa(\omega) \{g_s(\omega)\}^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.14)$$

ここに

$$c_d(\omega) = \left[\frac{\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad c_s(\omega) = \left[\frac{\mu(\omega)}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad h(\omega) = \frac{\omega}{c_d(\omega)}, \quad \kappa(\omega) = \frac{\omega}{c_s(\omega)} \quad (2.15)$$

次に、 x 方向に伝わる波動の wave number, 振動数, 時間および座標の各無次元量

$$\xi = \frac{\zeta}{\bar{\kappa}} = \frac{\bar{c}_s}{c_p}, \quad a_0 = \bar{\kappa} \bar{H} = \frac{\omega}{\bar{c}_s} \bar{H}, \quad T = \frac{\bar{c}_s}{\bar{H}} t, \quad X = \frac{x}{\bar{H}}, \quad Z = \frac{z}{\bar{H}} \quad (2.16)$$

と媒体の物理量に関する無次元量

$$\mu = \frac{\mu(\omega)}{\bar{\mu}}, \quad \kappa = \frac{\kappa(\omega)}{\bar{\kappa}} = \frac{\bar{c}_s}{c_s(\omega)}, \quad n = \frac{h(\omega)}{\kappa(\omega)} = \frac{c_s(\omega)}{c_d(\omega)} = \sqrt{\frac{1-2\nu(\omega)}{2\{1-\nu(\omega)\}}} \quad (2.17)$$

を導入する。ここに

$$\bar{c}_s = \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\bar{\rho}}}, \quad \bar{\kappa} = \frac{\omega}{\bar{c}_s}, \quad c_p = \frac{\omega}{\bar{\zeta}} \quad (2.18)$$

また、 $\bar{\mu}$, $\bar{\rho}$, $\bar{c}_s$, $\bar{\kappa}$ および $\bar{H}$ は複素剪断弾性係数の実部, 密度, S 波速度, (2.15) 式中の $\kappa(\omega)$ および層厚のそれぞれ基準量で, $\nu(\omega)$ は Lamé の複素常数の実部より定まる Poisson 比である。なお (2.16) 式中の ξ は平面波の x 方向の位相速度に対する S 波速度の基準量の比を表わしている。

以上の諸量を用いると, 基礎方程式 (2.10) および (2.11) 式は次のように無次元化される。

$$\Delta = f(Z) \exp\{ia_0(T - \xi X)\}, \quad \omega_y = g(Z) \exp\{ia_0(T - \xi X)\} \quad (2.19)$$

$$\left[\frac{d^2}{dZ^2} + a_0^2(h'^2 - \xi^2) \right] f(Z) = 0, \quad \left[\frac{d^2}{dZ^2} + a_0^2(\kappa'^2 - \xi^2) \right] g(Z) = 0 \quad (2.20)$$

ここに

$$h' = n\kappa\{g_d(a_0)\}^{\frac{1}{2}}, \quad \kappa' = \kappa\{g_s(a_0)\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

したがってその解は

$$\begin{cases} f(Z) = \Delta_I \exp(ia_0\alpha Z) + \Delta_R \exp(-ia_0\alpha Z) = (\Delta_I + \Delta_R) \cos(a_0\alpha Z) + i(\Delta_I - \Delta_R) \sin(a_0\alpha Z) \\ g(Z) = \omega_I \exp(ia_0\beta Z) + \omega_R \exp(-ia_0\beta Z) = (\omega_I + \omega_R) \cos(a_0\beta Z) + i(\omega_I - \omega_R) \sin(a_0\beta Z) \end{cases} \quad (2.22)$$

ここに

$$\alpha^2 = h'^2 - \xi^2, \quad \beta^2 = \kappa'^2 - \xi^2 \quad (2.23)$$

また, Δ_I , Δ_R , ω_I および ω_R は境界条件より定まる未定常数で, suffix の I と R はそれぞれ入射波 (上昇波) および反射波 (下降波) を表わす項を意味する。

変位・応力成分の表現 $\{u, w, \tau, \sigma\}$ より共通項 $\exp\{ia_0(T - \xi X)\}$ を除いたものを $\{\bar{u}, \bar{w}, \bar{\tau}, \bar{\sigma}\}$ で表わす。(2.19) および (2.22) 式を (2.9) 式に代入し結果を matrix で表示すると, 最終的には次式のような基本解の表現が求められる。

$$W = QB = G\bar{Q}B, \quad Q = G\bar{Q} \quad (2.24)$$

ここに

$$\begin{cases} W = \left\{ \frac{\bar{u}}{\bar{c}_s}, \frac{\bar{w}}{\bar{c}_s}, \frac{\bar{\tau}}{\bar{\mu}}, \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\mu}} \right\}^T, \quad B = \{\Delta_I + \Delta_R, \omega_I + \omega_R, \Delta_I - \Delta_R, \omega_I - \omega_R\}^T \\ \bar{u} = i\omega\bar{u}, \quad \bar{w} = i\omega\bar{w}, \quad \cdot = \partial/\partial t, \quad T; \text{転置 vector} \quad \text{を意味する} \end{cases} \quad (2.25)$$

また, G および $\bar{Q}$ は size 4×4 の matrix で, その element は APPENDIX に示されている。

2.2.2 波動伝達特性の誘導

水平な境界面をもつ $[N+1]$ 層からなり, 最下層を半無限体とする Fig. 1 のような多層地盤と層毎の局所座標系を想定する。以下においては, 各層の媒体の物理量にすべて層の番号を表わす suffix m をつけて表現するが, この suffix はしばしば省略されることがある。

第 m 層の媒体に関する基本解を (2.24) 式を参照して

$$W_m = Q_m B_m = G_m \bar{Q}_m B_m \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \quad (2.26)$$

で表わし、変位・応力 vector $\mathcal{W}$ に関する記号を Fig. 1 を参照して

$$\mathcal{W}_{m,m-1} = \mathcal{W}_m|_{z_m=0}, \quad \mathcal{W}_{m,m} = \mathcal{W}_m|_{z_m=d_m} \quad (2.27)$$

ここに

$$d_m = \frac{H_m}{H}, \quad H_m = \text{第 } m \text{ 層の層厚} \quad (2.28)$$

のように定める。左辺の vector で前の suffix は層を、後の suffix は境界面を示す。また suffix がひとつのときは層内の任意位置の vector であることを意味する。以下では vector $\mathcal{W}$ の element の表現もこの表示方式に従うことにする。(2.26) 式の関係を用いると

$$\begin{cases} \mathcal{W}_{m,m-1} = C_m B_m, & C_m = Q_m|_{z_m=0} = G_m \bar{C}_m, & \bar{C}_m = \bar{Q}_m|_{z_m=0} \\ \mathcal{W}_{m,m} = D_m B_m, & D_m = Q_m|_{z_m=d_m} = G_m \bar{D}_m, & \bar{D}_m = \bar{Q}_m|_{z_m=d_m} \end{cases} \quad (2.29)$$

上式より B_m を消去すると

$$\mathcal{W}_{m,m} = D_m C_m^{-1} \mathcal{W}_{m,m-1}, \quad C_m^{-1} = \bar{C}_m^{-1} G_m^{-1} \quad (2.30)$$

いま $(m-1)$ 境界面すなわち $Z_m=0$ において上下 2 層が完全に密着しているとすれば

$$\mathcal{W}_{m-1,m-1} = \mathcal{W}_{m,m-1} \quad (2.31)$$

なる関係が成立つから(2.30)式は

$$\mathcal{W}_{m,m} = E_m \mathcal{W}_{m-1,m-1} \quad (2.32)$$

ここに

$$E_m = D_m C_m^{-1} = G_m \bar{E}_m G_m^{-1}, \quad \bar{E}_m = \bar{D}_m \bar{C}_m^{-1} \quad (2.33)$$

(2.32) 式を各境界面においてくり返し適用すると

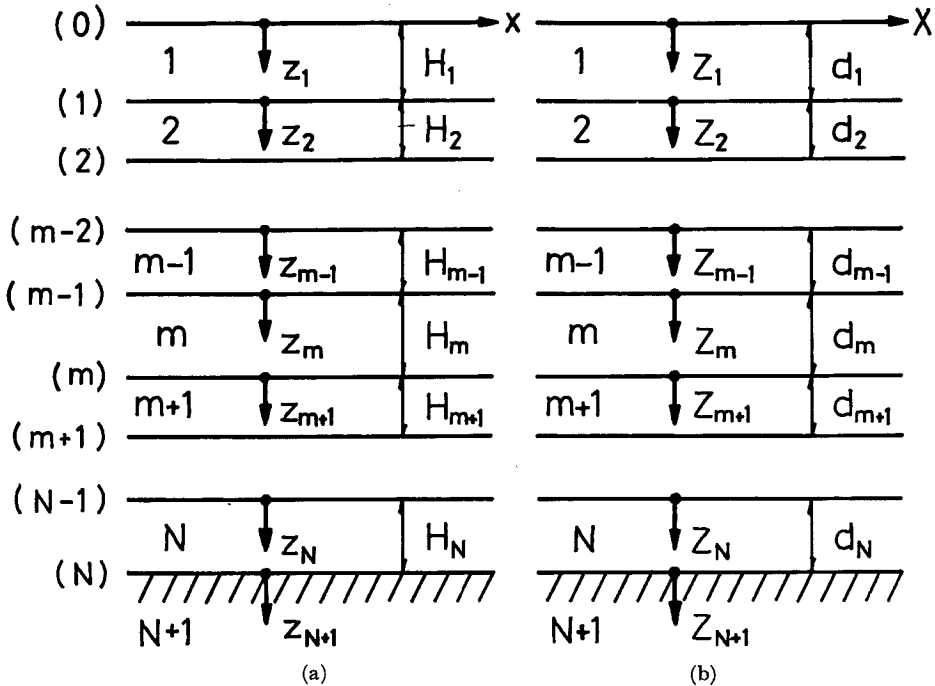


Fig. 1 Formulation of the horizontally multi-layered medium;
(a) expressed in the dimensional form; and
(b) expressed in the non-dimensional form.

$$\mathcal{W}_{N,N} = F_N \mathcal{W}_{1,0}, \quad F_N = E_N E_{N-1} \cdots E_1 \cdots \cdots (2.34)$$

最下層すなわち第 $[N+1]$ 層から P または SV の平面波が入射するという条件を導入するため、この層の未定常数 matrix B_{N+1} を求めておく。(2.29) 式を参照して

$$B_{N+1} = J_N \mathcal{W}_{1,0}, \quad J_N = C_{N+1}^{-1} F_N \cdots \cdots (2.35)$$

CASE A: 最下層の境界面すなわち第 (N) 境界面への入射波が既知の場合

いま入射波変位を

$$\begin{aligned} \text{P 波入射;} \quad \Phi_P &= A_P \exp\{ia_0(T - \xi X + \alpha_{N+1} Z_{N+1})\} \\ &= A_P \exp\{ia_0(T - h'_{N+1} \sin \theta_P \cdot X + h'_{N+1} \cos \theta_P \cdot Z_{N+1})\} \cdots \cdots (2.36a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SV 波入射;} \quad \Phi_{SV} &= A_{SV} \exp\{ia_0(T - \xi X + \beta_{N+1} Z_{N+1})\} \\ &= A_{SV} \exp\{ia_0(T - \kappa'_{N+1} \sin \theta_{SV} \cdot X + \kappa'_{N+1} \cos \theta_{SV} \cdot Z_{N+1})\} \cdots \cdots (2.36b) \end{aligned}$$

で表わす。ここに、 θ_P および θ_{SV} は入射 P 波および SV 波の入射角である。この入射波変位の成分は

$$\text{P 波入射;} \quad u_P = -\Phi_P \sin \theta_P, \quad w_P = \Phi_P \cos \theta_P \cdots \cdots (2.37a)$$

$$\text{SV 波入射;} \quad u_{SV} = \Phi_{SV} \cos \theta_{SV}, \quad w_{SV} = \Phi_{SV} \sin \theta_{SV} \cdots \cdots (2.37b)$$

であるから、入射波の dilatation および rotation は (2.9a) 式より

$$\text{P 波入射;} \quad \Delta_P = \frac{\partial u_P}{\partial x} + \frac{\partial w_P}{\partial z} = i h'_{N+1} \Phi_P \bar{k} \cdots \cdots (2.38a)$$

$$\text{SV 波入射;} \quad \omega_{SV} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{SV}}{\partial z} - \frac{\partial w_{SV}}{\partial x} \right) = i \frac{\kappa'_{N+1}}{2} \Phi_{SV} \bar{k} \cdots \cdots (2.38b)$$

このように入射波変位 Φ_P , Φ_{SV} が与えられれば、(2.19) および (2.22) 式を参照すると、(2.25) 式中の未定常数 $\{\Delta_I, \omega_I\}_{N+1}^T$ が次のように既知になる。

$$\text{P 波入射;} \quad \{\Delta_I, \omega_I\}_{N+1}^T = \left\{ i h'_{N+1} A_P \bar{k} = i a_0 h'_{N+1} \frac{A_P}{H}, 0 \right\}^T \cdots \cdots (2.39a)$$

$$\text{SV 波入射;} \quad \{\Delta_I, \omega_I\}_{N+1}^T = \left\{ 0, i \frac{\kappa'_{N+1}}{2} A_{SV} \bar{k} = i a_0 \frac{\kappa'_{N+1}}{2} \cdot \frac{A_{SV}}{H} \right\}^T \cdots \cdots (2.39b)$$

ここで (2.35) 式を次のように変形する。

$$\begin{bmatrix} B_{N+1}^{(I)} \\ B_{N+1}^{(R)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{I,N}^{(1)} & J_{I,N}^{(2)} \\ J_{I,N}^{(3)} & J_{I,N}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{1,0}^{(d)} \\ \mathcal{W}_{1,0}^{(s)} \end{bmatrix} \cdots \cdots (2.40)$$

ここに

$$\begin{cases} B_{N+1}^{(I)} = \{\Delta_I, \omega_I\}_{N+1}^T, \quad B_{N+1}^{(R)} = \{\Delta_R, \omega_R\}_{N+1}^T, \\ \mathcal{W}_{1,0}^{(d)} = \left\{ \frac{\tilde{u}}{\tilde{c}_s}, \frac{\tilde{w}}{\tilde{c}_s} \right\}_{1,0}^T, \quad \mathcal{W}_{1,0}^{(s)} = \left\{ \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\mu}}, \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\mu}} \right\}_{1,0}^T, \\ J_{I,N}^{(1)} \sim J_{I,N}^{(4)}; J_{I,N} \text{ の } 2 \times 2 \text{ submatrix}^{*1}, \\ J_{I,N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} j_{11} + j_{31} & j_{12} + j_{32} & j_{13} + j_{33} & j_{14} + j_{34} \\ j_{21} + j_{41} & j_{22} + j_{42} & j_{23} + j_{43} & j_{24} + j_{44} \\ j_{11} - j_{31} & j_{12} - j_{32} & j_{13} - j_{33} & j_{14} - j_{34} \\ j_{21} - j_{41} & j_{22} - j_{42} & j_{23} - j_{43} & j_{24} - j_{44} \end{pmatrix}_N \\ j_{11} \sim j_{44}; 4 \times 4 \text{ matrix } J_N \text{ の element} \end{cases} \cdots \cdots (2.41)$$

地表面は自由表面という条件、 $\mathcal{W}_{1,0}^{(s)} = \mathbf{0}$ を代入し、(2.39) 式により $B_{N+1}^{(I)}$ を既知として (2.40) 式を解けば

$$\mathcal{W}_{1,0}^{(d)} = [J_{I,N}^{(1)}]^{-1} B_{N+1}^{(I)}, \quad B_{N+1}^{(R)} = J_{I,N}^{(3)} \mathcal{W}_{1,0}^{(d)} = J_{I,N}^{(3)} [J_{I,N}^{(1)}]^{-1} B_{N+1}^{(I)} \cdots \cdots (2.42)$$

*1 参考文献 11) の記号 $J_N^{(1)} \sim J_N^{(4)}$ とは次の関係にある。

$$J_{I,N}^{(1)} = J_N^{(1)} + J_N^{(3)}, \quad J_{I,N}^{(2)} = J_N^{(2)} + J_N^{(4)}, \quad J_{I,N}^{(3)} = J_N^{(1)} - J_N^{(3)}, \quad J_{I,N}^{(4)} = J_N^{(2)} - J_N^{(4)}$$

いま最下層から平面波入射がない、すなわち $B_{N+1}^{(1)} = \mathbf{0}$ 、とすれば、(2.42) 式より零でない変位 vector $\mathcal{W}_{1,0}^{(d)}$ が存在するためには

$$|J_{I,N}^{(1)}| = 0 \quad (2.43)$$

が成立しなければならない。(2.43) 式はこの場合の振動数方程式で、これはまた多層線形粘弾性地盤の表面波の振動数方程式でもある*2。

ここで matrix $[J_{I,N}^{(1)}]^{-1}$ の各 element のもつ意味を明らかにしておこう。(2.39) 式によれば、基盤層から入射する P 波および SV 波をそれぞれ独立に扱うと、 $\Delta_{I,N+1}$ と $\omega_{I,N+1}$ も独立となり、P 波入射のときには $\omega_{I,N+1}$ がまた SV 波入射のときには $\Delta_{I,N+1}$ が零となる。したがって、(2.42) 式は第 (N) 境界面での入射波変位振巾を基準量とする地表面の変位応答の形で次式のように書換えることができる。

$$\begin{aligned} \text{P 波入射;} \quad \frac{u_1(X, O, T)}{A_P} &= h'_{N+1} j'_{11} \exp\{ia_0(T - \xi X)\}, \\ \frac{w_1(X, O, T)}{A_P} &= h'_{N+1} j'_{21} \exp\{ia_0(T - \xi X)\} \quad (2.44a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SV 波入射;} \quad \frac{u_1(X, O, T)}{A_{SV}} &= \frac{1}{2} \kappa'_{N+1} j'_{12} \exp\{ia_0(T - \xi X)\}, \\ \frac{w_1(X, O, T)}{A_{SV}} &= \frac{1}{2} \kappa'_{N+1} j'_{22} \exp\{ia_0(T - \xi X)\} \quad (2.44b) \end{aligned}$$

ここに、 $j'_{11} \sim j'_{22}$ は 2×2 matrix $[J_{I,N}^{(1)}]^{-1}$ の element である。この式の表現により matrix $[J_{I,N}^{(1)}]^{-1}$ の各 element のもつ意味ないしは関係する物理量が了解される。

CASE B: 最下層の境界面すなわち第 (N) 境界面での応答が既知の場合

(2.34) 式を次のように書改める。

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}_{N,N}^{(d)} \\ \mathcal{W}_{N,N}^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_N^{(1)} & F_N^{(2)} \\ F_N^{(3)} & F_N^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{1,0}^{(d)} \\ \mathcal{W}_{1,0}^{(s)} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

ここに

$$\mathcal{W}_{N,N}^{(d)} = \left\{ \frac{\tilde{u}}{\tilde{c}_s}, \frac{\tilde{w}}{\tilde{c}_s} \right\}_{N,N}^T, \quad \mathcal{W}_{N,N}^{(s)} = \left\{ \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\mu}}, \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\mu}} \right\}_{N,N} \quad (2.46)$$

また、 $F_N^{(1)} \sim F_N^{(4)}$ は F_N の 2×2 submatrix である。地表面は自由表面という条件、 $\mathcal{W}_{1,0}^{(s)} = \mathbf{0}$ 、を代入し、第 (N) 境界面での変位 $\mathcal{W}_{N,N}^{(d)}$ を既知として上式を解けば

$$\mathcal{W}_{1,0}^{(d)} = [F_N^{(1)}]^{-1} \mathcal{W}_{N,N}^{(d)}, \quad \mathcal{W}_{N,N}^{(s)} = F_N^{(3)} \mathcal{W}_{1,0}^{(d)} = F_N^{(3)} [F_N^{(1)}]^{-1} \mathcal{W}_{N,N}^{(d)} \quad (2.47)$$

上記 CASE A の場合と同様にして、この場合の振動数方程式は下式で与えられる。

$$|F_N^{(1)}| = 0 \quad (2.48)$$

いま基盤層から入射する P 波および SV 波をそれぞれ独立に扱うことにし、第 (N) 境界面での既知変位を次のように表わす。

$$\begin{aligned} \text{P 波入射;} \quad u_{N+1}(X, O, T) &= B_P \exp\{ia_0(T - \xi X)\}, \\ w_{N+1}(X, O, T) &= C_P \exp\{ia_0(T - \xi X)\} \quad (2.49a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SV 波入射;} \quad u_{N+1}(X, O, T) &= B_{SV} \exp\{ia_0(T - \xi X)\}, \\ w_{N+1}(X, O, T) &= C_{SV} \exp\{ia_0(T - \xi X)\} \quad (2.49b) \end{aligned}$$

したがって、(2.47) 式は第 (N) 境界面における x 方向の入射波変位振巾を基準量とする地表面の変位応答の形で次式のように書直すことができる。

*2 参考文献 11) の (9) 式および同 20) の (2.21) 式参照。

$$\begin{aligned} \text{P 波入射;} \quad \frac{u_1(X, O, T)}{B_P} &= \left(f'_{11} + \frac{C_P}{B_P} f'_{12} \right) \exp\{ia_0(T - \xi X)\}, \\ \frac{w_1(X, O, T)}{B_P} &= \left(f'_{21} + \frac{C_P}{B_P} f'_{22} \right) \exp\{ia_0(T - \xi X)\} \quad \dots\dots\dots (2.50a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SV 波入射;} \quad \frac{u_1(X, O, T)}{B_{SV}} &= \left(f'_{11} + \frac{C_{SV}}{B_{SV}} f'_{12} \right) \exp\{ia_0(T - \xi X)\}, \\ \frac{w_1(X, O, T)}{B_{SV}} &= \left(f'_{21} + \frac{C_{SV}}{B_{SV}} f'_{22} \right) \exp\{ia_0(T - \xi X)\} \quad \dots\dots\dots (2.50b) \end{aligned}$$

ここに、 $f'_{11} \sim f'_{22}$ は 2×2 matrix $[F_N^{(1)}]^{-1}$ の element を表す。この式の表現により matrix $[F_N^{(1)}]^{-1}$ の各 element のもつ意味ないしは関係する物理量が了解される。

このように CASE A および CASE B とも、地表面での変位 vector がそれぞれ (2.42) および (2.47) 式のように既知になるので、各境界面の変位・応力 vector はこれらを用いかつ (2.31) および (2.32) 式を参照すると次式で与えられる。

$$W_{m,m} = F_m W_{1,0}, \quad F_m = E_m E_{m-1} \cdots E_1 \quad [m=1, 2, \dots, N] \quad \dots\dots\dots (2.51)$$

また各層内の変位・応力 vector は (2.26), (2.29) および (2.31) 式を参照すると

$$W_m = Q_m C_m^{-1} W_{m-1, m-1} \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \quad \dots\dots\dots (2.52)$$

より求めることができる。

2.2.3 波動伝達特性の解析的表現

以上をまとめれば、(2.51), (2.52) および (2.42) または (2.47) 式を含めて、地層内の任意点における波動伝達特性は次式で表わすことができる。

$$W_m = Q_m C_m^{-1} E_{m-1} E_{m-2} \cdots E_1 W_{1,0} \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \quad \dots\dots\dots (2.53a)$$

あるいは

$$W_m = Q_m T_{m-1} T_{m-2} \cdots T_1 C_1^{-1} W_{1,0} \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \quad \dots\dots\dots (2.53b)$$

ここに

$$\begin{cases} W_m = \begin{bmatrix} W_m^{(d)} \\ W_m^{(s)} \end{bmatrix}, & W_m^{(s)} = \left\{ \frac{\tau}{\mu}, \frac{\sigma}{\mu} \right\}_m^T, & T_m = C_{m+1}^{-1} D_m \\ W_{1,0} = \begin{cases} \begin{bmatrix} [J_{I,N}^{(1)}]^{-1} B_{N+1}^{(t)} \\ O \end{bmatrix}; & \text{CASE A; 最下層境界面への入射波が既知の場合} \\ \begin{bmatrix} [F_N^{(1)}]^{-1} W_{N,N}^{(d)} \\ O \end{bmatrix}; & \text{CASE B; 最下層境界面の応答が既知の場合} \end{cases} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2.54)$$

これまでの解析では変位・応力 vector の element の表現として速度応答量を基本にとってきたが、上式中の変位 vector については下記のような二通りの表現を導いておく。

① 応答量として速度をとるとき

$$\begin{cases} W_m^{(d)} = \left\{ \frac{\dot{u}}{\bar{c}_s}, \frac{\dot{w}}{\bar{c}_s} \right\}_m^T, & B_{N+1}^{(t)} = \{A_I, \omega_I\}_{N+1}^T = \begin{cases} ia_0 \{h'_{N+1} A_P / \bar{H}, 0\}^T & ; \text{P 波入射} \\ ia_0 \{0, \kappa'_{N+1} A_{SV} / \bar{H}\}^T & ; \text{SV 波入射} \end{cases} \\ W_{N,N}^{(d)} = \left\{ \frac{\dot{u}}{\bar{c}_s}, \frac{\dot{w}}{\bar{c}_s} \right\}_{N,N}^T = \begin{cases} ia_0 \{B_P / \bar{H}, C_P / \bar{H}\}^T & ; \text{P 波入射} \\ ia_0 \{B_{SV} / \bar{H}, C_{SV} / \bar{H}\}^T & ; \text{SV 波入射} \end{cases} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2.55a)$$

② 応答量として変位をとるとき

$$\begin{cases} W_m^{(d)} = \begin{cases} \left\{ \frac{\bar{u}}{A_q}, \frac{\bar{w}}{A_q} \right\}_m^T; & \text{CASE A} \\ \left\{ \frac{\bar{u}}{B_q}, \frac{\bar{w}}{B_q} \right\}_m^T; & \text{CASE B} \end{cases}, & B_{N+1}^{(t)} = \begin{cases} \{h'_{N+1}, 0\}^T & ; \text{P 波入射} \\ \{0, \kappa'_{N+1}\}^T & ; \text{SV 波入射} \end{cases} \\ q = \begin{cases} \text{P; P 波入射} \\ \text{SV; SV 波入射} \end{cases}, & W_{N,N}^{(d)} = \begin{cases} \{1, C_P / B_P\} & ; \text{P 波入射} \\ \{1, C_{SV} / B_{SV}\} & ; \text{SV 波入射} \end{cases} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2.55b)$$

①および②の場合を通じて他の matrix の表現式は共通で、これまで定義してきたものがそのまま使える。本論の解析手法では $\exp\{ia_0(T-\xi X)\}$ がすべての応答量に共通であるから、(2.36) 式を参照すると

$$\frac{\sin\theta_P}{c_{dv}(i\omega)} = \frac{\sin\theta_{SV}}{c_{sv}(i\omega)} \quad (2.56)$$

すなわち、P 波および SV 波の入射角は Snell の法則に従わなければならない。言換えると、入射角に関する上の関係が満たされる場合を除き、基盤層からの入射波として P 波および SV 波の混合した問題を一般に同時に扱うことはできないわけである。この解析法では P 波および SV 波入射の問題を別個に扱わなければならないが、両者が混合しているときには、入射波をこれら 2 つの成分に分けそれぞれ独立に扱い、結果を重ね合わせるという手法をとることができる。

なお上の解析中に現われてきた主要な matrix の element に関する無次元表現式を APPENDIX に示した。

2.3 SH 波斜入射の場合

2.3.1 基本解の誘導

媒体の各点の運動が y 軸に平行な SH 平面波が入射する場合を考える。これによって生じる媒体の運動は y 方向に一樣ですべて y 軸に平行な成分のみとなるから

$$u=w=\Delta=\omega_y=\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xz}=0 \quad (2.57)$$

したがって各成分は次のように表わされる。

$$\omega_x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.58a)$$

$$v = \frac{2}{\kappa_v^2(\omega)} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = 2 \frac{\mu_v(i\omega)}{\kappa_v^2(\omega)} \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x \partial z} \right) = \mu_v(i\omega) \frac{\partial v}{\partial z} \equiv \tau \quad (2.58b)$$

またこの場合の基礎方程式は次式で与えられる。

$$[V^2 + \kappa_v^2(\omega)]v = 0 \quad (2.59)$$

前節と同様に z 軸を鉛直下方にとり、地層の境界面は xy 平面に平行とし、全体として x 方向に伝播する平面波を考える。解 v の解として

$$v = e(z) \exp\{i(\omega t - \xi x)\} \quad (2.60)$$

のように仮定できるから、これを (2.59) 式に代入すれば次式が得られる。

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \{\kappa_v^2(\omega) - \xi^2\} \right] e(z) = 0 \quad (2.61)$$

ここで、基礎方程式とその解の無次元化を行なうと

$$\left[\frac{d^2}{dZ^2} + a_0^2(\kappa_v^2 - \xi^2) \right] e(Z) = 0, \quad \frac{v}{\bar{v}} = e(Z) \exp\{ia_0(T - \xi X)\} \quad (2.62)$$

ここに、 $\bar{v}$ は基準振幅、 $e(Z) = e(z)/\bar{v}$ である。(2.62) 式の解は次式で与えられる。

$$e(Z) = e_I \exp(ia_0\beta Z) + e_R \exp(-ia_0\beta Z) = (e_I + e_R) \cos(a_0\beta Z) + i(e_I - e_R) \sin(a_0\beta Z) \quad (2.63)$$

ここに、 e_I および e_R は境界条件より定まる未定常数で、 e_I は入射波 (上昇波) を e_R は反射波 (下降波) を表わす項をそれぞれ意味する。

変位・応力成分の表現 $\{v, \tau\}$ より共通項 $\exp\{ia_0(T - \xi X)\}$ を除いたものを $\{\bar{v}, \bar{\tau}\}$ で表わす。(2.58b) および (2.60) 式に解 (2.63) 式を代入し、結果を matrix 形式で表示すると、基本解の表現が次式のように得られる。

$$W = QB \quad (2.64)$$

ここに

$$\begin{cases} \bar{W} = \left\{ \frac{v}{\bar{v}}, \frac{\tau}{\bar{\mu}} \right\}^T, & Q = \begin{bmatrix} e^{ia_0\beta Z} & e^{-ia_0\beta Z} \\ i\beta' e^{ia_0\beta Z} & -i\beta' e^{-ia_0\beta Z} \end{bmatrix}, & \beta' = \frac{\mu}{g_*(a_0)} a_0 \beta \frac{\bar{v}}{H} \dots\dots\dots (2.65) \\ B = \{e_I, e_R\}^T, \end{cases}$$

2.3.2 波動伝達特性の誘導

前節の P 波または SV 波の場合と同じ多層地盤 (Fig. 1) を想定し, matrix による同様な表現と演算を実施する。ただしここでは matrix の size が 2×2 で扱いが簡単のため, 剛性係数 $\mu_v(i\omega)$ のみからなる係数 matrix G を分離して扱うことはしない。また誘導の過程は省略して結果のみを示す。基本解 (2.64) 式が前節と同じ表現形式になっているので, 最終結果も前節と同じ表現で下式のようになる。

$$W_{N,N} = F_N W_{1,0}, \quad F_N = E_N E_{N-1} \dots E_1, \quad E_m = D_m C_m^{-1} \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \dots\dots\dots (2.66)$$

$$B_{N+1} = J_N W_{1,0}, \quad J_N = C_{N+1}^{-1} F_N \dots\dots\dots (2.67)$$

ここに, 各 vector および matrix の size は前節の半分の 2 および 2×2 になっている。主要な matrix の element を APPENDIX に示した。

CASE A: 最下層の境界面への入射波が既知の場合

既知とする入射波変位を

$$\begin{aligned} \Phi_{SH} &= A_{SH} \exp\{ia_0(T - \xi X + \beta_{N+1} Z_{N+1})\} \\ &= A_{SH} \exp\{ia_0(T - \kappa'_{N+1} \sin\theta_{SH} \cdot X + \kappa'_{N+1} \cos\theta_{SH} \cdot Z_{N+1})\} \dots\dots\dots (2.68) \end{aligned}$$

で表わし, $\bar{v} = A_{SH}$, すなわち基準振巾を入射波の変位振巾にとる。ここに, θ_{SH} は SH 波の入射角である。

地表面は自由表面という条件, $\tau_{1,0} = 0$, および (2.68) 式は最下層の入射波変位という条件, $e_{I,N+1} = 1$, を (2.67) 式に代入し, 未知な成分の解を求めると

$$\frac{\bar{v}_{1,0}}{A_{SH}} = j_{11}^{-1}, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{v_1(X, O, T)}{A_{SH}} = j_{11}^{-1} \exp\{ia_0(T - \xi X)\} \dots\dots\dots (2.69a)$$

$$e_{R,N+1} = j_{21} \frac{\bar{v}_{1,0}}{A_{SH}} = j_{21} j_{11}^{-1} \dots\dots\dots (2.69b)$$

ここに, $j_{11} \sim j_{22}$ は無次元 matrix J_N の element である。

いま最下層からの平面波入射がない, すなわち $e_{I,N+1} = 0$, とすれば, 零でない変位 $\bar{v}_{1,0}$ が存在するためには (2.69a) 式より

$$j_{11} = 0 \dots\dots\dots (2.70)$$

が成立しなければならない。(2.70) 式はこの場合の振動数方程式で, これはまた多層線形粘弾性地盤の Love 波の振動数方程式でもある*3。

CASE B: 最下層の境界面での応答が既知の場合

いま最下層境界面での既知変位を

$$v_N(X, O, T) = B_{SH} \exp\{ia_0(T - \xi X)\} \dots\dots\dots (2.71)$$

で表わし, $\bar{v} = B_{SH}$, すなわち基準振巾をこの既知変位の振巾にとる。(2.66) 式の第 1 式に地表面が自由表面という条件, $\tau_{1,0} = 0$, を代入し, 未知な成分を解けば

$$\frac{\bar{v}_{1,0}}{B_{SH}} = f_{11}^{-1}, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{v_1(X, O, T)}{B_{SH}} = f_{11}^{-1} \exp\{ia_0(T - \xi X)\} \dots\dots\dots (2.72a)$$

$$\frac{\tau_{N,N}}{\bar{\mu}} = f_{21} \frac{\bar{v}_{1,0}}{B_{SH}} = f_{21} f_{11}^{-1} \dots\dots\dots (2.72b)$$

ここに, $f_{11} \sim f_{22}$ は無次元 matrix F_N の element である。

この場合の振動数方程式は (2.72a) 式で既知変位を零とおくことにより下式で与えられる。

$$f_{11} = 0 \dots\dots\dots (2.73)$$

*3 参考文献 20) の (9.9) 式参照。

このように CASE A および CASE B とも、地表面の変位 $\bar{v}_{1,0}$ が (2.69a) および (2.72a) 式のように既知になるので、地表面の変位・応力 vector $W_{1,0}$ が既知になる。したがって、前節と同様に各境界面位置および各層内の変位・応力 vector はそれぞれ (2.51) および (2.52) 式と同じ式で求められる。

2.3.3 波動伝達特性の解析的表現

以上をまとめると、あらゆる場合を含めて地層内の任意点における波動伝達特性を前節 (2.53) 式と同じ式で表わすことができる。ただし各 matrix および vector の element は下式で与えられる。

$$\begin{cases} T_m = C_{m+1}^{-1} D_m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+\gamma)e^{i\alpha_0\beta d} & (1-\gamma)e^{-i\alpha_0\beta d} \\ (1-\gamma)e^{i\alpha_0\beta d} & (1+\gamma)e^{-i\alpha_0\beta d} \end{bmatrix}_m, \quad \gamma_m = \left(\frac{\beta'_m}{\beta_{m+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ W_m = \left\{ \frac{\bar{v}}{B_{SH}}, \frac{\bar{\tau}}{\bar{\mu}} \right\}_m^T, \quad W_{1,0} = \begin{cases} \{j_{11}^{-1}, 0\}^T; \text{CASE A} \\ \{f_{11}^{-1}, 0\}^T; \text{CASE B} \end{cases} \end{cases} \quad (2.74)$$

上式は応答量として変位をとるとき表現であるが、これを $\bar{v}$ を基準量とする速度にとるときには、変位・応力 vector W_m および $W_{1,0}$ 中の変位量に $ia_0 B_{SH} / \bar{H}$ をかけることにより、他の matrix の element は不変で (2.53) 式と同じ関係式によって表現することができる。

次に、波動伝達特性の一般解 W_m の別の表現を求めておこう。まず (2.69a) 式を参照すると (2.53b) 式は次のように変形できる。

$$W_m = Q_m T_{m-1} T_{m-2} \cdots T_1 \left[\frac{1}{2} \right] \frac{\bar{v}_{1,0}}{\bar{v}} \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \quad (2.75)$$

ここで

$$\begin{bmatrix} S_{1,m} \\ S_{2,m} \end{bmatrix} = T_{m-1} T_{m-2} \cdots T_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \quad (2.76)$$

を定義すれば、上式は

$$W_m = Q_m \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_{1,m} \\ S_{2,m} \end{bmatrix} \frac{\bar{v}_{1,0}}{\bar{v}} \quad (2.77)$$

のように書直すことができる。次に、(2.76) 式で定義した記号を用いて j_{11} および f_{11} を求めてみよう。(2.67) の第2式を変形すると

$$\begin{bmatrix} j_{11} \\ j_{21} \end{bmatrix} = T_N T_{N-1} \cdots T_1 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_{1,N+1} \\ S_{2,N+1} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

これより

$$j_{11} = \frac{1}{2} S_{1,N+1} \quad (2.79)$$

が得られる。また (2.66) の第2式を変形すると

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{bmatrix} = D_N T_{N-1} T_{N-2} \cdots T_1 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{i\alpha_0\beta d} & e^{-i\alpha_0\beta d} \\ i\beta' e^{i\alpha_0\beta d} & -i\beta' e^{-i\alpha_0\beta d} \end{bmatrix}_N \begin{bmatrix} S_{1,N} \\ S_{2,N} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

これより

$$f_{11} = \frac{1}{2} (S_{1,N} e^{i\alpha_0\beta d N} + S_{2,N} e^{-i\alpha_0\beta d N}) \quad (2.81)$$

が得られる。したがって (2.69a), (2.72a) および (2.77) 式を用いれば、求める波動伝達特性の応答量として変位をとるとき一般的な表現は下式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\bar{v}_m}{\bar{v}} &= \frac{1}{S} (S_{1,m} e^{i\alpha_0\beta m Z_m} + S_{2,m} e^{-i\alpha_0\beta m Z_m}) \\ \frac{\bar{\tau}_m}{\bar{\mu}} &= i \frac{\beta'_m}{S} (S_{1,m} e^{i\alpha_0\beta m Z_m} - S_{2,m} e^{-i\alpha_0\beta m Z_m}) \end{aligned} \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \quad (2.82)$$

ここに

$$S = \begin{cases} S_{1,N+1} \\ S_{1,N} e^{i a_0 \beta_N d_N} + S_{s,N} e^{-i a_0 \beta_N d_N} \end{cases}, \quad \bar{v} = \begin{cases} A_{SH} & ; \text{CASE A} \\ B_{SH} & ; \text{CASE B} \end{cases} \quad (2.83)$$

2.4 鉛直入射の場合——1次元 SH 波入射の解との対比——

CASE 1: SH 波入射の場合

鉛直入射のとき parameter は次の値をとる。

$$\theta_{SH} = \xi = 0, \quad \beta_m = \kappa'_m = \kappa_m \{g_{s,m}(a_0)\}^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_m = \left[\frac{\rho_m \mu_m \{g_{s,m}(a_0)\}^{-1}}{\rho_{m+1} \mu_{m+1} \{g_{s,m+1}(a_0)\}^{-1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.84)$$

SH 波鉛直入射の場合には、波動伝達特性の一般的表現 (2.82) および (2.83) 式が上記の parameter の変更のみでそのまま成立つ。層の総数が N から $N+1$ に変わっていることを考慮に入れば、これらの諸式は参考文献 8) の中の (3.17a) 式に一致する。

CASE 2: P 波または SV 波入射の場合

鉛直入射のとき parameter は次の値をとる。

$$\theta_P \text{ (or } \theta_{SV}) = \xi = 0, \quad \alpha_m = h'_m = n_m \kappa_m \{g_{d,m}(a_0)\}^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_m = \kappa'_m = \kappa_m \{g_{s,m}(a_0)\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.85)$$

(2.24) および (2.25) 式に上の関係を代入して、element の配列を変更しかつ三角関数の代わりに指数関数を用いると

$$\begin{bmatrix} \frac{\hat{w}}{\bar{c}_s} \\ \frac{\hat{\sigma}}{\bar{\mu}} \\ \frac{\hat{u}}{\bar{c}_s} \\ \frac{\hat{\tau}}{\bar{\mu}} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h'} e^{i a_0 \alpha z} & \frac{1}{h'} e^{-i a_0 \alpha z} & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{n^2 g_d(a_0)} e^{i a_0 \alpha z} & \frac{\mu}{n^2 g_d(a_0)} e^{-i a_0 \alpha z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\kappa'} e^{i a_0 \beta z} & \frac{2}{\kappa'} e^{-i a_0 \beta z} \\ 0 & 0 & 2 \frac{\mu}{g_s(a_0)} e^{i a_0 \beta z} & 2 \frac{\mu}{g_s(a_0)} e^{-i a_0 \beta z} \end{bmatrix}_m \begin{bmatrix} \Delta I \\ \Delta R \\ \omega_I \\ \omega_R \end{bmatrix}_m \quad (2.86)$$

(2.39) 式を参照すれば、第 m 層に関して

$$\Delta I = i a_0 h' \frac{b_{P,I}}{H}, \quad \omega_I = i a_0 \kappa' \frac{b_{SV,I}}{H} \quad [I = I, R] \quad (2.87)$$

なる関係があるからこれを上式に代入する。ここに、 $b_{P,I}, b_{P,R}$ は上昇 P 波および下降 P 波の変位に関する未定常数、 $b_{SV,I}, b_{SV,R}$ は上昇 SV 波および下降 SV 波の変位に関する未定常数である。さらに、上の matrix 表現は P 波および SV 波に関する部分をそれぞれ完全に分離できるのでこれを実行すると、次の 2 つの関係式が得られる。

$$W_m^{(P)} = Q_m^{(P)} B_m^{(P)}, \quad W_m^{(SV)} = Q_m^{(SV)} B_m^{(SV)} \quad [m = 1, 2, \dots, N+1] \quad (2.88)$$

あるいは

$$\begin{bmatrix} \frac{\hat{w}}{\bar{w}} \\ \frac{\hat{\sigma}}{\bar{\mu}} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} e^{i a_0 \alpha z} & e^{-i a_0 \alpha z} \\ i \alpha' e^{i a_0 \alpha z} & -i \alpha' e^{-i a_0 \alpha z} \end{bmatrix}_m \begin{bmatrix} \frac{b_{P,I}}{\bar{w}} \\ \frac{b_{P,R}}{\bar{w}} \end{bmatrix}_m, \quad \begin{bmatrix} \frac{\hat{u}}{\bar{u}} \\ \frac{\hat{\tau}}{\bar{\mu}} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} e^{i a_0 \beta z} & e^{-i a_0 \beta z} \\ i \beta' e^{i a_0 \beta z} & -i \beta' e^{-i a_0 \beta z} \end{bmatrix}_m \begin{bmatrix} \frac{b_{SV,I}}{\bar{u}} \\ \frac{b_{SV,R}}{\bar{u}} \end{bmatrix}_m \quad (2.89)$$

ここに

$$\alpha' = \frac{\mu}{n^2 g_d(a_0)} a_0 \alpha \frac{\bar{w}}{H}, \quad \beta' = \frac{\mu}{g_s(a_0)} a_0 \beta \frac{\bar{u}}{H} \quad (2.90)$$

また、 $\bar{w}$ および $\bar{u}$ は基準振巾である。

上に求められた P 波および SV 波に関する (2.88) または (2.89) 式は、ともに SH 波入射の場合 (2.64) お

よび (2.65) 式と全く同じ形をしているので、前節と同様な変形によって (2.82) および (2.83) 式と同一の表現形式に帰着させることができる。ただし、P 波入射に対しては式中 $\{v_m, \bar{v}, \beta_m, \beta'_m, A_{SH}, B_{SH}, \gamma_m\}$ 中の μ_m および $g_{s,m}(a_0)$ の代わりに $\{w_m, \bar{w}, \alpha_m, \alpha'_m, A_P, B_P, \mu_m/n_m^2\}$ および $g_{d,m}(a_0)$ を、また SV 波入射に対しては $\{u_m, \bar{u}, \beta_m, \beta'_m, A_{SV}, B_{SV}, \mu_m\}$ および $g_{s,m}(a_0)$ をそれぞれ用いなければならない。

3. 波動伝達特性と剛体基礎の Dynamical Ground Compliance

を用いた地盤—構造物系の総合振動特性の解析法

3.1 平面波入射による剛な基礎をもつ構造物系の総合振動特性

前章で対象とした多層粘弾性地盤 (Fig. 1) を考える。その地表面上にのる剛な長方形基礎 (断面 $2b \times 2c$) をもつ構造物系に、基盤層から平面波が一般に斜に入射するときに生じる振動を取扱う。ここではこのような連成系の動特性を、地震基盤—波動媒体地盤—基礎周辺地盤—構造物系の平面波入射による総合振動特性という形で表現する。

地盤内の任意点の変位・応力 vector を

$$W_m = \{u, v, w, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\}_m^T \quad [m=1, 2, \dots, N+1; \text{層の番号}] \quad (3.1)$$

で表わし、これを次式のように 2 つの成分の和として表現できると仮定する。

$$W_m = W'_m + W''_m \quad (3.2)$$

ここに、 W'_m は基盤層から平面波が入射するとき自由表面の場合に生じる変位・応力 vector (すなわち波動伝達特性を表わす変位・応力 vector) で、 W''_m は構造物の存在による影響を表わす変位・応力 vector である。

さて (3.2) 式が想定された問題の解となる必要十分条件は

① 解の表現が基礎運動方程式を満足していること

② 解の表現が境界条件をすべて満足していること

である。まず、地表面と構造物基礎との接触を完全密着として扱う場合の境界条件を考える。ここでは地盤はすべて線形粘弾性媒体からなるとしているの、線形理論に基づく重ね合わせの原理が成立つこと、また微小変形理論の範囲で扱っていることに注意しておこう。(3.2) 式の右辺のうち W'_m は前章の方法で求めることができるから既知の解と考え、以下では W''_m の満たすべき条件を明らかにする。

(a) 各境界面での連続条件

W'_m はすでにこの条件を満足している解なので、 W_m がこれを満たすには W''_m が単独にこの条件を満足していればよい。すなわち

$$W''_{m,m-1} = W''_{m-1,m-1} \quad [m=2, 3, \dots, N+1] \quad (3.3)$$

(b) 最下層の無限遠での収束条件

$$W''_{N+1}|_{z_{N+1} \rightarrow \infty} = W''_{N+1}|_{z_{N+1} \rightarrow \infty}, \quad i.e., \quad W''_{N+1}|_{z_{N+1} \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.4)$$

(c) 地表面での境界条件 (1)——基礎面外 $[R = \{|x| > b\} \cup \{|y| > c\} \cup \{z_1 = 0\}]$

$$W''_1(s)|_R = 0 \quad (3.5)$$

ここに

$$W''_m(s) = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\}_m^T \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \quad (3.6)$$

波動伝達特性の表現では地表面は自由表面であるから

$$W''_1(s)|_{z_1=0} = 0, \quad i.e., \quad W''_1(s)|_R = 0 \quad (3.7)$$

(d) 地表面での境界条件 (2)——基礎面内 $[R = \{|x| \leq b\} \cap \{|y| \leq c\} \cap \{z_1 = 0\}]$

いま剛な基礎の底面変位を $\{u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y, \phi_z\}$ とする。ここに、 u_0, v_0, w_0 は基礎底面中心の x, y, z 軸方向の変位で、軸の正方向の変位を正にとる。また ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z は基礎底面中心の x, y, z 軸まわりの回転角で、軸の正方向にみて時計まわりの回転角を正にとる。このとき地表面と基礎は完全密着という条件より、

基礎底面内の変位は次式で表わされる。

$$W_1^{(d)}|_R = \{u_0 - \gamma\phi_z, v_0 + x\phi_z, w_0 - x\phi_y + \gamma\phi_x\}_R^T \dots\dots\dots (3.8)$$

ここに

$$W_m^{(d)} = \{u, v, w\}_m^T \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \dots\dots\dots (3.9)$$

(3.2)式を参照すると(3.8)式より次の条件式が得られる。

$$W_1'^{(d)}|_R = \{u_0 - \gamma\phi_z, v_0 + x\phi_z, w_0 - x\phi_y + \gamma\phi_x\}_R^T - W_1'^{(d)}|_R \dots\dots\dots (3.10)$$

すなわち、構造物の存在による影響を表わす基礎面変位は剛な基礎としての一般的な変位表現と波動伝達特性による変位との差として表わされる。

一方、解の表現が基礎運動方程式を満足しなければならないという必要十分条件③については、(3.2)式の右辺のうち W_m' はすでにこの条件を満足しているから、残る W_m'' が基礎運動方程式を満足していればよいことになる。

上述の基礎運動方程式に関する条件と境界条件を考え合わせると、構造物の存在による影響を表わす項 W_m'' は、連続条件(3.3)式と収束条件(3.4)式を満足し、かつ地表面の基礎面位置に(3.10)式で表わされる強制変位の作用を受け、それ以外の地表面は自由表面[(3.7)式]になる混合境界値問題の解という表現になっている。ここで線形理論の重ね合わせの原理が成立つことを考慮すると、 W_m'' は他の境界条件はすべて共通で基礎面内の条件のみ異なる次の2種の境界値問題の解の組合わせとして表わされる。ひとつは(3.10)式の右辺第1項に対応するもので、地表面の基礎面部分に剛な基礎としての変位(未知量)が与えられる場合、いまひとつは同式第2項に対応するもので、波動伝達特性として地表面の基礎面位置に生じる変位(既知量)が同じ位置に与えられる場合である。これらの境界値問題はさらに基礎面位置に与えられる変位の各成分あるいはそれらの特別な組合わせがそれぞれ単独に強制変位として作用する場合に分けることもでき、最終的に W_m はこれらすべての解の組合わせで表現されることになる。

いまもしこれらの境界値問題の解が得られているとすれば、(3.10)式中の未知変量(剛な基礎の底面変位)に対応した基礎面に働く地盤反力が求まり、次にこの反力の作用を受ける構造物系の運動方程式を解くことによって、上記の未知変量と構造物系の応答が求まり、しかるのち(3.2)式の応答量が確定するのである。このとき、平面波入射を受ける多層粘弾性地盤上の構造物系の総合振動特性の解析において、地盤の変位・応力 vector W_m は、基盤層からの平面波入射による自由表面のときの解 W_m' (波動伝達特性)と構造物系の存在による影響を表わす解 W_m'' との和で表現されるのである。

3.2 波動伝達特性と剛体基礎の Dynamical Ground Compliance に分離して扱える条件

3.2.1 分離可能条件の誘導

基礎底面と接触する地表面の境界条件(3.10)式は右辺第2項 $W_1'^{(d)}|_R$ の形によっては非常に複雑な変位条件を与えることになるので、一般的にこのような境界値問題を解くことは不可能といえよう。ここでは(3.2)式の右辺第2項の解 W_m'' を“剛体基礎の Dynamical Ground Compliance (D.G.C.)”に帰着させ、本節の標題のように連成系の総合振動特性を両者に分離して扱える条件を検討してみよう。

(3.10)式が剛体基礎の底面変位に対応する条件(3.8)式と同形式の表現をとるためには、平面波入射による自由表面の変位を表わす第2項の各成分が、領域 R において次のような x, y の1次式でなければならない。

$$W_1'^{(d)}|_R = \{u'_0 - \gamma\phi'_z, v'_0 + x\phi'_z, w'_0 - x\phi'_y + \gamma\phi'_x\}_R^T \dots\dots\dots (3.11)$$

ここに、 $u'_0, v'_0, w'_0, \phi'_x, \phi'_y, \phi'_z$ は座標には独立な任意常数で、(3.11)式が求める分離可能条件になる。このとき

$$W_1''^{(d)}|_R = \begin{bmatrix} (u_0 - u'_0) - \gamma(\phi_z - \phi'_z) \\ (v_0 - v'_0) + x(\phi_z - \phi'_z) \\ (w_0 - w'_0) - x(\phi_y - \phi'_y) + \gamma(\phi_x - \phi'_x) \end{bmatrix}_R \dots\dots\dots (3.12)$$

線形理論で重ね合わせの原理が成立つことを考慮すると、 W_m'' に関する境界条件 (3.3), (3.4), (3.7) および (3.12) 式は6つの場合に分離でき、最終的な解の表現 W_m'' はこれら各場合の解の和として表わすことができる。すなわち、連続条件 (3.3) 式、収束条件 (3.4) 式および基礎面外の地表面の条件 (3.7) 式はすべて共通で、基礎面内の条件 (3.12) 式のみが下式のように異なる6つの場合である。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{1} \quad {}_1 W_1''^{(d)}|_R = \{u_0 - u'_0, 0, 0\}^T & \textcircled{4} \quad {}_4 W_1''^{(d)}|_R = \{0, 0, y(\phi_x - \phi'_x)\}^T \\ \textcircled{2} \quad {}_2 W_1''^{(d)}|_R = \{0, v_0 - v'_0, 0\}^T & \textcircled{5} \quad {}_5 W_1''^{(d)}|_R = \{0, 0, -x(\phi_y - \phi'_y)\}^T \\ \textcircled{3} \quad {}_3 W_1''^{(d)}|_R = \{0, 0, w_0 - w'_0\}^T & \textcircled{6} \quad {}_6 W_1''^{(d)}|_R = \{-y(\phi_x - \phi'_x), x(\phi_y - \phi'_y), 0\}^T \end{array} \right. \dots\dots\dots (3.13)$$

これらの各場合はそれぞれ下記の加振形態をとる剛体基礎の D.G.C. を求める境界条件になっている。

- ① x 方向の水平加振 ② y 方向の水平加振 ③ z 方向の上下加振
④ x 軸まわりの回転加振 ⑤ y 軸まわりの回転加振 ⑥ z 軸まわりの振れ加振

(3.13) 式の表現で明らかのように、この場合の基礎面における加振変位は、入射平面波に対する自由表面のときの地表面変位を reference にとった運動座標系に関する総合振動特性としての剛体基礎の底面変位になっている。

以上の解析を整理すると、基礎底面と接触する部分の地表面変位が座標の1次関数で表わされるという条件 (3.11) 式が成立てば、基盤層からの入射平面波に対する地盤—構造物系の総合振動特性は、自由表面のときの解 (波動伝達特性) と自由表面の変位を reference にとった6種の強制加振変位に対する剛体基礎の D.G.C. の解との和として、分離した形で表現することができる。すなわち

$$W_m = W_m' + \sum_{j=1}^6 W_m'' \dots\dots\dots (3.14)$$

では実際に波動伝達特性と剛体基礎の D.G.C. に分離して扱えるのはどのようなときであろうか。これには3つの場合が考えられる。第一は近似的に取扱える場合、第二は厳密に取扱える場合、そして第三は完全密着という枠を最初からはずした場合である。

3.2.2 平面波の波長が基礎巾より相当長い場合——近似的扱い

CASE 1: P 波または SV 波が斜入射する場合

前章での解析結果によれば、波動伝達特性としての地盤各層の任意点の変位は有次元量で表わすと一般に次のように表現できる。

$$W_1^{(d)} = \{u', v', w'\}_m^T = \{U(z), 0, W(z)\}_m^T e^{i(\omega t - \zeta x)} \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \dots\dots\dots (3.15)$$

したがって自由表面である地表面 ($z_1=0$) の変位は

$$W_1^{(d)} = \{U_1(0), 0, W_1(0)\}^T e^{i\omega t} e^{-i\zeta x} \dots\dots\dots (3.16)^{*4}$$

ここで ζx を次のように無次元化する。

$$\zeta x = \zeta b \frac{x}{b} = 2\pi \frac{b}{\lambda} \cdot \frac{x}{b} \dots\dots\dots (3.17)$$

ここに、 $\lambda=2\pi/\zeta$ は平面波の波長である。原点を中心におき、 x および y 軸に平行に断面 $2b \times 2c$ の基礎がのりとして、基礎面内の座標 x に注目し ($|x| \leq b$)、さらに、ここで基礎巾 b に比べて波長 λ が相当長いという仮定 ($b \ll \lambda$) を導入すると、次の関係が得られる。

$$|\zeta x| \ll 2\pi \dots\dots\dots (3.18)$$

したがって、共通項 $e^{-i\zeta x}$ を Taylor 展開すれば ζx の高次の項は無視できるので、第3項以下を省略すると

$$e^{-i\zeta x} \simeq 1 - i\zeta x = 1 - \zeta x e^{i\frac{\pi}{2}} \dots\dots\dots (3.19)$$

*4 3.1 の最後にふれた (3.10) 式の右辺に対応する2種の境界値問題のうち後者の問題は、この場合には、 $e^{-i\zeta x}$ を分布関数とする強制変位が基礎面位置に作用する地表面強制加振の問題に帰着する。この後の CAES 2; SH 波の場合も同様である。

このとき地表面の基礎面位置（自由表面）の変位は近似的に次式のように表わされる。

$$W_1^{(d)}|_R \simeq \{U_1(0) - U_1(0)e^{\frac{\pi}{2}i}\zeta x, 0, W_1(0)e^{\frac{\pi}{2}i}\zeta x\}_R^T e^{i\omega t} \quad (3.20)$$

U_1' の第2項は y 軸からの距離に比例して増減する波動の進行方向の変位成分を表わしているが、その物理的意味として並進成分とも回転成分ともいえないので、分離可能条件 (3.11) 式を参照し、基礎面内の平均値をとってこれを基礎面の x 方向の変位（並進成分）にするという仮定をもうひとつ導入する。その結果は

$$\frac{1}{2b} \int_{-b}^b u_1' dt = U_1(0) e^{i\omega t} \quad (2.21)$$

このような仮定が十分成立するのは、すぐ後に述べるように、基礎巾に比べて波長が相当長いという最初の仮定が鉛直入射に近いことを意味しているのを考慮すると、P 波入射の場合にあたる。このとき、 $W_1(0) \gg U_1(0)$ が成立し、(3.20) 式において u_1' の第2項は w_1' のそれに比べて十分小さいと考えられるからである。

以上の解析によって、基礎巾 b に比べて平面波の波長 λ が相当長いという仮定が成立し、かつ (3.21) 式によって基礎と地表面との間に x 方向の相対ずれを多少認めることにすれば、自由表面のときに生じる地表面の基礎面部分の変位は近似的に次式のように表わされることがわかる。

$$W_1^{(d)}|_R \simeq \{U_1(0), 0, W_1(0) - W_1(0)e^{\frac{\pi}{2}i}\zeta x\}_R^T e^{i\omega t} \quad (3.22)$$

すなわち、基礎面内の変位は並進成分を表わす x および z 方向の一樣な変位成分と、回転成分を意味する波の進行方向の座標 x に比例する z 方向の変位成分の和として近似的に表わされており、これは分離可能条件 (3.11) 式を満足している。この場合に生じる構造物系の振動 mode は

- ① u_1' による x 方向の並進
- ② w_1' の第1項による z 方向の並進
- ③ w_1' の第2項による y 軸まわりの回転

で、これら3種の mode の連成振動になる*5。

なお前者の仮定は、(2.36) 式より得られる

$$\zeta = \omega \frac{\sin \theta_P}{c_{av}(i\omega)} \quad [\text{P 波}] \quad \text{または} \quad \omega \frac{\sin \theta_{SV}}{c_{sv}(\omega)} \quad [\text{SV 波}] \quad (3.23)$$

という各層について成立つ関係を参照すれば、一般に層の境界面に入射する平面波の入射角が小さいとき、すなわち鉛直入射に近いときを意味している。

CASE 2: SH 波が斜入射する場合

前章での解析結果によれば、波動伝達特性として生じる各層の任意点の変位は有次元量で表わすと次のように表現される。

$$W_m^{(d)} = \{u', v', w'\}_m^T = \{0, V(z), 0\}_m^T e^{i(\omega t - \zeta x)} \quad [m=1, 2, \dots, N+1] \quad (3.24)$$

CASE A と同様に、基礎巾に比べて波長が相当長いという仮定、言換えると SV 平面波の進行が鉛直入射に近いという仮定が成立つとき、自由表面の基礎面変位は近似的に次のように表現できる。

$$W_1^{(d)}|_R \simeq \{0, V_1(0) - V_1(0)e^{\frac{\pi}{2}i}\zeta x, 0\}_R^T e^{i\omega t} \quad (3.25)$$

v_1' の第2項は y 軸からの距離に比例して増減する剪断変形的な成分を表わしているが、このままでは分離可能条件を満足しない。そこで、(3.11) 式を参照し、基礎面の4辺の回転角をその周辺に沿って平均し、これによって基礎面全体の剛体的変位としての回転角を表わすという仮定をさらに導入すれば

*5 ここでは基礎底面の中心と上部構造物系の重心が同一鉛直線上にあるとの仮定をおく。したがって、 u_1' および w_1' の第1項による z 軸および x 軸まわりの回転振動は生じない。以下の扱いでも同じ仮定に立つ。

$$W_1^{(d)}|_R \simeq \left\{ \frac{1}{1+c/b} V_1(0) e^{\frac{\pi}{2} i \zeta} y, V_1(0) - \frac{1}{1+c/b} V_1(0) e^{\frac{\pi}{2} i \zeta} x, 0 \right\}_R^T e^{i \omega t} \dots (3.26)$$

これは分離可能条件 (3.11) 式を満足する。この場合に生じる構造物系の振動 mode は

- ① v'_1 の第 1 項による y 方向の並進
- ② v'_1 の第 1 項による x 軸まわりの回転
- ③ u'_1 および v'_1 の第 2 項による z 軸まわりの回転 (振れ)

で、これら 3 種の mode の連成振動になる。なお v'_1 の並進成分によって x 軸まわりの回転振動が生じる理由は、構造物系の重心が一般に地表面位置より上にあり、地盤から構造物側に働く復元力と慣性力との間に moment の不釣り合いが起るため、自由表面の地盤変位が並進成分のみであっても構造物系に回転振動が生じるのである。

3.2.3 鉛直入射平面波の場合——厳密な取扱い

平面波が基盤層から鉛直に入射するとき、よく知られているように生成される波動はすべて入射波と同種のものに限られ、かつ鉛直方向にのみ進行 (上昇) または後退 (下降) する。このとき入射角、 $\theta_q=0$ [$q=P, SV, SH$], であるから、平面波の wave number は (3.23) 式より

$$\zeta=0 \dots (3.27)$$

したがって自由表面のときの地表面変位を一般に次式で表わすことができる。

$$W_1^{(d)} = \{u'_1, v'_1, w'_1\}^T = \begin{cases} \{0, 0, W_1(0)\}^T e^{i \omega t}; & \text{CASE 1; P 波入射} \\ \{U_1(0), 0, 0\}^T e^{i \omega t}; & \text{CASE 2; SV 波入射} \\ \{0, V_1(0), 0\}^T e^{i \omega t}; & \text{CASE 3; SH 波入射} \end{cases} \dots (3.28)$$

これらはすべて何ら仮定を必要とせずに分離可能条件 (3.11) 式を満足する。したがって、平面波が基盤層から鉛直に入射する場合には、厳密な意味で両者を分離して扱うことができる。この場合に生じる構造物系の振動 mode は次のとおりである。

CASE 1; P 波入射; z 方向の並進

CASE 2; SV 波入射; x 方向の並進および y 軸まわりの回転

CASE 3; SH 波入射; y 方向の並進および x 軸まわりの回転

3.2.3 基礎を分布圧力に置換える場合

これまでの議論では、粘弾性地盤上にある剛体基礎の振動を地表面と基礎底面が密着するとして解析を進めてきた。しかし一般にこうした境界値問題の解を導くことが容易ではないので、剛体基礎を分布圧力に置換え、地表面の境界条件を応力で統一して記述し、近似的に解を求めようとする方法が工学的にはよく用いられている¹¹⁾¹²⁾。このような設定条件の下ではいま問題にしている分離が形式的には常に可能なことを示そう。

基礎の存在による影響を表わす解 W_m''' の境界条件について考えると、このうち

(a) 各境界面での連続条件 (3.3) 式

(b) 最下層の無限遠での収束条件 (3.4) 式

(c) 地表面での境界条件(1)——基礎面外 (3.7) 式

の 3 つはこれまでと共通で、最後の条件のみが異なる。すなわち

(d) 地表面での境界条件(2)——基礎面内

$$W_1^{(s)}|_R = \{0\tau_{xz}, 0\tau_{yz}, 0\sigma_z\}_R^T \dots (3.29)$$

ここに、 $0\tau_{xz}, 0\tau_{yz}, 0\sigma_z$ は領域 R で定義され分布形のみ与えられた未知関数である。ところで $W_1^{(s)}$ は地表面がすべて自由表面のときの応力であるから零 vector になる。したがって (3.2) 式の関係より

$$W_1^{(s)}|_R = \{0\tau_{xz}, 0\tau_{yz}, 0\sigma_z\}_R^T \dots (3.30)$$

が求められる。

W_m'' に関する以上 4 つの条件式は、地表面上の基礎面位置に (3.30) 式で与えられる圧力分布をもった加振力が作用するという“応力型境界条件の剛体基礎の D.G.C.”, すなわち, (3.2) 式より導かれる基礎面変位

$$W_1^{(d)}|_R = W_1^{(d)}|_R - W_1^{(d)}|_R \dots\dots\dots (3.31)$$

と (3.30) 式より定まる地表面加振力との関係を求める問題に帰着する。言換えると、基礎を分布圧力に置換えるとき、基盤層からの入射平面波に対する地盤一構造物系の総合振動特性は、自由表面のときの解（波動伝達特性）に、この解を reference とする基礎変位と基礎面分布圧力との関係を規定する応力型境界条件の剛体基礎の D.G.C. を表す解を加えることによって求めることができ、形式的には常に分離可能である。

ここに形式的というのは、基礎と地表面の間の境界条件として分布圧力のみを考えると、この応力に関する条件は最終的に満足されているが、両者の変形条件には全く触れていないからである。ところが、応力型境界条件の D.G.C. を求める段階ですでに剛体基礎が地表面に密着しているという条件が崩れており、このような解析法から得られる総合振動特性においても、一般にこうした厳密な条件は満足されないまま残されている。

いまひとつの問題は基礎面部分の地表面変位から剛体基礎としての変位をどのように評価するかという点である。応力型境界条件の剛体基礎の D.G.C. の問題に現われる剛体基礎としての変位（より厳密には基礎面部分の地表面変位で (3.31) 式の左辺で表わされるもの）は、基礎面内の一定点の変位あるいは面内に生じる変位の単純または荷重平均によって評価されるのが普通である¹¹⁾¹⁹⁾。したがって、(3.31) 式右辺第 2 項の波動伝達特性として基礎面に生じる変位についても、これと同様な評価法によって剛体基礎としての変位を定めるのが適当であろうと思われる。

4. 地盤一構造物系の総合振動特性の一般的表現

4.1 総合振動特性の一般的表現

本章では、多層地盤の基盤層から平面波が入射するときの波動媒体地盤—基礎周辺地盤—構造物という連成系の総合振動特性を、波動伝達特性と剛体基礎の D.G.C. とを用いて求める手順とその一般的表現を示そう。これは以下に示す 4 つの STEP を経て誘導することができるが、解析の前提として最初に次の 4 つの仮定をおく。

- ① 総合振動特性の表現が波動伝達特性と剛体基礎の D.G.C. によって分離して取扱える場合、すなわち、平面波入射による自由表面のときの基礎面位置の変位が先にあげた分離可能条件を満足する場合を対象にする。
- ② 総合振動特性は“変位”の形で表現する。（速度・加速度による場合も基盤層からの入射波の表現を速度・加速度にとるだけで全く同様に扱える。）
- ③ 基礎断面は長方形とする。（他の断面形、例えば円形などの場合も長さの基準量を変えるだけで同様に扱える。）
- ④ 構造物断面の剛心と重心は一致し、さらに基礎断面のそれらとも一致する。

なお解析に用いる剛体基礎の D.G.C. には基礎底面と地表面とが密着しているときの解を前提にしているが、本章の結果は基礎を分布圧力に置換える応力型境界条件の解を用いる場合にも適用できる。

STEP 1; 波動伝達特性——波動媒体地盤の振動特性——の表現

(3.11) 式を参照して波動伝達特性を次のように表現する。

$$\text{地 盤 内 } \left\{ \frac{a_{M,i}}{a_g} \right\} = \{g_{M,i}(\omega)\} \quad [\text{次数 3 の vector}] \dots\dots\dots (4.1a)$$

$$\text{基礎面位置 } \left\{ \frac{a_{B,k}}{a_g} \right\} = \{g_{B,k}(\omega)\} \quad [\text{次数 6 の vector}] \dots\dots\dots (4.1b)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned}
 &a_G; \text{ 基盤層からの入射波の変位振幅} \\
 &a'_{M,l}, g'_{M,l}(\omega); \text{ 地盤内の任意点の変位および } a_G \text{ に対するその波動伝達特性} \\
 &a'_{B,k}, g'_{B,k}(\omega); \text{ 基礎面位置の変位および } a_G \text{ に対するその波動伝達特性} \\
 &\left. \begin{aligned}
 &G; \text{ 入射波} \\
 &M; \text{ 地盤内の位置} \\
 &B; \text{ 基礎面位置}
 \end{aligned} \right\} \text{ を表わす suffix} \dots\dots\dots (4.2) \\
 &l; \text{ 変位の mode を表わす suffix } [l=1\sim u, 2\sim v, 3\sim w] \\
 &k; \text{ 入射平面波により地表面の基礎面位置に生じる変位の mode を表わす suffix} \\
 &\quad [k=1\sim u, 2\sim v, 3\sim w, 4\sim \phi_x, 5\sim \phi_y, 6\sim \phi_z]
 \end{aligned}$$

STEP 2: 剛体基礎の D.G.C.—基礎周辺地盤の振動特性—の表現

地表面にのる質量のない剛体基礎を加振したときの剛体基礎の D.G.C. およびこのとき地盤内の各点に生じる変位を, (3.13) 式を参照して次のように表現する。

$$\text{地盤内の伝達特性} \quad \left[\frac{a'_{B,l}}{a'_{B,j}} \right] = \left[\frac{a_{M,l} - a'_{M,l}}{a_{B,j} - a'_{B,j}} \right] = [g'_{M,jl}(\omega)] \dots\dots\dots [\text{次数 } 6 \times 3 \text{ の matrix}] \dots\dots\dots (4.3a)$$

$$\text{剛体基礎の D.G.C.} \quad \left[\frac{a'_{B,j}}{P_{jn}} \right] = \left[\frac{a_{B,j} - a'_{B,j}}{P_{jn}} \right] = [G_{jn}(\omega)] \dots\dots\dots [\text{次数 } 6 \times 2 \text{ の matrix}] \dots\dots\dots (4.3b)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned}
 &a_{M,l}, a'_{M,l}; \text{ 総合振動特性および波動伝達特性としての地盤内の任意点の変位} \\
 &a_{B,j}, a'_{B,j}; \text{ 総合振動特性および波動伝達特性としての基礎面位置 (あるいは基礎) の変位} \\
 &j; \text{ 基礎の変位の mode を表わす suffix ((4.2) 式の } k \text{ と同じ内容)} \quad [j=1\sim u, 2\sim v, 3\sim w, 4\sim \phi_x, 5\sim \phi_y, 6\sim \phi_z] \dots\dots\dots (4.4a) \\
 &P_{jn}; \text{ 基礎 (あるいは基礎面位置の地表面) が } a'_{B,j} \text{ なる変位をしたときに地盤から基礎に作用する復元力 } [n=1, 2] \\
 &g'_{M,lj}(\omega); \text{ 基礎変位 } a'_{B,j} \text{ に対する地盤内の各点の変位 } a'_{M,l} \text{ の伝達特性} \\
 &G_{jn}(\omega); \text{ 基礎変位 } a'_{B,j} \text{ と復元力 } P_{jn} \text{ の関係を規定する剛体基礎の D.G.C.}
 \end{aligned}$$

上式中の P_{jn} には, 前記の仮定④により各 $a'_{B,j}$ に対して次のものが存在する。

$$\left. \begin{aligned}
 &a'_{B,1}(=u_B) \text{ のとき } P_{11}(=P_{XH}), P_{12}(=M_{YH}) \\
 &a'_{B,2}(=v_B) \text{ のとき } P_{21}(=P_{YH}), P_{22}(=M_{XH}) \\
 &a'_{B,3}(=w_B) \text{ のとき } P_{31}(=P_{ZV}) \dots\dots\dots (4.4b) \\
 &a'_{B,4}(=\phi_x) \text{ のとき } P_{41}(=M_{XR}), P_{42}(=P_{YR}) \\
 &a'_{B,5}(=\phi_y) \text{ のとき } P_{51}(=M_{YR}), P_{52}(=P_{XR}) \\
 &a'_{B,6}(=\phi_z) \text{ のとき } P_{61}(=M_{ZT})
 \end{aligned}$$

() 内は物理量によるより具体的な表現で, 並進復元力 P の前の suffix は力の作用方向を, 後ののは作用

する力の種類を表わし、また回転復元力 M の前の suffix はその回転軸の方向を、後ののは作用する力の種類をそれぞれ表わす。

STEP 3: 構造物系の運動方程式の解の表現

(4.3b) 式において、剛体基礎の D.G.C. と波動伝達特性の表現があらかじめ求められているとすれば、 G_{jn} および $a'_{B,j}$ は既知である。そこで、基礎変位 $a''_{B,j}$ と地盤から基礎に作用する復元力 P_{jn} の関係を規定するこの (4.3b) 式を用いて、地盤に生じる復元力 P_{jn} がすべて同時に作用したときの構造物系の運動方程式を解き、その解を次のように伝達特性の形で表現する。

$$\text{構造物} \quad \left\{ \frac{a_{S,p}}{a_{B,k}} \right\} = \{g_{S,p}(\omega)\} \quad [\text{次数 6 の vector}] \dots\dots\dots (4.5a)$$

$$\text{基礎} \quad \left\{ \frac{a'_{B,j}}{a_{B,k}} \right\} = \left\{ \frac{a_{B,j} - a'_{B,j}}{a_{B,k}} \right\} = \{g_{B,j}(\omega)\} \quad [\text{次数 6 の vector}] \dots\dots\dots (4.5b)$$

ここに

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{S,p}, g_{S,p}(\omega); \text{ 構造物の各点の変位および自由表面のときの} \\ \quad \text{基礎面位置の変位 } a'_{B,k} \text{ に対するその伝達特性} \\ g_{B,j}(\omega); \text{ 同じく } a'_{B,k} \text{ に対する基礎変位 } a''_{B,j} \text{ の伝達特性} \\ S; \text{ 構造物内を表わす suffix} \\ p; \text{ 構造物の変位の mode を表わす suffix (4.2) 式の } k \text{ 同} \\ \quad \text{じ内容} \quad [p=1\sim u, 2\sim v, 3\sim w, 4\sim \phi_x, 5\sim \phi_y, 6\sim \phi_z] \end{array} \right. \dots\dots\dots (4.6)$$

(4.5a) 式において、構造物の変位 $a_{S,p}$ を生じる主要因となる基礎面位置の地表面変位 $a'_{B,k}$ が存在するので、 p に応じて k が定まる。また (4.5b) 式において、基礎変位の mode j に応じて基礎位置の地表面変位の mode k が定まる。すなわち、 j と同じ k があるときには j はその同じ suffix k をとり、 j と同じ k が存在しないときには $a''_{B,j}$ を生起する主原因になる $a'_{B,k}$ の k を選ぶ。

STEP 4: 地盤—構造物系の総合振動特性の表現

基盤層からの入射平面波に対する連成系の総合振動特性は、以上 3 つの STEP で得られた各式を用いることによって以下のように表現することができる。

$$\text{構造物} \quad \left\{ \frac{a_{S,p}}{a_G} \right\} = \left\{ \frac{a'_{B,k}}{a_G} \cdot \frac{a_{S,p}}{a_{B,k}} \right\} = \{g'_{B,k}(\omega) \cdot g_{S,p}(\omega)\} \quad [\text{次数 6 の vector}] \dots\dots\dots (4.7a)$$

$$\begin{aligned} \text{基礎} \quad \left\{ \frac{a_{B,j}}{a_G} \right\} &= \left\{ \frac{a'_{B,j} + a''_{B,j}}{a_G} \right\} = \left\{ \frac{a'_{B,j}}{a_G} + \frac{a'_{B,k}}{a_G} \cdot \frac{a''_{B,j}}{a_{B,k}} \right\} \\ &= \{g'_{B,j}(\omega) + g'_{B,k}(\omega) \cdot g_{B,j}(\omega)\} \quad [\text{次数 6 の vector}] \dots\dots\dots (4.7b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{地盤内} \quad \left\{ \frac{a_{M,l}}{a_G} \right\} &= \left\{ \frac{a'_{M,l} + a''_{M,l}}{a_G} \right\} = \left\{ \frac{a'_{M,l}}{a_G} + \sum_j \left(\frac{a'_{B,k}}{a_G} \cdot \frac{a''_{B,j}}{a_{B,k}} \cdot \frac{a''_{M,l}}{a_{B,j}} \right) \right\} \\ &= \{g'_{M,l}(\omega) + \sum_j [g'_{B,k}(\omega) \cdot g_{B,j}(\omega) \cdot g''_{M,j,l}(\omega)]\} \quad [\text{次数 3 の vector}] \\ &\dots\dots\dots (4.7c) \end{aligned}$$

(4.7a) 式において、(4.5a) 式の場合と同じ理由により p に応じて k が定まる。次に (4.7b) 式において、右辺第 1 項は波動伝達特性として実際に存在する変位の mode k のなかに j と一致するものがあるときにのみ値がある。また第 2 項では、(4.5b) 式の場合と同じ理由により j に応じて k が定まる。さらに (4.7c) 式でも同様に j に応じて k が定まる。

以上 4 つの STEP に現われてきた suffix について、特別ないくつかの場合に存在する suffix の値を示しておく。ここに示す以外の suffix に対応する成分は恒等的に零になる。

CASE 1; P 波または SV 波斜入射の場合

$$k = \begin{cases} 1 \sim u \\ 3 \sim w \\ 5 \sim \phi_y \end{cases}, \quad j = \begin{cases} 1 \sim u \\ 3 \sim w \\ 5 \sim \phi_y \end{cases}, \quad P_{jn} = \begin{cases} P_{11} \sim P_{XH}, P_{12} \sim M_{YH} \\ P_{31} \sim P_{ZV} \\ P_{51} \sim M_{YR}, P_{52} \sim P_{XR} \end{cases} \quad (4.8a)$$

CASE 2; SH 波斜入射の場合

$$k = \begin{cases} 2 \sim v \\ 6 \sim \phi_z \end{cases}, \quad j = \begin{cases} 2 \sim v \\ 4^* \sim \phi_x \\ 6 \sim \phi_z \end{cases}, \quad P_{jn} = \begin{cases} P_{21} \sim P_{YH}, P_{22} \sim M_{XH} \\ P_{41} \sim M_{XR}, P_{42} \sim P_{YR} \\ P_{61} \sim M_{ZT} \end{cases} \quad (4.8b)$$

[*6 $j=4$ に対しては $k=2$ を相手とする]

CASE 3; P 波鉛直入射の場合

$$k=3 \sim w, \quad j=3 \sim w, \quad P_{jn} = P_{31} \sim P_{ZV} \quad (4.8c)$$

CASE 4; SV 波鉛直入射の場合

$$k=1 \sim u, \quad j = \begin{cases} 1 \sim u \\ 5^* \sim \phi_y \end{cases}, \quad P_{jn} = \begin{cases} P_{11} \sim P_{XH}, P_{12} \sim M_{YH} \\ P_{51} \sim M_{YR}, P_{52} \sim P_{XR} \end{cases} \quad (4.8d)$$

[*7 $j=5$ に対しては $k=1$ を相手とする]

CASE 5; SH 波鉛直入射の場合

$$k=2 \sim v, \quad j = \begin{cases} 2 \sim v \\ 4^* \sim \phi_x \end{cases}, \quad P_{jn} = \begin{cases} P_{21} \sim P_{YH}, P_{22} \sim M_{XH} \\ P_{41} \sim M_{XR}, P_{42} \sim P_{YR} \end{cases} \quad (4.8e)$$

[*8 $j=4$ に対しては $k=2$ を相手とする]

以上 5 つの CASE を通じて

$$l=1 \sim u, 2 \sim v, 3 \sim w$$

はすべて共通である。

ここで、既往の研究^{14)~17)}のなかで扱われている、半無限地盤上の構造物が鉛直下方より入射する平面波の作用を受けるときの連成系の振動特性を求める問題と本論との関係に触れておこう。その場合は、地表面に平行な平面間で波動の位相差が存在するのみという 1 次元的な波動入射の問題になるが、連成系の応答が自由表面のときの地表面応答に対する伝達特性という形で表現されている。したがって、前記 **STEP 3** において、波動伝達特性として地表面の基礎面位置に生じる変位のなかに、このような 1 次元波動入射の場合と一致する部分があれば、この部分に対する構造物系の運動方程式の解の表現に、既往の研究で得られている解析的表現をそのままの形で用いることができる。それは、剛体基礎の D.G.C. に関する複素数としての形式的な表現が単純な半無限地盤でも複雑な多層地盤でも変わらないからである。

4.2 総合振動特性の一例——剛体基礎の場合——

総合振動特性の解析的表現の一例として、構造物系として最も単純な剛体長方形基礎についてこれを求めてみよう。以下の解析では前節の仮定がそのまま成立つとする。ここに基礎の寸法は $2b$ (x 方向) $\times 2c$ (y 方向)、底面から重心までの高さを l_0 、質量を m_0 、重心をとおり x, y, z 軸に平行な各軸まわりの慣性 moment を I_x, I_y, I_z とする。いま剛体基礎の重心と底面中心の変位成分を $\{u_S, v_S, w_S, \phi_{Sx}, \phi_{Sy}, \phi_{Sz}\}$ および $\{u_B, v_B, w_B, \phi_x, \phi_y, \phi_z\}$ によって表わす。微小変形の範囲で考えると次の関係式が成立つ。

$$u_S = u_B - l_0 \phi_y, \quad v_S = v_B + l_0 \phi_x, \quad w_S = w_B, \quad \phi_{Sx} = \phi_x, \quad \phi_{Sy} = \phi_y, \quad \phi_{Sz} = \phi_z \quad (4.9)$$

自由表面のときの基礎面位置の地表面変位に ' をつけ、これらの変位をそれぞれ reference にとった基礎底面の変位に " をつけて表わすと、

$$\begin{cases} u_B'' = u_B - u_B' = u_S + l_0 \phi_y - u_B', & \phi_x'' = \phi_x - \phi_x' \\ v_B'' = v_B - v_B' = v_S - l_0 \phi_x - v_B', & \phi_y'' = \phi_y - \phi_y' \\ w_B'' = w_B - w_B' = w_S - w_B', & \phi_z'' = \phi_z - \phi_z' \end{cases} \quad (4.10)$$

一方、剛体基礎の D.G.C. を次式で表示する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_B''}{P_{XH}e^{i\omega t}} \cdot b\bar{\mu} = G_{PXH}(a_0), \quad \frac{v_B''}{P_{YH}e^{i\omega t}} \cdot b\bar{\mu} = G_{PYH}(a_0), \quad \frac{w_B''}{P_{ZV}e^{i\omega t}} \cdot b\bar{\mu} = G_{PZV}(a_0) \\ \frac{u_B''/l_0}{M_{YH}e^{i\omega t}} \cdot b^3\bar{\mu} = G_{MYH}(a_0), \quad \frac{v_B''/l_0}{M_{XH}e^{i\omega t}} \cdot b^3\bar{\mu} = G_{MXH}(a_0) \\ \frac{\phi_x''}{M_{XR}e^{i\omega t}} \cdot b^3\bar{\mu} = G_{MXR}(a_0), \quad \frac{\phi_y''}{M_{YR}e^{i\omega t}} \cdot b^3\bar{\mu} = G_{MYR}(a_0), \quad \frac{\phi_z''}{M_{ZT}e^{i\omega t}} \cdot b^3\bar{\mu} = G_{MZT}(a_0) \\ \frac{l_0\phi_x''}{P_{YR}e^{i\omega t}} \cdot b\bar{\mu} = G_{PYR}(a_0), \quad \frac{l_0\phi_y''}{P_{XR}e^{i\omega t}} \cdot b\bar{\mu} = G_{PXR}(a_0) \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

地盤—構造物系の運動方程式は下式で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 \frac{d^2 u_s}{dt^2} = -(P_{XH} + P_{XR})e^{i\omega t}, \quad I_y \frac{d^2 \phi_y}{dt^2} = -(M_{YR} + M_{YH} + l_0 P_{XH} + l_0 P_{XR})e^{i\omega t} \\ m_0 \frac{d^2 v_s}{dt^2} = -(P_{YH} - P_{YR})e^{i\omega t}, \quad I_x \frac{d^2 \phi_x}{dt^2} = -(M_{XR} - M_{XH} - l_0 P_{YH} + l_0 P_{YR})e^{i\omega t} \dots (4.12) \\ m_0 \frac{d^2 w_s}{dt^2} = -P_{ZV}e^{i\omega t}, \quad I_z \frac{d^2 \phi_z}{dt^2} = -M_{ZT}e^{i\omega t} \end{array} \right.$$

(4.10) および (4.11) 式の関係代入し式全体の無次元化を行なえば、(4.12) 式は次の 4 組の方程式に帰着する。なお以下の変位成分の表現にはこれまでと同じ記号を用いているが、time factor $e^{i\omega t}$ をおとしたものである。

$$\left(\frac{1}{G_{PZV}} - k_T a_0^2 \right) \frac{w_s}{w_B} = \frac{1}{G_{PZV}} \quad \dots\dots\dots (4.13a)$$

$$\left(\frac{1}{G_{MZT}} - k_z a_0^2 \right) \frac{\phi_z}{\phi_z'} = \frac{1}{G_{MZT}} \quad \dots\dots\dots (4.13b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{G_{PXH}} - k_T a_0^2 \right) \frac{u_s}{u_B} + \left(\frac{1}{G_{PXH}} + \frac{1}{G_{PXR}} \right) \left(\frac{l_0 \phi_y'}{u_B'} \right) \frac{\phi_y}{\phi_y'} = \frac{1}{G_{PXH}} + \frac{1}{G_{PXR}} \left(\frac{l_0 \phi_y'}{u_B'} \right) \\ \left\{ \frac{1}{G_{MYR}} + \frac{1}{G_{MYH}} + \frac{l_0^2}{b^2} \left(\frac{1}{G_{PXH}} + \frac{1}{G_{PXR}} \right) - k_y a_0^2 \right\} \frac{\phi_y}{\phi_y'} + \left(\frac{1}{G_{MYH}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PXH}} \right) \left(\frac{l_0 \phi_y'}{u_B'} \right)^{-1} \frac{u_s}{u_B} \\ = \left(\frac{1}{G_{MYR}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PXR}} \right) + \left(\frac{1}{G_{MYH}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PXH}} \right) \left(\frac{l_0 \phi_y'}{u_B'} \right)^{-1} \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (4.13c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{G_{PYH}} - k_T a_0^2 \right) \frac{v_s}{v_B} - \left(\frac{1}{G_{PYH}} + \frac{1}{G_{PYR}} \right) \left(\frac{l_0 \phi_x'}{v_B'} \right) \frac{\phi_x}{\phi_x'} = \frac{1}{G_{PYH}} - \frac{1}{G_{PYR}} \left(\frac{l_0 \phi_x'}{v_B'} \right) \\ \left\{ \frac{1}{G_{MXR}} + \frac{1}{G_{MXH}} + \frac{l_0^2}{b^2} \left(\frac{1}{G_{PYH}} + \frac{1}{G_{PYR}} \right) - k_x a_0^2 \right\} \frac{\phi_x}{\phi_x'} - \left(\frac{1}{G_{MXH}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PYH}} \right) \left(\frac{l_0 \phi_x'}{v_B'} \right)^{-1} \frac{v_s}{v_B} \\ = \left(\frac{1}{G_{MXR}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PYR}} \right) - \left(\frac{1}{G_{MXH}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PYH}} \right) \left(\frac{l_0 \phi_x'}{v_B'} \right)^{-1} \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (4.13d)$$

ここに

$$k_T = \frac{m_0}{\rho b^3}, \quad k_T a_0^2 = \frac{m_0 \omega^2}{b \bar{\mu}}, \quad k_r = \frac{I_r}{\rho b^5}, \quad k_r a_0^2 = \frac{I_r \omega^2}{b^3 \bar{\mu}} \quad [r = x, y, z] \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

すなわち、以上の諸式において

- (4.13a) 式は z 方向の上下振動,
- (4.13b) 式は z 軸まわりの捩れ振動,
- (4.13c) 式は x 方向の並進と y 軸まわりの回転の連成振動,
- (4.13d) 式は y 方向の並進と x 軸まわりの回転の連成振動,

のそれぞれ運動方程式である。また連成系の振動はこれら 4 組の独立な方程式に帰着することから、上記の 4 種の振動は互いに独立であることがわかる。

上の 4 式を解き (4.10) 式の関係を用いれば、剛体基礎の重心および底面中心の変位応答の伝達特性 $\{g_{s,p}(a_0)\}$ および $\{g_{B,j}(a_0)\}$ が下式のように得られる。

$$\begin{aligned} \{g_{s,p}(a_0)\} &= \left\{ \frac{u_s}{u_B}, \frac{v_s}{v_B}, \frac{w_s}{w_B}, \frac{\phi_x}{\phi'_x}, \frac{\phi_y}{\phi'_y}, \frac{\phi_z}{\phi'_z} \right\}^T \\ &= \left\{ \frac{D_u}{D_{uy}}, \frac{D_v}{D_{vx}}, \frac{1}{D_w}, \frac{D_x}{D_{vx}}, \frac{D_y}{D_{uy}}, \frac{1}{D_z} \right\}^T \dots\dots\dots (4.15a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{g_{B,j}(a_0)\} &= \left\{ \frac{u_B''}{u_B}, \frac{v_B''}{v_B}, \frac{w_B''}{w_B}, \frac{\phi_x''}{\phi'_x}, \frac{\phi_y''}{\phi'_y}, \frac{\phi_z''}{\phi'_z} \right\}^T \\ &= \left\{ \frac{D_u + C_y D_y - D_{uy}}{D_{uy}}, \frac{D_v + C_x D_x - D_{vx}}{D_{vx}}, \frac{1 - D_w}{D_w}, \frac{D_x - D_{vx}}{D_{vx}}, \frac{D_y - D_{uy}}{D_{uy}}, \frac{1 - D_z}{D_z} \right\}^T \\ &\dots\dots\dots (4.15b) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} D_w &= 1 - k_T a_0^2 G_{PZV}, \quad D_z = 1 - k_T a_0^2 G_{MZT} \\ D_{uy} &= \left(\frac{1}{G_{MYR}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PXR}} - k_y a_0^2 \right) \left(\frac{1}{G_{PXH}} - k_T a_0^2 \right) - \left(\frac{1}{G_{MYH}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PXH}} \right) \left(\frac{1}{G_{PXR}} + k_T a_0^2 \right) \\ D_{vx} &= \left(\frac{1}{G_{MXR}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PYR}} - k_x a_0^2 \right) \left(\frac{1}{G_{PYH}} - k_T a_0^2 \right) - \left(\frac{1}{G_{MXH}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PYH}} \right) \left(\frac{1}{G_{PYR}} + k_T a_0^2 \right) \\ D_u &= \frac{1}{G_{PXH}} \left(\frac{1 - C_y}{G_{MYR}} - k_y a_0^2 \right) + \frac{C_y}{G_{PXR}} \left(\frac{1 - C_y^{-1}}{G_{MYH}} - k_y a_0^2 \right), \quad C_y = \frac{l_0 \phi'_y}{u_B} \\ D_v &= \frac{1}{G_{PYH}} \left(\frac{1 - C_x}{G_{MXR}} - k_x a_0^2 \right) + \frac{C_x}{G_{PYR}} \left(\frac{1 - C_x^{-1}}{G_{MXH}} - k_x a_0^2 \right), \quad C_x = -\frac{l_0 \phi'_x}{v_B} \\ D_y &= \left(\frac{1}{G_{MYR}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PXR}} \right) \left(\frac{1}{G_{PXH}} - k_T a_0^2 \right) - \left(\frac{1}{G_{MYH}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PXH}} \right) \left(\frac{1}{G_{PXR}} + k_T a_0^2 C_y^{-1} \right) \\ D_x &= \left(\frac{1}{G_{MXR}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PYR}} \right) \left(\frac{1}{G_{PYH}} - k_T a_0^2 \right) - \left(\frac{1}{G_{MXH}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PYH}} \right) \left(\frac{1}{G_{PYR}} + k_T a_0^2 C_x^{-1} \right) \\ &\dots\dots\dots (4.16) \end{aligned}$$

以上の解析を総括すれば、総合振動特性を求める手順は次のようになる。(4.3b)式で定義される剛体基礎の D.G.C. matrix

$$\begin{bmatrix} G_{PXH} & G_{PYH} & G_{PZV} & G_{MXR} & G_{MYR} & G_{MZT} \\ G_{MYH} & G_{MXH} & 0 & G_{PYR} & G_{PXR} & 0 \end{bmatrix}^T$$

および (4.3a) 式で定義される地盤内の任意点の応答を表わす伝達特性 matrix を既知として [STEP 2], (4.11) 式の関係から与えられる地盤の復元力を用いて地盤—剛体基礎という連成系の運動方程式を解けば, (4.5) 式で定義される構造物 (剛体基礎の重心) および基礎 (剛体基礎の底面中心) の応答を表わす伝達特性 vector が (4.15) 式のように求められる [STEP 3]。そこで (4.1) 式で定義される波動伝達特性 vector が与えられれば [STEP 1], 連成系の総合振動特性は (4.7) 式によって表わされることになるのである [STEP 4]。

最後に、特別ないくつかの場合について、総合振動特性の表現式を具体的に求めておこう。

CASE A: P 波または SV 波斜入射の場合

(4.8a) 式を参照すると、連成系の振動が (4.13a) および (4.13c) 式の 2 組の独立な mode に分離できるので、構造物および基礎の応答伝達特性 vector (4.15) 式は次のようになる。

$$\{g_{S,p}(a_0)\} = \left\{ \frac{D_u}{D_{uy}}, 0, \frac{1}{D_w}, 0, \frac{D_v}{D_{vy}}, 0 \right\}^T \dots\dots\dots (4.17a)$$

$$\{g_{B,j}(a_0)\} = \left\{ \frac{D_u + C_v D_v - D_{uy}}{D_{uy}}, 0, \frac{1 - D_w}{D_w}, 0, \frac{D_v - D_{vy}}{D_{vy}}, 0 \right\}^T \dots\dots\dots (4.17b)$$

(2.44) および (3.22) 式を参照すると、波動伝達特性 vector (4.1b) 式は次のように表現される。

$$\{g'_{B,k}(a_0)\}_q = \left\{ \frac{u'_B}{A_q}, 0, \frac{w'_B}{A_q}, 0, \frac{\phi'_y}{A_q/H} \right\}^T = E_q \{J_{1q}, 0, J_{2q}, 0, -ia_0 \xi J_{2q}, 0\}^T \dots\dots\dots (4.18)$$

ここに

$$E_q = \begin{cases} h'_{N+1} \\ \kappa'_{N+1}/2 \end{cases}, \quad J_{1q} = \begin{cases} j'_{11} \\ j'_{12} \end{cases}, \quad J_{2q} = \begin{cases} j'_{21} \\ j'_{22} \end{cases}, \quad q = \begin{cases} P & ; \text{ P 波入射} \\ SV & ; \text{ SV 波入射} \end{cases} \dots\dots\dots (4.19)$$

したがって、構造物および基礎の総合振動特性は (4.7) 式より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{a_{S,p}}{a_G} \right\}_q &= \left\{ \frac{u_S}{A_q}, \frac{v_S}{A_q}, \frac{w_S}{A_q}, \frac{\phi_x}{A_q/H}, \frac{\phi_y}{A_q/H}, \frac{\phi_z}{A_q/H} \right\}^T \\ &= E_q \left\{ \frac{D_u}{D_{uy}} J_{1q}, 0, \frac{1}{D_w} J_{2q}, 0, -ia_0 \xi \frac{D_v}{D_{vy}} J_{2q}, 0 \right\}^T \dots\dots\dots (4.20a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{a_{B,j}}{a_G} \right\}_q &= \left\{ \frac{u_B}{A_q}, \frac{v_B}{A_q}, \frac{w_B}{A_q}, \frac{\phi_x}{A_q/H}, \frac{\phi_y}{A_q/H}, \frac{\phi_z}{A_q/H} \right\}^T \\ &= E_q \left\{ \frac{D_u + C_v D_v}{D_{uy}} J_{1q}, 0, \frac{1}{D_w} J_{2q}, 0, -ia_0 \xi \frac{D_v}{D_{vy}} J_{2q}, 0 \right\}^T \dots\dots\dots (4.20b) \end{aligned}$$

CASE 2: SH 波斜入射の場合

(4.8b) 式を参照すると k と j が対応していないので、この場合は少し表現を変えなければならない。すなわち、(3.26) 式を参照して構造物および基礎の応答を表わす伝達特性 vector (4.15) 式を次のように書変える。

$$\{g_{S,p}(a_0)\} = \left\{ 0, \frac{v_S}{v'_B}, 0, \frac{l_0 \phi_x}{v'_B}, 0, \frac{\phi_z}{\phi'_z} \right\}^T = \left\{ 0, \frac{D'_v}{D'_{vx}}, 0, \frac{D'_x}{D'_{vx}}, 0, \frac{1}{D'_z} \right\}^T \dots\dots\dots (4.21a)$$

$$\{g_{B,j}(a_0)\} = \left\{ 0, \frac{v'_B}{v'_B}, 0, \frac{l_0 \phi'_x}{v'_B}, 0, \frac{\phi'_z}{\phi'_z} \right\}^T = \left\{ 0, \frac{D'_v + D'_x - D'_{vx}}{D'_{vx}}, 0, \frac{D'_x}{D'_{vx}}, 0, \frac{1 - D'_z}{D'_z} \right\}^T \dots\dots\dots (4.21b)$$

ここに

$$\begin{aligned} D'_v &= D_v|_{c_x=0} = \frac{1}{G_{PYH}} \left(\frac{1}{G_{MXR}} - k_x a_0^2 \right) - \frac{1}{G_{PYR} G_{MXH}} \dots\dots\dots (4.22) \\ D'_x &= C_x D_x|_{c_x=0} = -k_T a_0^2 \left(\frac{1}{G_{MXH}} + \frac{l_0^2/b^2}{G_{PYH}} \right), \quad D'_{vx} = D_{vx}|_{c_x=0} = D_{vx} \end{aligned}$$

(2.72a) および (3.26) 式を参照すれば、波動伝達特性 vector (4.1b) 式は次のように表現される。

$$\{g'_{B,k}(a_0)\} = \left\{ 0, \frac{v'_B}{A_{SV}}, 0, 0, 0, \frac{\phi'_z}{A_{SV}/H} \right\}^T = \left\{ 0, j_{11}^{-1}, 0, 0, 0, -\frac{i}{1+c/b} a_0 \xi j_{11}^{-1} \right\}^T \dots\dots\dots (4.23)$$

したがって、構造物および基礎の総合振動特性は (4.7) 式より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{a_{S,p}}{a_G} \right\} &= \left\{ \frac{u_S}{A_{SV}}, \frac{v_S}{A_{SV}}, \frac{w_S}{A_{SV}}, \frac{l_0 \phi_{Sx}}{A_{SV}}, \frac{l_0 \phi_{Sy}}{A_{SV}}, \frac{\phi_{Sz}}{A_{SV}/H} \right\}^T \\ &= \left\{ 0, \frac{D'_v}{D'_{vx}} j_{11}^{-1}, 0, \frac{D'_x}{D'_{vx}} j_{11}^{-1}, 0, -\frac{i}{1+c/b} a_0 \xi \frac{j_{11}^{-1}}{D'_z} \right\}^T \dots\dots\dots (4.24a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{a_{B,j}}{a_G} \right\} &= \left\{ \frac{u_B}{A_{SV}}, \frac{v_B}{A_{SV}}, \frac{w_B}{A_{SV}}, \frac{l_0 \phi_x}{A_{SV}}, \frac{l_0 \phi_y}{A_{SV}}, \frac{\phi_z}{A_{SV}/H} \right\}^T \\ &= \left\{ 0, \frac{D'_v + D'_x}{D'_{vx}} j_{11}^{-1}, 0, \frac{D'_x}{D'_{vx}} j_{11}^{-1}, 0, -\frac{i}{1+c/b} a_0 \xi \frac{j_{11}^{-1}}{D'_z} \right\}^T \dots\dots\dots (4.24b) \end{aligned}$$

CASE 3: P 波鉛直入射の場合

(4. 8c) 式を参照すると、基礎に生じる振動 mode は上下動のみであるから、これまでの vector 表現を 1 個の scalar で表わすことができる。結果は次のとおりである。

● 構造物および基礎の応答の伝達特性

$$g_{S,3}(a_0) = \frac{w_S}{w_B} = \frac{1}{D_w}, \quad g_{B,3}(a_0) = \frac{w_B^*}{w_B} = \frac{1-D_w}{D_w} \quad (4. 25)$$

● 波動伝達特性

$$g'_{B,3}(a_0) = \frac{w_B'}{A_p} = h'_{N+1} j'_{21} \quad (4. 26)$$

● 構造物および基礎の総合振動特性

$$\frac{a_{S,3}}{a_G} = \frac{w_S}{A_p} = \frac{h'_{N+1}}{D_w} j'_{21} = \frac{w_B}{A_p} = \frac{a_{B,3}}{a_G} \quad (4. 27)$$

CASE 4: SV 波鉛直入射の場合

(4. 8d) 式を参照すると、基礎に生じる振動 mode は (4. 13c) 式の連成振動のみでその成分は 2 つであるから、これまでの vector 表現を 2 個の scalar 表示によって結果のみを示す。

● 構造物および基礎の応答の伝達特性

$$g_{S,1}(a_0) = \frac{u_S}{u_B} = \frac{D'_u}{D'_{uy}}, \quad g_{S,5}(a_0) = \frac{l_0 \phi_{Sy}}{u_B'} = \frac{D'_y}{D'_{uy}} \quad (4. 28a)$$

$$g_{B,1}(a_0) = \frac{u_B^*}{u_B} = \frac{D'_u + D'_y - D'_{uy}}{D'_{uy}}, \quad g_{B,5}(a_0) = \frac{l_0 \phi_y^*}{u_B'} = g_{S,5}(a_0) \quad (4. 28b)$$

ここに

$$\begin{cases} D'_u = D_u |_{c_y=0} = \frac{1}{G_{PXH}} \left(\frac{1}{G_{MYR}} - k_y a_0^2 \right) - \frac{1}{G_{PXR} G_{MYH}} \\ D'_y = C_y D_y |_{c_y=0} = -k_T a_0^2 \left(\frac{1}{G_{MYH}} + \frac{l_0^2/b^3}{G_{PXR}} \right), \quad D'_{uy} = D_{uy} |_{c_y=0} = D_{uy} \end{cases} \quad (4. 29)$$

● 波動伝達特性

$$g'_{B,1}(a_0) = \frac{u_B'}{A_{SV}} = \frac{\kappa'_{N+1}}{2} j'_{12} \quad (4. 30)$$

● 構造物および基礎の総合振動特性

$$\frac{a_{S,1}}{a_G} = \frac{u_S}{A_{SV}} = \frac{\kappa'_{N+1}}{2} j'_{12} \frac{D'_u}{D'_{uy}}, \quad \frac{a_{S,5}}{a_G} = \frac{l_0 \phi_{Sy}}{A_{SV}} = \frac{\kappa'_{N+1}}{2} j'_{12} \frac{D'_y}{D'_{uy}} \quad (4. 31a)$$

$$\frac{a_{B,1}}{a_G} = \frac{u_B}{A_{SV}} = \frac{\kappa'_{N+1}}{2} j'_{12} \frac{D'_u + D'_y}{D'_{uy}}, \quad \frac{a_{B,5}}{a_G} = \frac{l_0 \phi_y}{A_{SV}} = \frac{a_{S,5}}{a_G} \quad (4. 31b)$$

CASE 5: SH 波鉛直入射の場合

上述の CASE 4 と全く同様にして求められるので結果のみを示す。

● 構造物および基礎の応答の伝達特性

$$g_{S,2}(a_0) = \frac{v_S}{v_B} = \frac{D'_v}{D'_{vx}}, \quad g_{S,4}(a_0) = \frac{l_0 \phi_{Sx}}{v_B'} = \frac{D'_x}{D'_{vx}} \quad (4. 32a)$$

$$g_{B,2}(a_0) = \frac{v_B^*}{v_B} = \frac{D'_v + D'_x - D'_{vx}}{D'_{vx}}, \quad g_{B,4}(a_0) = \frac{l_0 \phi_x^*}{v_B'} = g_{S,4}(a_0) \quad (4. 32b)$$

● 波動伝達特性

$$g'_{B,2}(a_0) = \frac{v_B'}{A_{SH}} = j'_{11} \quad (4. 33)$$

● 構造物および基礎の総合振動特性

$$\frac{a_{S,2}}{a_G} = \frac{v_S}{A_{SH}} = j_{11}^{-1} \frac{D'_x}{D'_{vx}}, \quad \frac{a_{S,4}}{a_G} = \frac{l_0 \phi_{sx}}{A_{SH}} = j_{11}^{-1} \frac{D'_x}{D'_{vx}} \quad (4.34a)$$

$$\frac{a_{B,2}}{a_G} = \frac{v_B}{A_{SH}} = j_{11}^{-1} \frac{D'_x + D'_x}{D'_{vx}}, \quad \frac{a_{B,4}}{a_G} = \frac{l_0 \phi_x}{A_{SH}} = \frac{a_{S,4}}{a_G} \quad (4.34b)$$

5. む す び

本研究は、地震動の作用を受ける地盤と構造物の連成振動現象が、①地震基盤の存在、②ここから入射する基盤地震動が地表層付近の地層（波動媒体地盤）によって受ける増巾作用、③構造物と基礎周辺地盤との動的相互作用、の3つの構成要因により説明されうとの前提に立ち、地盤の動特性と構造物との動的相互作用に関する筆者等の従来の研究を総括するという立場から行なったものである。線形粘弾性媒体からなる多層地盤を対象に、その基盤層から調和平面波が一般に斜入射する場合について、まず、構造物が存在しない自由表面のときの増巾作用を表わす波動伝達特性の解析的表現を導いた。次いで、地震基盤一波動媒体地盤—基礎周辺地盤—構造物という連成系の総合振動特性を、上に得られた波動伝達特性と基礎周辺地盤の振動特性を表わす伝達関数の表現とに分離し、両者の組合わせて表現しようとする観点から、基礎周辺地盤の振動特性を表わす後者の問題のもつ物理的意味を明らかにし、総合振動特性の解析法を示した。さらに、とくに伝達関数の表現として剛体基礎の D.G.C. を選んだ場合の分離可能な条件を提示し、実際に近似的にあるいは厳密な意味において分離できる場合を明らかにした。最後に、連成系の総合振動特性を求める解析手順とその一般的な表現を導き、剛体基礎を構造物系の例にとって具体的な解析的表現を示した。

例題の数値計算は行なわなかったが、得られた主要な結論を要約すれば次のようになる。

(1) 地盤—構造物系の総合振動特性の表現において、波動伝達特性をこの表現から分離するとき、構造物の存在による影響を表わす残りの部分は、構造物の基礎周辺地盤の振動特性を意味する次のような2種の境界値問題の解の組合わせに帰着する。すなわち、地表面の基礎面位置に剛な基礎としての一般的な変位が強制加振変位として作用し、他の地表面は自由表面という場合の解（剛体基礎の D.G.C.）と、波動伝達特性として同じ基礎面位置に生じる変位が、その基礎面にのみ強制加振変位として作用する場合の解との差によって表わされるのである。

(2) 多層地盤の基盤層から P, SV または SH の平面波が2次的に斜に入射するとき、上記(1)の後者の境界値問題は地表面の基礎面位置にのみ e^{-ix} (i は wave number, x は波動の伝播方向の座標) を分布関数とする強制加振変位が作用する場合に帰着する。

(3) 同一入射平面波に対して構造物が存在しないときに波動伝達特性として地表面に生じる構造物の基礎面位置の変位が剛体的変位で表現されること、これが本論で設定された問題——地盤—構造物系の総合振動特性を波動伝達特性と剛体基礎の D.G.C. の組合わせで表現すること——に対する分離可能条件である。

(4) 平面波が多層地盤の基盤層から斜に入射するとき、基礎底面と地表面が密着する条件に対する剛体基礎の D.G.C. を用いて、連成系の総合振動特性を分離表現することは一般にはできない。

(5) 地表面に生じる平面波の波長が基礎巾に比べて相当長いとき、あるいは地表面への入射波の進行方向が鉛直入射に近いとき、地表面と基礎との間に多少の相対すべりを許すという条件をさらに導入すれば、近似的な意味において分離可能である。

(6) 平面波が鉛直に入射するとき、地盤内に存在する波動はすべて鉛直方向に進行し、一次元的な平面波伝播の問題に帰着する。この場合には厳密な意味において分離可能条件が満足される。

(7) 基礎を分布圧力に置換えて解かれた剛体基礎の D.G.C. を対象にする場合、このような境界条件に対する両者の分離は形式的には常に可能である。しかし、基礎と地盤との接触条件は剛体基礎の評価の段階ですでに崩れており、総合振動特性においても満足されてはいない。

(8) 上記のように近似的あるいは厳密な意味において分離可能条件が満されるとき、連成系の総合振動

特性は次のような手順を経て決定される。すなわち、まず、①基盤地震動の性質と地盤構成を知って、地表に構造物系が存在しない自由表面のときの波動伝達特性を求め、次いで、②基礎の性質と連成系に生じる振動 mode を知って、自重のない基礎に作用する必要な mode の加振力に対する剛体基礎の D.G.C. の表現を導き、総合振動特性としての基礎の変位と波動伝達特性によって生じる基礎面位置の地表面変位との差の変位から定まる地盤の復元力を評価し、さらに、③構造物系の性質を知り、これらの復元力を構造物系に作用する地盤反力として与えて、地盤—構造物系の運動方程式の解を波動伝達特性から定まる基礎位置の地表面変位に対する伝達特性の形で求め、最後に、④以上 3 つの STEP で得られた伝達特性の解の表現を組合わせることによって、基盤層からの入射平面波に対する構造物、基礎および地盤内の任意点における総合振動特性が定められることになる。

(9) 上記のような手順を経て連成系の総合振動特性を求めることができるとき、波動伝達特性に関する従来の諸研究の成果は STEP ①において、また剛体基礎の D.G.C. に関するものは STEP ②で、さらに半無限地盤上の構造物系が鉛直に入射する平面波の作用を受けるときの振動特性に関する成果は STEP ③において、それぞれほとんどそのままの形で活用することができ、これらはすべて STEP ④において、地震基盤から波動媒体地盤と基礎周辺地盤を経て構造物に至る連成系の総合振動特性という形で総括されるわけである。

最後に、本論の解析法に含まれるいくつかの問題点に触れておきたい。

(1) 筆者等の従来の研究の流れを総括する立場から、本論では、地表面上におかれた質量のない剛体基礎が各種加振力の作用を受ける境界値問題の解を剛体基礎の D.G.C. と名づけ、これを分離の対象にするという前提をおいた。その結果、平面波が斜入射する場合、基礎底面と地表面が密着する条件に対して、このような分離は一般にはできないという結論が導かれた。しかし、地盤—構造物系の総合振動特性の誘導は、波動伝達特性の問題と基礎面加振による周辺地盤の 2 種の境界値問題との組合わせに帰着させることができ、この 2 つの問題の解を組合わせることによって取扱えることが示された。後者の 2 種の境界値問題については、まだ特別な場合に部分的にしか解析的な解が求められていないので、多層粘弾性地盤に対する剛体基礎の D.G.C. の一般解を得るとともに、波動伝達特性より定まる既知変位による基礎面強制加振の一般解を得ることが今後の課題になろう。

(2) 多層粘弾性地盤の波動伝達特性の解析的表現を導いた第 2 章では、一般性を失なわないという立場から 2 次元問題に限定したが、これらの結果の 3 次元問題への拡張は容易である。しかし、地震基盤に達する基盤地震動を境界面に斜入射する平面波として扱えることが、地震工学の立場から妥当かどうかについては、問題が残されていると考える。その判断は実際に生起する地震記象の集積にまたねばならないであろう。そのさい任意の入射波形による解を得るには、本論の解を wave number に関して積分する結果になるので、本論の解は 2 次元問題の基本解としての性格をもっているのである。

(3) 本論の解析法に基づいて総合振動特性の解析的表現が求められ、また地盤および構造物系の性質を定める物理量を与えて、数値的にその総合振動特性を表現できるとすれば、次の段階は地震基盤から何らかの地震波動が入射する場合に連成系の地震応答を求める問題になる。言換えると、時間に関して Fourier 変換された frequency の領域における系の伝達関数を知って、入力となる地震波動の Fourier 変換との積を逆変換する、すなわち convolution を求める問題である。この演算は原理的には実現可能であっても、手法的に完全には解決されておらず、能率のよい巧妙な一般的手法の開発が今後に残された課題のひとつとなろう。しかし、実際の地震に伴う現象に現われる振動数の領域には明らかに上下限が存在すると考えてよいので、発達した高性能の電子計算機を利用して、この限定された振動数領域内で直接的に逆変換の演算を実行し、工学的な解を求めることは、現段階でも労力をいとわなければ可能である。

参 考 文 献

- 1) 小林啓美・鏡味洋史：波動理論を用いた成層構造の地震応答数値解析法について，日本地震工学シンポジウム (1966) 講演集，昭 41. 10，pp. 15-20.
- 2) Rascón, O. A. and C. A. Cornell: A Physically Based Model to Simulate Strong Earthquake Records on Firm Ground, Proceedings of the Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Vol. I, 1969, pp. A1-84-96.
- 3) Seed, H. B., I. M. Idriss and F. W. Kiefer: Characteristics of Rock Motions during Earthquakes, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 95, No. SM5, 1969, pp. 1199-1218.
- 4) Kanai, K.: Relation between the Nature of Surface Layer and the Amplitudes of Earthquake Motions, Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo, Vol. 30, Part 1, 1952, pp. 31-37.
- 5) Kanai, K.: The Requisite Conditions for the Predominant Vibration of Ground, Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo, Vol. 35, Part 3, 1957, pp. 457-471.
- 6) Herrera, I. and E. Rosenbluth: Response Spectra on Stratified Soil, Proceedings of the Third World Conference on Earthquake Engineering, Vol. I, 1965, pp. I-44-60.
- 7) Kobri, T. and R. Minai: One-Dimensional Wave-Transfer Functions of the Linear Viscoelastic Multi-Layered Half-Space, Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Vol. 18, Part 4, No. 148, 1969, pp. 27-64.
- 8) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有：不均質粘弾性地盤の波動伝達特性について，京都大学防災研究所年報，第 13 号 A，昭 45. 3，pp. 213-232.
- 9) Lysmer, J. and F. E. Richart: Dynamic Response of Footings to Vertical Loading, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 92, No. SM1, 1966, pp. 65-91.
- 10) 田治見宏：耐震理論に関する基礎的研究，東京大学生産技術研究所報告，第 8 巻，第 9 号，1959，pp. 170-215.
- 11) Kobori, T. and T. Suzuki: Foundation Vibrations on a Viscoelastic Multi-Layered Medium, Proceedings of the Third Japan Earthquake Engineering Symposium-1970, 1970, pp. 493-500.
- 12) Kobori, T., R. Minai and T. Suzuki: The Dynamical Ground Compliance of a Rectangular Foundation on a Viscoelastic Stratum, Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Vol. 20, Part 4, No. 183, 1971, pp. 289-329.
[基礎を分布圧力に置換えた近似解としての“剛体基礎の D.G.C.”を扱った研究の系列はこの論文の参考文献に詳しい]
- 13) Bielak, J.: Earthquake Response of Building-Foundation Systems, Ph. D. Thesis presented to California Institute of Technology, 1971.
[基礎と地盤が密着する混合境界値問題として扱った厳密解としての“剛体基礎の D.G.C.”に関する研究の系列はこの論文の参考文献に詳しい]
- 14) Toriumi, I., Y. Sato and R. Yamaguchi: Vibrations in Foundation, Structure and Its Vicinity on the Elastic Ground, Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering, 1960, pp. 1413-1429.
- 15) Thomson, W. T.: A Survey of the Coupled Ground-Building Vibration, Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering, 1960, pp. 833-847.
- 16) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有：弾性地盤上の構造物の動特性について，京都大学防災研究所年報，第 9 号，昭 41. 3，pp. 193-224.
- 17) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有・日下部馨：長方形基礎をもつ構造物の動特性，日本地震工学シンポジウム (1966) 講演集，昭 41. 10，pp. 273-278.

- 18) Whitman, R. V.: Equivalent Lumped System for Structure Founded upon Stratum of Soil, Proceedings of the Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Vol. III, 1969, pp. A6-133-142.
- 19) Kashio, J.: Steady State Response of a Circular Disk Resting on a Layered Medium, Ph. D. Thesis presented to Rice University, 1970.
- 20) Haskell, N. A.: The Dispersion of Surface Waves of Multi-Layered Media, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 43, No. 1, 1953, pp. 17-34.

APPENDIX 主要な matrix の element (無次元表現)

1. P 波または SV 波斜入射の場合

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_m &= \begin{bmatrix} -\frac{\xi}{h'^2} C_\alpha & i \frac{2\beta}{\kappa'^2} S_\beta & -i \frac{\xi}{h'^2} S_\alpha & \frac{2\beta}{\kappa'^2} C_\beta \\ i \frac{\alpha}{h'^2} S_\alpha & \frac{2\xi}{\kappa'^2} C_\beta & \frac{\alpha}{h'^2} C_\alpha & i \frac{2\xi}{\kappa'^2} S_\beta \\ -i \frac{2\xi\alpha}{h'^2} S_\alpha & 2 \frac{\kappa'^2 - 2\xi^2}{\kappa'^2} C_\beta & -\frac{2\xi\alpha}{h'^2} C_\alpha & i 2 \frac{\kappa'^2 - 2\xi^2}{\kappa'^2} S_\beta \\ \frac{\kappa'^2 - 2\xi^2}{h'^2} C_\alpha & i \frac{4\xi\beta}{\kappa'^2} S_\beta & i \frac{\kappa'^2 - 2\xi^2}{h'^2} S_\alpha & \frac{4\xi\beta}{\kappa'^2} C_\beta \end{bmatrix}_m \\
 G_m &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \{g_s(a_0)\}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \{g_s(a_0)\}^{-1} \end{bmatrix}_m, \quad \begin{cases} S_\alpha = \sin(a_0 \alpha Z) \\ S_\beta = \sin(a_0 \beta Z) \\ C_\alpha = \cos(a_0 \alpha Z) \\ C_\beta = \cos(a_0 \beta Z) \end{cases} \\
 \bar{C}_m &= \begin{bmatrix} -\frac{\xi}{h'^2} & 0 & 0 & \frac{2\beta}{\kappa'^2} \\ 0 & \frac{2\xi}{\kappa'^2} & \frac{\alpha}{h'^2} & 0 \\ 0 & 2 \frac{\kappa'^2 - 2\xi^2}{\kappa'^2} & -2 \frac{\xi\alpha}{h'^2} & 0 \\ \frac{\kappa'^2 - 2\xi^2}{h'^2} & 0 & 0 & \frac{4\xi\beta}{\kappa'^2} \end{bmatrix}_m, \quad \bar{C}_m^{-1} = \begin{bmatrix} -2\xi \frac{h'^2}{\kappa'^2} & 0 & 0 & -\frac{h'^2}{\kappa'^2} \\ 0 & \xi & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa'^2 - 2\xi^2}{\alpha} \frac{h'^2}{\kappa'^2} & -\frac{\xi}{\alpha} \frac{h'^2}{\kappa'^2} & 0 \\ -\frac{\kappa'^2 - 2\xi^2}{2\beta} & 0 & 0 & \frac{\xi}{2\beta} \end{bmatrix}_m \\
 \bar{E}_m &= \frac{1}{\kappa_m'^2} \begin{bmatrix} 2\xi^2(C_\alpha' + C_\beta') - \kappa'^2 C_\beta' & i\xi \left[2\beta S_\beta' + \frac{\kappa'^2 - 2\xi^2}{\alpha} S_\alpha' \right] \\ -i\xi \left[2\alpha S_\alpha' + \frac{\kappa'^2 - 2\xi^2}{\beta} S_\beta' \right] & 2\xi^2(C_\alpha' + C_\beta') - \kappa'^2 C_\alpha' \\ i \left[4\xi^2 \alpha S_\alpha' - \frac{(\kappa'^2 - 2\xi^2)^2}{\beta} S_\beta' \right] & 2\xi(\kappa'^2 - 2\xi^2)(C_\alpha' + C_\beta') \\ -2\xi(\kappa'^2 - 2\xi^2)(C_\alpha' + C_\beta') & i \left[4\xi^2 \beta S_\beta' - \frac{(\kappa'^2 - 2\xi^2)^2}{\alpha} S_\alpha' \right] \\ i \left[\frac{\xi^2}{\alpha} S_\alpha' - \beta S_\beta' \right] & \xi(C_\alpha' + C_\beta') \\ -\xi(C_\alpha' + C_\beta') & i \left[\frac{\xi^2}{\beta} S_\beta' - \alpha S_\alpha' \right] \\ 2\xi^2(C_\alpha' + C_\beta') - \kappa'^2 C_\beta' & i\xi \left[2\alpha S_\alpha' + \frac{\kappa'^2 - 2\xi^2}{\beta} S_\beta' \right] \\ -i\xi \left[2\beta S_\beta' + \frac{\kappa'^2 - 2\xi^2}{\alpha} S_\alpha' \right] & 2\xi^2(C_\alpha' + C_\beta') - \kappa'^2 C_\alpha' \end{bmatrix}_m
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{G}_m^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{-1}g_s(a_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1}g_s(a_0) \end{bmatrix}_m, \quad \begin{cases} S_{\alpha'} = \sin(a_0\alpha d) \\ S_{\beta'} = \sin(a_0\beta d) \\ C_{\alpha'} = \cos(a_0\alpha d) \\ C_{\beta'} = \cos(a_0\beta d) \end{cases}$$

2. SH 波斜入射の場合

$$\mathbf{Q}_m = \begin{bmatrix} e^{i a_0 \beta Z} & e^{-i a_0 \beta Z} \\ i \beta' e^{i a_0 \beta Z} & -i \beta' e^{-i a_0 \beta Z} \end{bmatrix}_m, \quad \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i \beta' & -i \beta' \end{bmatrix}_m$$

$$\mathbf{C}_m^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{i \beta'} \\ 1 & -\frac{1}{i \beta'} \end{bmatrix}_m, \quad \mathbf{E}_m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_{\beta'} & \frac{S_{\alpha'}}{\beta'} \\ -\beta' S_{\beta'} & C_{\beta'} \end{bmatrix}_m$$