

11) M. Tsukada, J. Phys. Soc. Jpn., **51** (1982) 2927

量子系のモンテカルロ・シミュレーション

東大・理 鈴木 増 雄

1. はじめに

約 15 年程前に、大型の電子計算機が使えるようになった時、相転移の統計力学をコンピュータで解いて見ようと考えた。すぐ思いついたのは、小さな系の状態和を厳密に求める方法であった¹⁾。しかし、これには、限界のあることがわかった。スピン数 N が $N=27$ 位のイジング模型の状態和を求めるのに、その当時の東大の大型計算機で 2 時間半もかかった。 N を少しずつ大きくして、比熱等が漸近的にどう変化するかを調べて、臨界現象を研究しようとする、どうしても、もっと大きな N に対して計算する必要にせまられ、モンテカルロ法に頼らざるを得なくなった。イジング模型のように、古典的に単に状態に関する和がとれる場合は、比較的簡単であり、世界各国で多くの計算が行われた。

ところが、量子スピン系の統計力学になると、まず、ハミルトニアン $\mathcal{H}$ を対角化してから、状態和を計算しなければならず、まともに計算出来るスピン数 N は、せいぜい、 $N \leq 20$ である。これでは、ハイゼンベルグ模型のような量子スピン系の臨界現象の研究は、とても覚束無い。何とかして、量子スピン系のモンテカルロ・シミュレーションが出来ないものかと長年考えていたところ、模型の等価性を研究している際に、それが可能であることに気がついた。要するに、 d 次元の量子スピン系を $(d+1)$ 次元のイジング模型 (多体力も現れる) に変換する方式である^{2)~4)}

このように、一見困難と思われていたような計算が実際に可能であることが一たん示されると、世界各国で競って多くの計算が行われるようになった^{5)~16)}

大型計算機の発達と共に、上にあげた量子系のモンテカルロ・シミュレーションの例のように、何をどんな方法で計算し、そこから、どんな物理をひき出すか、逆に、どんな現象を見出すのには、どんな方法が計算機を使う上でもっとも有効かという、言わば、

「computationics」

とも呼ぶべき分野が必要になり、大きく発展するであろう。以下に述べる事は、その一つの試

論とでも言うべきものである。

2. 相転移・臨界現象とモンテカルロ・シミュレーション

臨界現象の一つの大きな特徴は、臨界点に近づくにつれて、緩和時間が限りなく長くなることである。これは、臨界緩和現象と呼ばれ、緩和時間を τ とすると、一般に、転移点 T_c の近傍で、

$$\tau \sim (T - T_c)^{-\Delta} \quad (2.1)$$

のような異常性によって特徴づけられる。ここに、 Δ は、臨界緩和指数と呼ばれる指標である。動的な分子場理論¹⁷⁾では、 $\Delta = 1$ であり、van Hoveのconventional theoryでは、 $\Delta = r$ （但し、 r は秩序パラメタの応答の臨界指数）である。実際は、例えば、動的イジング模型^{17), 18)}で高温展開法¹⁹⁾を用いて調べてみると、

$$\Delta > r \quad (2.2)$$

となり、 $\Delta - r = \varphi > 0$ という動的臨界現象に固有な指数が現れることがわかった。¹⁹⁾最近のくり込み群の理論^{20)~22)}によっても、このことは確かめられている。

いずれにしても、このように、臨界点近傍では、平衡に近づく時間が極めて長いため、モンテカルロ・シミュレーションで研究する場合、計算時間が長くなり過ぎるという問題が起る。これを克服するには、有限サイズ・スケーリング理論^{23), 24)}を用いて、モンテカルロ・シミュレーションの結果を解析するか、モンテカルロ・くり込み群の方法^{9), 25)}を用いるのが有効である。

a) 有限サイズ・スケーリング理論^{23), 24)}

これは、秩序パラメタ、例えば、磁性体の磁化 m が、それに共役な外場、例えば、磁場 h と温度差 $\varepsilon = (T - T_c)/T_c$ 、及び体系のサイズ L との関数として、次のようなスケーリング則²⁴⁾

$$m(\varepsilon, h, L, t) = L^{-\beta/\nu} f(h\varepsilon^{-\beta\delta}, \varepsilon L^{1/\nu}, tL^{-z}) \quad (2.3)$$

を充すということを主張するものである。但し、ここに、 β , δ , ν , z は、通常臨界指数である。²¹⁾特に、動的臨界指数 z は、(2.1)の Δ と、 $\Delta = \nu z$ によって関係している。(2.3)を数値計算の結果にフィットさせて、 β/ν , $\beta\delta$, ν , z 等を決定することが出来る。例えば、サイズ L の体系では、臨界点 T_c 上での磁化 $M(L)$ 、比熱 C 、磁化率 χ_0 （すべて1スピンドリ）は、

$$M(L) \sim L^{d-\beta/\nu}, C \sim L^{2/\nu-d}, \chi_0 \sim L^{2-\eta} \quad (2.4)$$

となる。(2.4)の最後の式から、相関の臨界指数 η を求めることが出来る。また緩和時間 τ は、

$$\tau \sim L^z \quad (2.5)$$

によって、計算することができる。

b) モンテカルロ・くり込み群の方法

これは、くり込み群の理論における自由度の消去、すなわち、セル内のスピンのトレースを、モンテカルロ法を用いて計算機で実行する方法であり、大変有効である。

この方法は、a)の方法と共に今後大いに利用されるであろう。特に、量子スピン系にも有効に利用されるようになってきた⁹⁾

3. 量子系のモンテカルロ法

基本的なアイデアは、量子系と等価な古典系の表示を作り^{2),3)} それにモンテカルロ法を適用する⁴⁾ ことである。すなわち、 d 次元量子系が $(d+1)$ 次元古典系に変換されるという定理³⁾を用いる。これは、1次元増すことによって量子効果を取り入れる訳であり、ファイマンの経路積分に対応する。これを代数的に表現すると次のようになる。今、 $\{A_j\} (j=1, 2, \dots, p)$ という互に非可換な演算子に対して

$$\left\| \exp \left(\sum_{j=1}^p A_j \right) - \left(\prod_{j=1}^p \exp A_j \right)^n \right\| \leq \frac{2}{n} \left(\sum_{j=1}^p \|A_j\| \right)^2 \exp \left(\frac{n+2}{n} \sum_{j=1}^p \|A_j\| \right) \quad (3.1)$$

が成立する²⁾。ただし、 $\|A\|$ は、 A のノルムを表わす。したがって、 $\|A_j\|$ が有限ならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{j=1}^p \exp \left(\frac{1}{n} A_j \right) \right)^n = \exp \left(\sum_{j=1}^p A_j \right) \quad (3.2)$$

が成り立つ。すなわち、非可換な演算子 A_j の和の指数関数を、それぞれの指数関数の積で近似することが出来る。その精度は一般に、 $1/n$ のオーダーで、 n の増加と共によくなる。(3.2)式の両辺を、適当な表示を用いて、行列要素で表現すると、左辺には、中間状態が $n-1$ 個現れるため、“ n —方向”に次元が一つ増した体系に変換される。もし、ハミルトニアンが、短距離力の局所的な相互作用の和で表わされるならば、上の公式(3.2)で、左辺の等価な相互作用は、やはり、局所的なものになることが容易にわかる³⁾。こうして、 d 次元量子系の状態和は、適当な $(d+1)$ 次元の古典系の状態和と等しくなり、結局、量子系のモンテカルロ法が可能となる^{2)~4)}

以下に、この方法に基づく研究の要点と問題点を列挙したい。

a) Suzuki-Miyashita-Kuroda⁴⁾

これは、上の方法を用いて量子スピン系のモンテカルロ・シミュレーションを行った最初の論文である。

a-1) 1次元スピン系。まず、この方法の有効性を確かめるために、1次元スピン系を調

べた。等価なイジングスピン系は、図1のような2次元4体力イジング模型となる。黒の各セルの4つの格子点上のスピンの、4体力 $\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l$ と他の2体力との和で表わされるような力で相互作用している。1次元XY-模型のエネルギーを計算すると、図2のようになり、Suzuki²⁶⁾の pair-product 近似(上の方法の $n=1$ に相当する近似)と Katsura²⁷⁾の厳密解の中間にあり、 $k_B T \simeq 2J$ のところまでは、非常に良い近似になっており、 $n=2$ にすると、 $n=1$

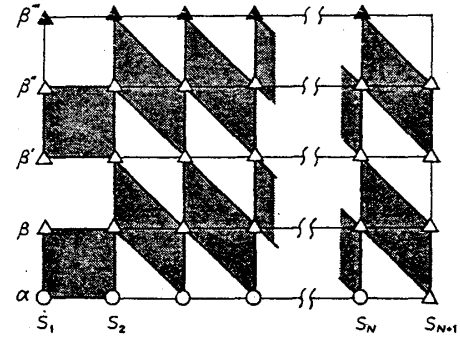


Fig. 1. Structure of the effective lattice for $n=2$ in one-dimension.

図1. 1次元量子スピン系と等価なイジングスピン系($n=2$)⁴⁾

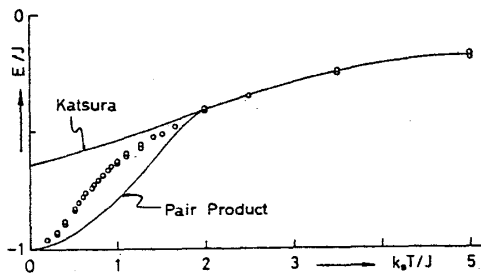


Fig. 2. Temperature-dependence of the total energy for the one-dimensional quantum XY-model ($N=33$, $n=2$); "Pair Product" means the analytic solution for $N=\infty$, $n=1$, and "Katsura" means the rigorous solution of this model.

図2. 1次元XY-模型のエネルギーの温度変化⁴⁾

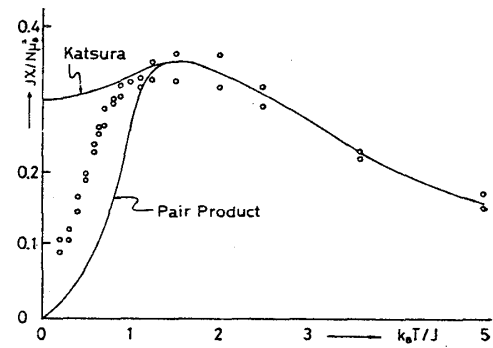


Fig. 3. Temperature-dependence of the perpendicular susceptibility for the one-dimensional quantum XY-model ($N=33$, $n=2$).

図3. 1次元XY-模型の垂直帯磁率⁴⁾

(pair-product) に比べて、さらに、低温まで($k_B T \simeq J$ のところまで) 近似がよくなる。1次元XY-模型の垂直帯磁率を図示すると図3のようになる。やはり、エネルギーの場合と同様のことが言える。1次元量子ハイゼンベルグ模型の比熱を求めると、図4のようになる。有限系の厳密解から、外挿して求めた Bonner-Fisher²⁸⁾の結果と大体一致する。

a-2) 2次元XY-模型。

次に2次元XY-模型のモンテカルロ・シミュレーションを行ってみると⁴⁾、比熱は、図5のようにな

り発散しないらしいが、帯磁率は、図6のように、ある温度(すなわち、Kosterlitz-Thouless²⁹⁾温度) T_{KS} の近傍で発散することがわかる。これは、§2で述べた、有限サイズ・スケーリン

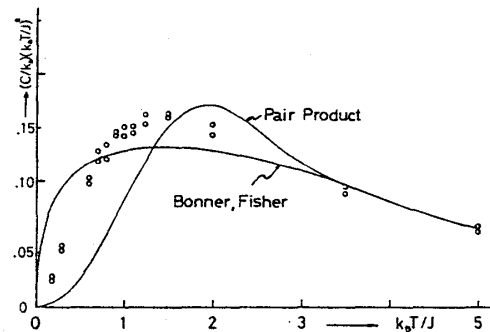


Fig. 4. Temperature-dependence of the energy-correlation (or specific heat) for the one-dimensional quantum Heisenberg model ($N=33$, $n=2$).

図4. 1次元ハイゼンベルグ模型の比熱⁴⁾

グの解析法にならって、スピン1個当りの帯磁率のサイズ N 依存性を調べたものである。

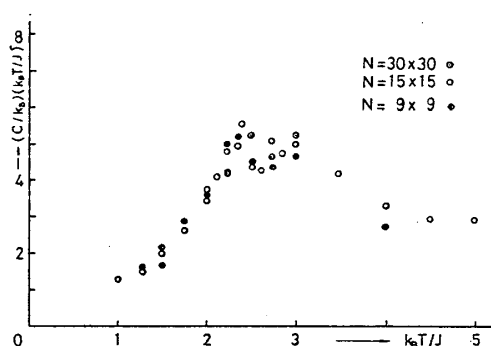


Fig. 5. Size-dependence of energy-correlation (or specific heat) for the two-dimensional XY-model.

図 5. 2次元XY-模型の比熱⁴⁾

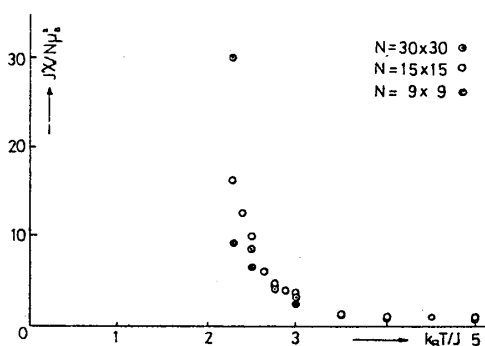


Fig. 6. Temperature- and size-dependence of susceptibility in the XY-plane for the two-dimensional XY-model.

図 6. 2次元XY-模型の帯磁率⁴⁾

b) Raedt-Lagendijk⁵⁾

1次元フェルミ格子系に適用し^{12),13)} 熱力学的関数を計算機で求めた⁵⁾。また、ボーズ系及び、スピン系とボーズ系の結合した系にも、上の方法を応用した³⁰⁾

c) Hirsh-Scalapino-Sugar-Blankenbecler¹⁴⁾

1次元フェルミ格子系に対し、上の方法を少し改良し、等価な格子を工夫し、elementary interactionを一つおきを選んで、二つに分類し、非常に計算の効率を上げるのに成功し、相関関数や構造因子を求めた。Hubbard modelにも適用し、スピン密度波の相関関数

$$SDW(l) = (-1)^l \langle S_{i+l}^z S_i^z \rangle \quad (3.3)$$

を計算し、 l の増加と共に単調に減少する、もっともな結果を得ている。但し、 $S_i^z = \frac{1}{2}(n_{i\uparrow} - n_{i\downarrow})$ である。その他 charge density waveの相関等も調べている。詳しくは原著を参照して欲しい。

d) Wiesler⁷⁾

1次元スピン系で、 Trotter 方向の n の数を増すと共に、計算精度がどのように変化するかを調べ、モンテカルロのステップ数を一定にして、 n を大きくすると却って精度が落ちることを指摘している。これは、 n と共に途中で部分ボルツマン因子が零になり不要な配位もどんどん増していくからである。これを取り除くようにして、 n と共にステップ数を増やしてやれば精度が上がる。

e) De Raedt-De Raedt-Fivez-Lagendijk¹⁰⁾

2次元XY-模型を、上の方法で研究した。“ n 方向”の n の数を $n = 1, 2 \sim 8$ まで順次を増していき、系のエネルギーや比熱が n と共に見事に収束することを確認、物理的には、量子系でも、2次元XY-模型では、渦形成、特に、渦間の強い相関、すなわち、渦対の形成が重要

であることを見出した。

f) Cullen-Landau⁶⁾

最近、上の方法の有効性を確かめ、方法の問題点を解決するために、1次元量子ハイゼンベルグ模型とXY-模型を徹底的に上の方法で^{3),4)}調べた。その結果、図7～図15に示されているように、部分ボルツマン因子が零になるたびに、その配位を除くという当然の処置を正しく行い、 n の増加と共に、その操作に要する分だけ、モンテカルロ数を増やししながら、 n を増していくと、すべての物理量が、 $n \sim 8$ 位ですでに、図7～図15からわかるように、ごく低温を除いて“正確な”解によく収束していくことがわかる。

この Cullen-Landau の仕事は、今後もっと高次元の現実的な系に、上の方法を適用していくときに、大変良い指針を与え、勇気づける。

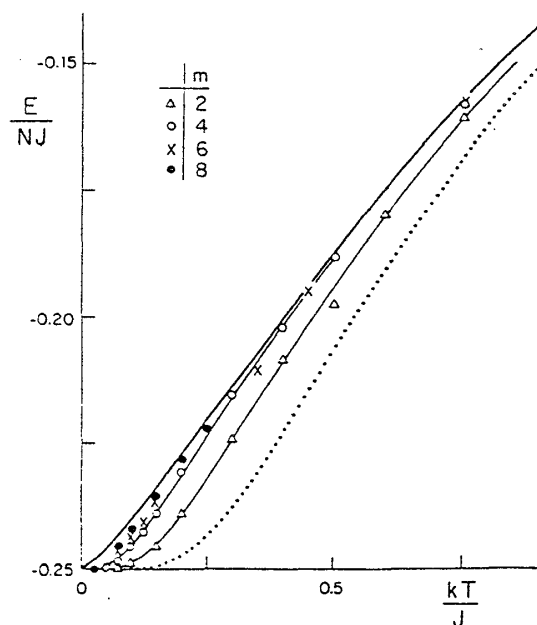


FIG. 7. Temperature dependence of the energy in the ferromagnetic Heisenberg model. The bold solid line is the calculation of Bonner and Fisher (Ref. 28) and the dotted line the exact $m=1$ calculation of Suzuki (Ref. 26). The lighter solid curves are merely to guide the eye.

図7. 1次元強磁性ハイゼンベルグ模型のエネルギー⁶⁾

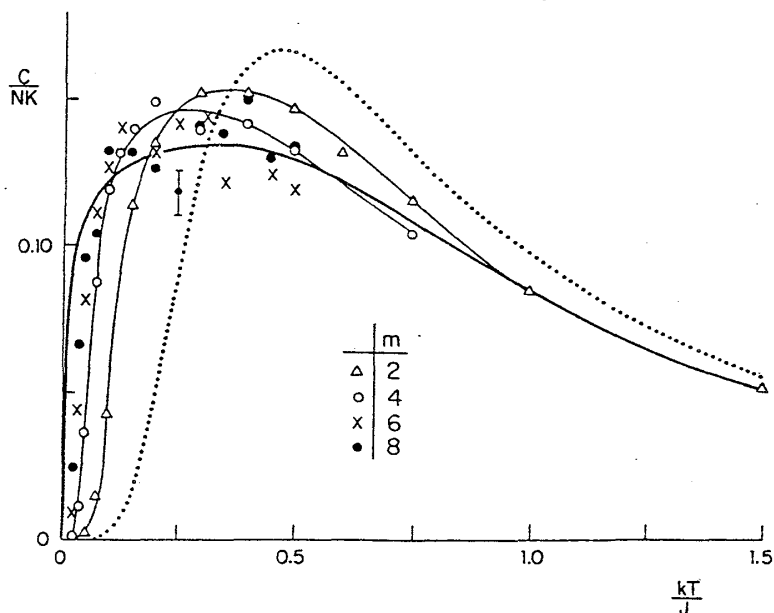


FIG. 8. Specific-heat results for the ferromagnetic Heisenberg model. The bold solid line is the calculation of Bonner and Fisher (Ref. 28) and the dotted line the exact $m=1$ calculation of Suzuki (Ref. 26). The lighter solid lines are merely guides to the eye.

図8. 1次元強磁性ハイゼンベルグ模型の比熱⁶⁾

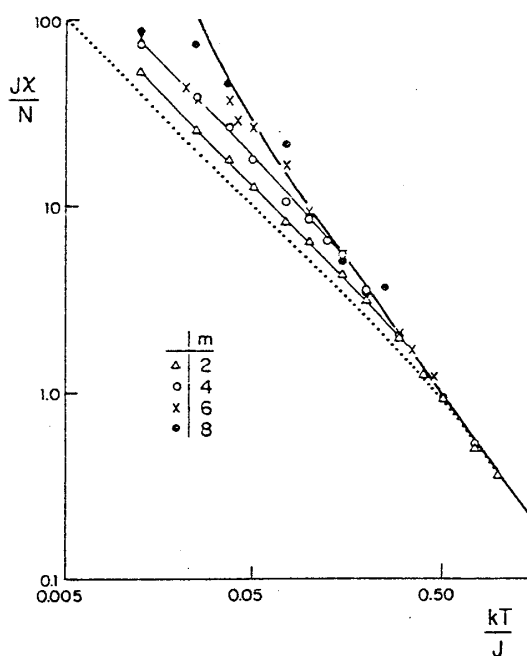


FIG. 9. Susceptibility results for the ferromagnetic Heisenberg model. The bold solid line is the calculation of Bonner and Fisher (Ref. 27) and the dotted line the exact $m=1$ calculation of Suzuki (Ref. 26). The lighter solid curves are guides to the eye and are not fits to the data.

図 9. 1次元強磁性ハイゼンベルグ模型の帯磁率⁶⁾
(たて軸, よこ軸共に対数目盛)

MONTE CARLO STUDIES OF ONE-DIMENSIONAL QUANTUM ...

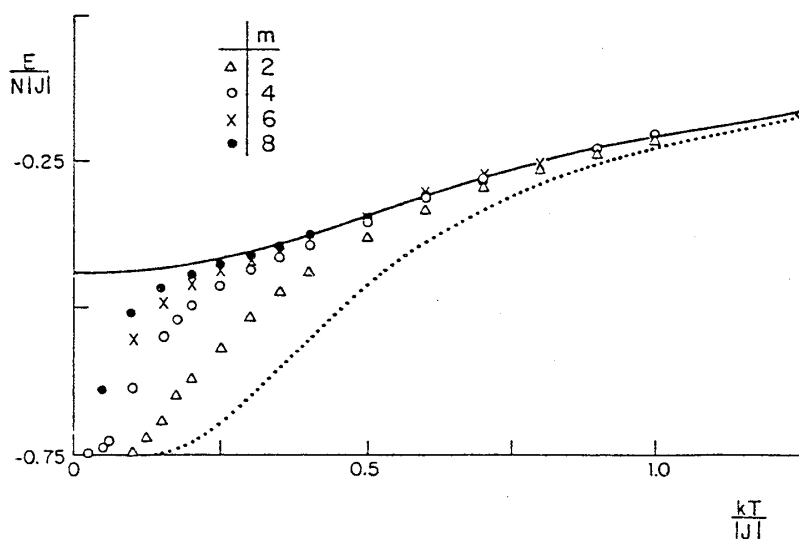


FIG. 10. Energy results for the antiferromagnetic Heisenberg model. The solid line is the calculation of Bonner and Fisher (Ref. 27) and the dotted line is the exact $m=1$ calculation of Suzuki (Ref. 26).

図 10. 1次元反強磁性ハイゼンベルグ模型のエネルギー⁶⁾

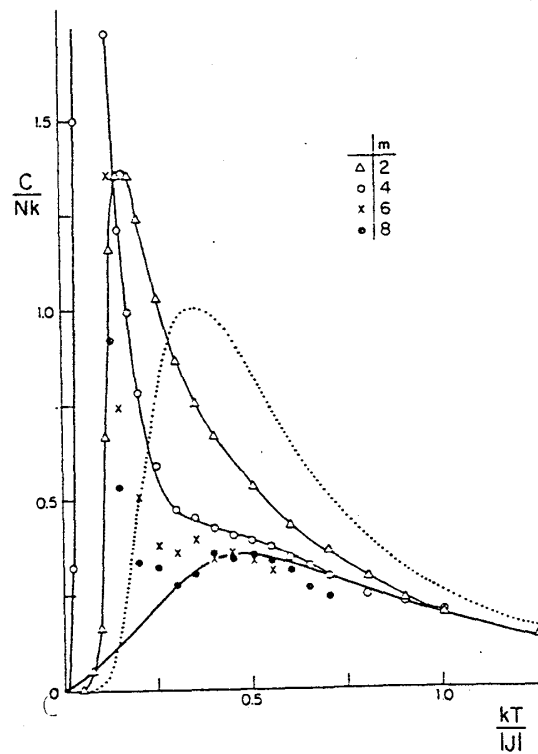


FIG. 11. Specific-heat results for the antiferromagnetic Heisenberg model. The bold solid line is the calculation of Bonner and Fisher (Ref. 25) and the dotted line the exact $m=1$ calculation of Suzuki (Ref. 26). The lighter solid curves are guides to the eye.

図 11. 1次元反強磁性ハイゼンベルグ模型の比熱⁶⁾

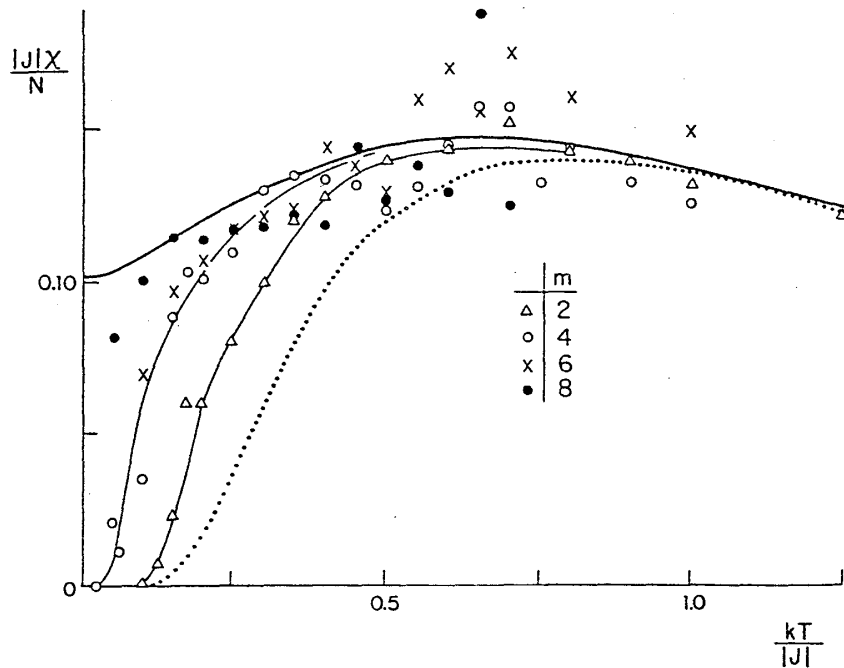


FIG. 12. Susceptibility results for the antiferromagnetic Heisenberg model. The bold solid line is the calculation of Bonner and Fisher (Ref. 25) and the dotted line the exact $m=1$ calculation of Suzuki (Ref. 26). The lighter solid curves are guides to the eye.

図 12. 1次元反強磁性ハイゼンベルグ模型の帯磁率⁶⁾

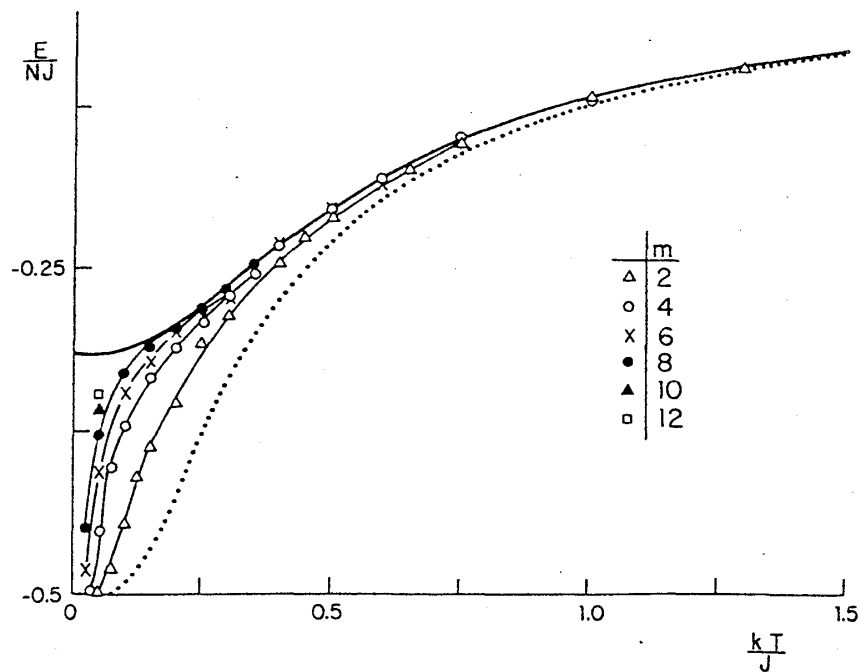


FIG. 13. Energy results for the XY model. The bold solid line here is the exact calculation of Katsura (Ref. 24) while the dotted line is the exact $m=1$ calculation of Suzuki (Ref. 26). The remaining lines are intended to guide the eye and are not fits to the data.

図 13. 1次元XY-模型のエネルギー⁶⁾

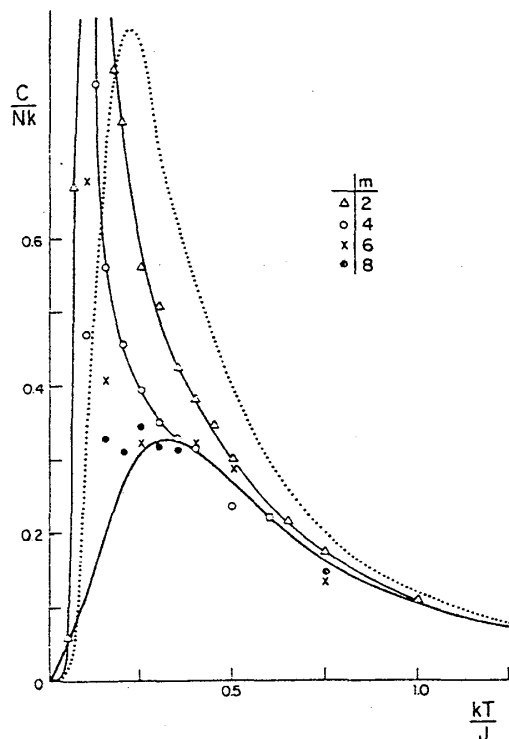


FIG. 14. Specific-heat results for the XY model. The bold solid line is the exact calculation of Katsura (Ref. 24) and the dotted line the exact $m=1$ calculation of Suzuki (Ref. 26). The lighter solid lines are lines to guide the eye and are not a fit to the data.

図 14. 1次元XY-模型の比熱⁶⁾

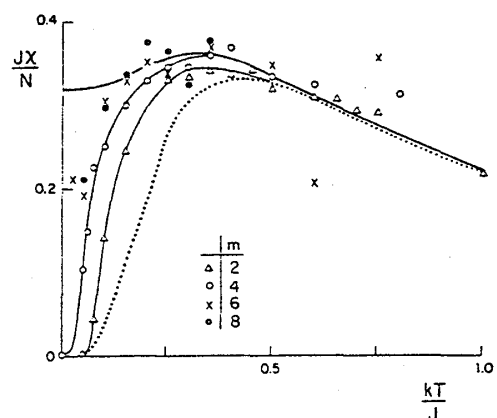


FIG. 15. Susceptibility results for the XY model. The bold solid line is the exact calculation of Katsura (Ref. 24) and the dotted line the exact $m=1$ calculation of Suzuki (Ref. 26). The lighter solid lines are guides to the eye.

図 15. 1次元XY-模型の帯磁率⁶⁾

4. 今後の研究

量子系のモンテカルロ法によって、量子系の相転移、特に、量子効果が本質的に効くような問題を解きたい。例えば、P. W. Anderson³¹⁾によって提唱されている「2次元3角格子反強磁性量子ハイゼンベルグ模型」の新しい相転移、すなわち、普通の長距離秩序は無いが、singlet spin pairの位相が動的にコヒーレントになった相転移を（もしあるとすれば³²⁾）、数値実験によって究明したい。その「computationics」を簡単に説明すると次の通りである³³⁾

2次元3角格子反強磁性体の一つの大きな特徴は、フラストレーションにあるので、上の方法を適用する際に、elementary interactionとして、対の交換相互作用

$$\mathcal{H}_{ij} = -J \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j \quad (J < 0) \quad (4.1)$$

を採用するのは得策ではない。フラストレーションが量子的に入る最小の単位は、3つのスピンの系

$$\mathcal{H}_{ijk} = -J (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j + \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}_k + \boldsymbol{\sigma}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) \quad (4.2)$$

である。したがって、

(i) $\mathcal{H}_{ijk}$ は、これ以上分割せずに、一つの基本的なセルとして、等価な模型を作る。これは、今の問題にとって、非常に重要な「computationics」の一つであると思われる。

(ii) しかも、セルを overlap させるように、格子全体を分割し、singlet pairの位相の動的なコヒーレンスがとり出せるようにする。

以上の2条件を満足するように、図16のような分割を考える。すなわち、各々の3角形上のスピンは、すべて、 $\frac{1}{2}J$ ずつの相互作用をしており、しかも、それをひとまとめにして、

$$\tilde{\mathcal{H}}_{ijk} = -\frac{1}{2} J (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j + \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}_k + \boldsymbol{\sigma}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) \quad (4.3)$$

とし、どの3角形も、elementary interactionとしてとり入れる。すなわち、

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} \exp \left(-\beta \sum_{\langle ij \rangle} \mathcal{H}_{ij} \right) = \text{Tr} \exp \left(-\beta \sum_{\langle ijk \rangle} \tilde{\mathcal{H}}_{ijk} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Tr} \left[\prod_{\langle ijk \rangle} \exp \left(-\frac{\beta}{n} \tilde{\mathcal{H}}_{ijk} \right) \right]^n \end{aligned} \quad (4.4)$$

と分解し、 $n = 1, 2, \dots$ の有限な n の値に対して計算する。筆者によって提案された一般論³⁾にしたがって、 $\{\sigma_j^z\}$ を対角化した表示 $|\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\rangle$ を用いて、(4.4) をイジング模型に変換する。新しい点は、次の6体力の部分 Boltzmann 因子が現れることである：

$$q(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k; \sigma'_i, \sigma'_j, \sigma'_k) = \langle \sigma_i, \sigma_j, \sigma_k | \exp \left(-\frac{\beta}{n} \tilde{\mathcal{H}}_{ijk} \right) | \sigma'_i, \sigma'_j, \sigma'_k \rangle \quad (4.5)$$

この因子は、次のようにして顕わな形に表わされる。まず、

$$\mathcal{M} \equiv (\sigma_i \cdot \sigma_j) + (\sigma_j \cdot \sigma_k) + (\sigma_k \cdot \sigma_i) \quad (4.6)$$

とおくと、次の公式が容易に示せる：

$$\exp(K\mathcal{M}) = \cosh(3K) + \frac{1}{3} \sinh(3K) \cdot \mathcal{M}. \quad (4.7)$$

これは、

$$P \equiv \frac{1}{6} (\mathcal{M} + 3) \quad (4.8)$$

が射影演算子 ($P^2 = P$) になっていることに気づけばよい。(これは $\mathcal{M}^2 = 9$ より導ける。) したがって、(4.5) の因子は、

$$\begin{aligned} q(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k; \sigma'_i, \sigma'_j, \sigma'_k) &= \delta(\sigma_i, \sigma'_i) \delta(\sigma_j, \sigma'_j) \delta(\sigma_k, \sigma'_k) \cosh(3K) \\ &+ \frac{1}{3} \sinh(3K) \left[\{ \sigma_i \sigma_j \delta(\sigma_i, \sigma'_i) \delta(\sigma_j, \sigma'_j) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - \sigma_i \sigma'_i)(1 - \sigma_j \sigma'_j) - (\sigma_i - \sigma'_i)(\sigma_j - \sigma'_j)}{4} \} \delta(\sigma_k, \sigma'_k) + (\text{cyclic}) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

で与えられる。但し、 $K = \beta J/n$ 。こうして、2次元3角格子反強性体は、6体力を持つ3次元イジング模型に変換される。

もっと大きいクラスター、例えば、図17や図18を elementary cluster とするように分解することもできる。

図のように相互作用を分け、格子全体に上の

クラスターを敷きつめるようにして、等価なイジング模型を作ると、量子効果が図16の場合よりも、より一層有効にとり入れられる。これは、 Trotter 方向の n の数を大きくすると同様な効果を与える。

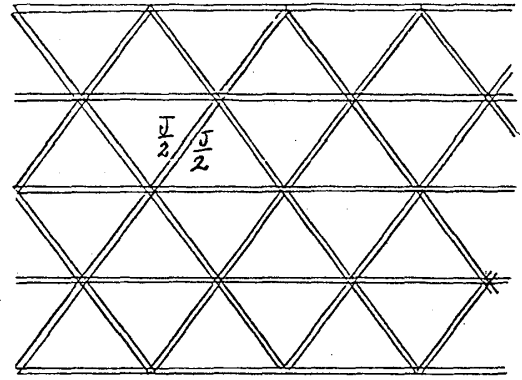


図16. 相互作用 $\frac{1}{2}J$ からなる3角形の和に分割した格子

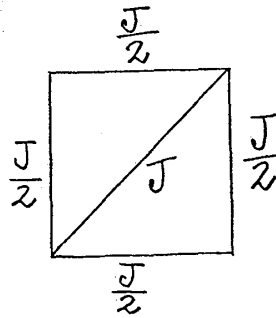


図17. 4スピンのクラスター

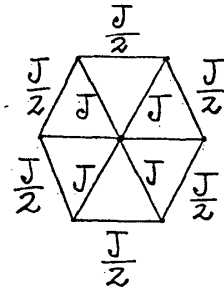


図18. 六角形のクラスター

一方、全体の格子点 (N) の数を増せば、それだけ、多体効果がとり入れられる。このように、上に説明した方法は、量子効果と多体効果の両方を組織的に逐次とり入れる有効な方法である。

以上の方法に従って、§3に議論した事項に留意し、モンテカルロ法を実行する。この系の新しい相の特徴をひき出すには、上の方法に基づいて、さらにいくつかの工夫が必要である。詳しい事は、改めて発表したい。³³⁾

5. 結 び

以上、主として、量子スピン系について議論したが、参考文献12)～16)にもあるように、上の方法は、フェルミ格子や、フェルミ気体、ボーズ気体にも容易に拡張できる。

近い将来、並列処理の超大型計算機または、シミュレーション専用機が日本でも実現されて、大きな成果が上るものと期待される。そうなれば、計算のアルゴリズムのもとになる「computationics」が益々重要になるであろう。

文 献

- 1) M. Suzuki, C. Kawabata, S. Ono, Y. Karaki, and M. Ikeda, J. Phys. Soc. Japan **29** (1970), 837.
- 2) M. Suzuki, Commun. Math. Phys. **51** (1976), 183; *ibid* **57** (1977), 193.
- 3) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **56** (1976), 1454.
- 4) M. Suzuki, S. Miyashita and A. Kuroda, Prog. Theor. Phys. **58** (1977), 1377.
- 5) H. De Raedt and A. Lagendijk, Phys. Rev. Lett. **46** (1981), 77; J. Stat. Phys. **27** (1982), 731; Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 1552; Phys. Rev. **24B** (1981), 463; and preprint entitled "Applications of the Generalized Trotter Formula".
- 6) J. J. Cullen and D. P. Landau, Phys. Rev. **B27** (1983), 297.
- 7) A. Wiesler, Phys. Lett. **A89** (1982), 359.
- 8) J. W. Lyklema, preprint entitled "A Monte Carlo Study of the 1d Quantum Heisenberg Ferromagnet near $T=0$ ".
- 9) M. Kolb, "Monte Carlo renormalization group for quantum systems" reported at the IUPAP Conference in Edinburgh, 1983, July 25-29, and preprint.
- 10) H. De Raedt, B. De Raedt, J. Fizez and Ad Lagendijk, preprint entitled "Monte Carlo study of the 2-dimensional spin-1/2 XY model".
- 11) S. Chakravarty and D. B. Stein, Phys. Rev. Lett. **23** (1982), 582.

- 12) Masuo Suzuki, Prog. Theor. Phys. **58** (1977), 755.
- 13) M. Barma and B. S. Shastry, Phys. Lett. **61A** (1977), 15.
- 14) J. E. Hirsch, D. J. Scalapino, R. L. Suzar and R. Blankenbecler, Phys. Rev. Lett. **47** (1981), 1628 and preprint entitled "Monte Carlo simulation of one-dimensional fermion systems".
- 15) Y. Avishai and J. Richert, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), 1175 and **51** (1983), 1103.
- 16) M. Takashi and M. Imada, preprint entitled "Monte Carlo calculation of quantum systems".
- 17) M. Suzuki and R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **24** (1968), 51.
- 18) R. J. glauber, J. Math. Phys. **4** (1963), 294.
- 19) H. Yahata and M. Suzuki,
- 20) K. G. Wilson, Phys. Rev. **B4** (1971), 3174, 3184
- 21) 鈴木増雄, 「統計力学の進歩」(久保亮五教授還暦記念会編 裳華房), 第7章, 相転移の統計力学.
- 22) H. Takano and M. Suzuki, **67** (1982), 1332.
- 23) M. E. Fisher, J. Vac. Sci. and Tech **10** (1973), 665.
M. E. Fisher and M. N. Barber, Phys. Rev. Lett. **28** (1972), 1516.
- 24) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **58** (1977), 1142.
- 25) S. K. Ma, Phys. Rev. Lett. **37** (1976), 461.
- 26) M. Suzuki, J. Phys. Soc. Japan **21** (1966), 2274.
- 27) S. Katsura, Phys. Rev. **127** (1962), 1508.
- 28) J. C. Bonner and M. E. Fisher, Phys. Rev. **135A** (1964), 640.
- 29) J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. **C6** (1973), 1181.
- 30) B. De Raedt and H. De Raedt, "Thermodynamics of a two-level system coupled to bosons" (preprint).
- 31) P. W. Anderson, Mat. Res. Bull. **8** (1973), 153. P. Fazekas and P. W. Anderson,
- 32) K. Hirakawa, H. Ikeda, H. Kadowaki and K. Ubukoshi, J. Phys. Soc. Jpn.
(in press).
- 33) M. Suzuki, (to be submitted to Prog Theor. Phys.) entitled "Computationalics of Monte Carlo Simulations to Study Anderson's Picture on the Two-Dimensional Triangular Antiferromagnetic Quantum Heisenberg Model". この一部は,

鈴木増雄

すでに、1983年日本物理学会秋の分科会（10月 於 岡山大学）、統計力学・物性基礎論の計算機実験シンポジウムで発表した。（尚、予稿の中の拡張された Trotter 公式の中の $\exp\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^p A_j\right)$ は、すべて、 $\prod_{j=1}^p \exp\left(\frac{1}{n} A_j\right)$ の書き誤りである。）