

# やわらかい壁をもつ溝の中の非定常流—数値計算

慶大物理 竹光信正 (Nobumasa Takemitsu)

慶大物理 松信八十男 (Yasuo Matunobu)

## § 1 結 言

この研究は、やわらかい血管壁が生理流体力学的にどのような効果をもっているか、ということ調べるために、その基礎的研究としておこなったものである。

さて、やわらかい壁をもつ流れの数値計算は、自由表面をもつ流れの問題と異なり、つぎのふたつの点で困難である。第1は、壁面上の圧力があらかじめわかっていることであり、壁面上の圧力は、流れと壁の相互作用の結果として求められるなければならない。第2は、壁面上で粘着条件を満足させなければならないことであり、この困難さは主として、数値計算上の理由によるものと思われる。

このような理由のためであると思われるが、やわらかい壁をもつ数値計算例は、これまであまり例がない。<sup>(1),(2)</sup>

そこで、本研究においては、新しい計算法を使い、まずや

わらかい壁を一部にもつ葦の中の流れという比較的簡単な流れを選んで、これを詳しく調べることにする。

## §2 流れの場と運動方程式

流れの場として図1のような流れを考える。ここで、 $\vec{V}$ は速度ベクトル ( $\vec{V} = (u, v)$ ) で、 $P$ は圧力である。斜線の部分が固定壁を表わし、波線の部分がやわらかい壁を表わす。

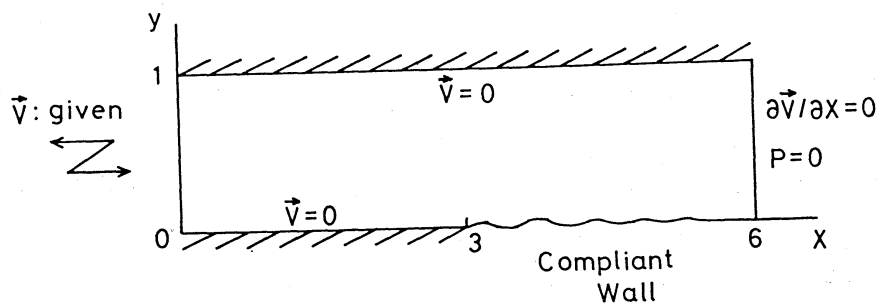


図1 流れの場

さて、無次元化した非圧縮粘性流体の Navier-Stokes 方程式は、 $x, y$  直角座標系で、

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla P + \frac{2\pi}{\alpha^2} \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$$

とかける。ここで、 $\vec{V}$ は速度ベクトルで  $\vec{V} = (u, v)$ 、 $t$ は時間、 $P$ は圧力である。また、 $\alpha$ は Womersley 数で流れの場の代表長さ  $L$  と角振動数  $\Omega$  を使って、 $\alpha = L\sqrt{\Omega/\nu}$  ( $\nu$ : 流体の動粘性係数) で定義される。また、連続の方程式は、

$$D = \nabla \cdot \vec{V} \quad (2)$$

とかける。

つぎに、数値計算の方法であるが、従来の数値計算の方法は大別して2通りの方法がある。一つは、流れ関数という速度を使った方法(ψ-ω法)で、2次元流ではこれまで最も多く用いられてきた。もう一つは、速度と圧力を使った方法(u, v-P法)で、MAC法の出現以来、そのはなはなしい成果とともに自由表面をもった流れに多く適用されてきた。

よく知られているように、ψ-ω法の利点は、2次元流では変数の数が少ないことと、連続の方程式を自動的に満足していることである。他方、自由表面をもった流れには適用が困難であること、3次元流では流れ関数がスカラー量として存在しないので、その計算がかなり複雑になるという欠点をもっている。これに対し、u, v-P法は、自由表面をもった流れにも境界条件の適用が容易であること、3次元流への拡張も容易であることなどの利点をもつ反面、連続の方程式(2)を満足させるために種々の工夫が必要であり、<sup>(3)~(7)</sup>解を求めるための反復回数は、2次元流ではψ-ω法に比べて、一般にきわめて多くの反復が必要である。

したが、u, v-P法で収束が速くて精度のよい方法が考案されれば、この問題のようにやわらかい壁をもち、し

かも粘着条件を満足する流れの解を求めるのに都合がよい。  
著者らのうちの一人は、幸いにも3次元流にも適用可能なそのような方法の一つを考案することができたので、<sup>(8)</sup>以下に簡単にその方法を紹介する。

すでに述べたように、2次元流では $u, v$ - $P$ 法は $\psi$ - $\omega$ 法に比べて、一般にきわめて多くの反復が必要である。 $\psi$ - $\omega$ 法が何故少ない反復で解が求められるか、という理由を考えてみると、 $\psi$ - $\omega$ 法では連続の方程式が自動的に(陰的)に満足されていることと、2次元流では流れ関数がスカラー量として存在することによるものと思われる。そうすると、 $u, v$ - $P$ 法で何らかの陰的条件を各反復において付加することができれば、 $u, v$ - $P$ 法でも反復回数が少なくてすむであろうと考えられる。これが、この方法の基本的な考え方である。最も簡単な陰的条件は次のようにして定まる。

いま、式(1)の回転をとると、うず度輸送方程式

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{2\pi}{\alpha^2} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (3)$$

$$\vec{\omega} = -\nabla^2 \vec{\psi}, \quad \vec{v} = \nabla \times \vec{\psi}$$

が求まる。ここで、 $\vec{\omega}$ はうず度ベクトル、 $\vec{\psi}$ は流れ関数(ベクトルポテンシャル)である。

さて、方程式(1)と(3)をそれぞれ前進差分法で近似したとす

ると、方程式(1)から計算されるうず度は、方程式(3)から計算されるうず度と一致する。すなわち、うず度は各時間ステップで、何回反復をおこなっても不変である。このことを式で表わせば、

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^{(1)} = \vec{\omega}^{(2)} = \dots = \vec{\omega}^{(k)} = \vec{\omega}^{(k+1)} = \dots \quad (4)$$

となる。ここで、上付きの添字は反復回数を表わす。これより、

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}^{(k)} = \nabla \times \vec{v}^{(k+1)} \quad (5)$$

となる。これは、

$$\vec{v}^{(k+1)} = \vec{v}^{(k)} - \nabla \varphi^{(k+1)} \quad (6)$$

$\varphi$ : ポテンシャル関数

とかける。式(6)の発散をとると、

$$D^{(k+1)} = D^{(k)} - \nabla^2 \varphi^{(k+1)} \quad (7)$$

となるが、 $D^{(k+1)}$  は各反復において0となるべき値であるから、

$$\nabla^2 \varphi^{(k+1)} = D^{(k)} \quad (8)$$

を各反復において解けばよい。このようにして、各時間ステップで最も簡単な不変量としてうず度を導入することができる。

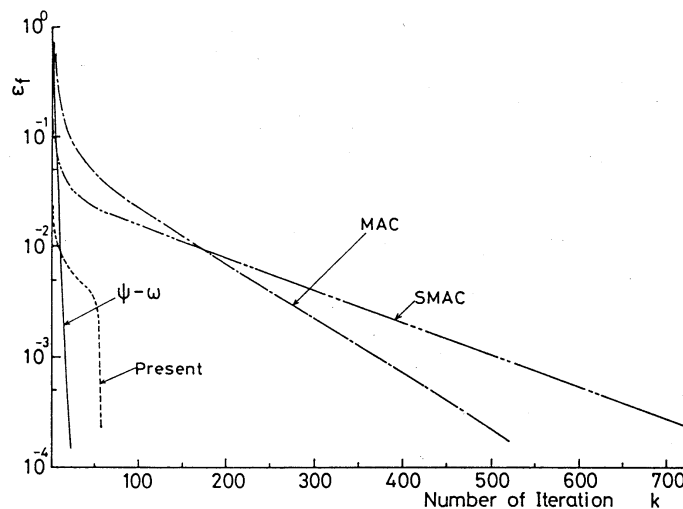
この考え方を使得、非定常2次元 Poiseuille 流を計算した場合<sup>(5)</sup>のある時間ステップにおける典型的な収束過程を図

2に示す。図中  $\varepsilon_f$  は、

$$\varepsilon_f = |f_{i,j}^{(k)} - f_{i,j}^{(k-1)}|_{\max.}, \quad f \equiv \psi, p, \varphi$$

を表わし、 $\psi-\omega$ , Present, MAC, SMAC はそれぞれ、 $\psi-\omega$  法、本方法、MAC 法、SMAC 法の収束過程を表わ

す。この流れで、他の方法 (SOLA 法) も試みたが、図に示した方法のどれよりも収束がはるかに遅かった。この例にみるように、本方法は



既存の  $u$ ,  $v$ -P 法 図2 各方法による収束過程の比較で最も収束の速い方法と思われる。また、精度も、各時間ステップで  $D=0$  にするように反復をおこなうので、たとえば MAC 法にみられるような不鮮明さがなく、精度のよい方法である。なお、別の計算例<sup>(9)</sup>では、この方法の反復回数は、 $\psi-\omega$  法の半分以下であった。

こうしたことから、以下、本研究においては上に述べた方法を使うことにする。

つぎに、流れ場の格子分割は、図3のようにとる。図中、 $h$ ,  $\kappa$  はそれぞれ  $x$ ,  $y$  方向の格子幅である。NS 方程式 (1)

は、時間に対して前進差分法をと、つぎのように差分化される。

$$u_{i,j}^{t+\Delta t} = u_{i,j}^t + \Delta t \left[ - \left( \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi}{\alpha^2} \nabla^2 u \right]^t \quad (9a)$$

$$v_{i,j}^{t+\Delta t} = v_{i,j}^t + \Delta t \left[ - \left( \frac{\partial u v}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2\pi}{\alpha^2} \nabla^2 v \right]^t \quad (9b)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} = (u_{i+\frac{1}{2},j}^2 - u_{i-\frac{1}{2},j}^2) / \Delta x, \quad \frac{\partial u v}{\partial y} = (u_{i,j+\frac{1}{2}} v_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i,j-\frac{1}{2}} v_{i-\frac{1}{2},j}) / \Delta y$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (p_{i,j} - p_{i-1,j}) / \Delta x, \quad \frac{\partial u v}{\partial x} = (u_{i+1,j-\frac{1}{2}} v_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i,j-\frac{1}{2}} v_{i-\frac{1}{2},j}) / \Delta x$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial y} = (v_{i,j+\frac{1}{2}}^2 - v_{i,j-\frac{1}{2}}^2) / \Delta y, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = (p_{i,j} - p_{i,j-1}) / \Delta y$$

$$\nabla^2 \vec{v} = (\vec{u}_{i+1,j} + \vec{u}_{i-1,j} - 2\vec{u}_{i,j}) / \Delta x^2 + (\vec{v}_{i,j+1} + \vec{v}_{i,j-1} - 2\vec{v}_{i,j}) / \Delta y^2$$

ここで、 $u_{i+\frac{1}{2},j}$ などは

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = (u_{i,j} + u_{i+1,j}) / 2$$

などとする。また、連続の方程式(2)は

$$D_{i,j} = (u_{i+1,j} - u_{i,j}) / \Delta x + (v_{i,j+1} - v_{i,j}) / \Delta y \quad (10)$$

とする。

さて、やわらかい壁の運動であるが、ここではつぎに示すモデルを考えた(図4)。すなわち、各セルは流れ方向に独立に変位するものとし、各セルの運動は、運動方程式

$$v_w = dy/dt, \quad (11a)$$

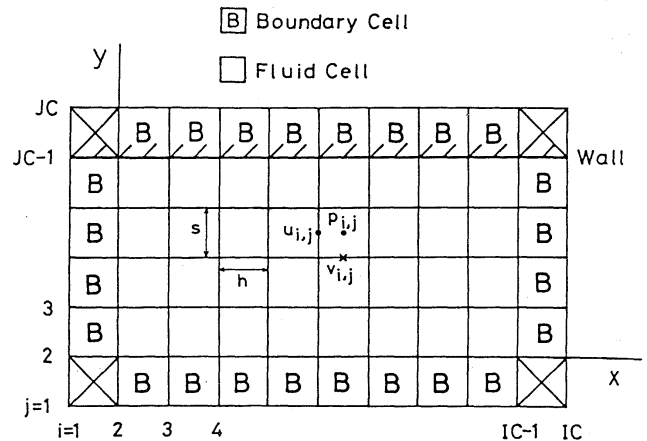


図3 流れ場の格子分割

$$\frac{d v_w}{d t} = C_v (P_w - P), \quad (11b)$$

によつて決まるものとする。ここで、 $v_w$ は壁の速度、 $C_v$ は $\alpha$ の関数で与えられるものとする。また、 $P$ は流体の圧力で、 $P_w$ は

$$P_w = C_p \tan \gamma, \quad (12)$$

$$C_p: \text{const.}, \quad \gamma = y_0 - y$$

によつて決まるものとする。ただし、 $y_0$ は壁の平衡点位置を表わすものと

する。したがつて、このモデルでは、図1に示した溝の外側に、さらに外壁を考えたことになる(図4b)。

なお、上流側の速度は、 $y=0, 1$ で粘着条件を満足する $y$ のみの関数(2次元 Womersley 流)

$$u = \delta \beta \frac{\sin \frac{\beta}{2} \sin \beta y + \cos \frac{\beta}{2} \cos \beta y - \cos \frac{\beta}{2}}{2 \sin \frac{\beta}{2} - \beta \cos \frac{\beta}{2}} e^{2\pi i t}$$

$$\delta = \text{振幅}, \quad \beta^2 = -i\alpha^2$$

で与えた。以下の例では、 $\delta = 1$ とした。

計算順序はつぎのようにする。ただし、記号 $\leftarrow$ は反復を表わす。 $\phi$ は下流端で0とおく。また、内側の反復過程は必ずしも安定ではないので、

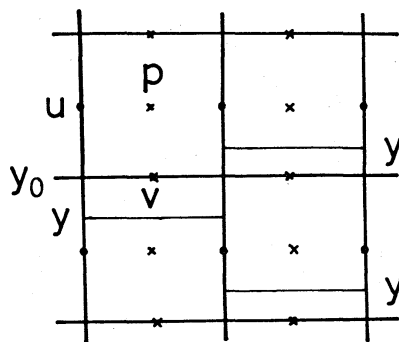


図4a 壁の運動

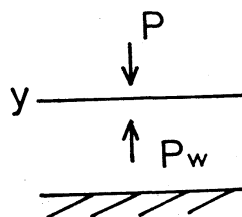


図4b

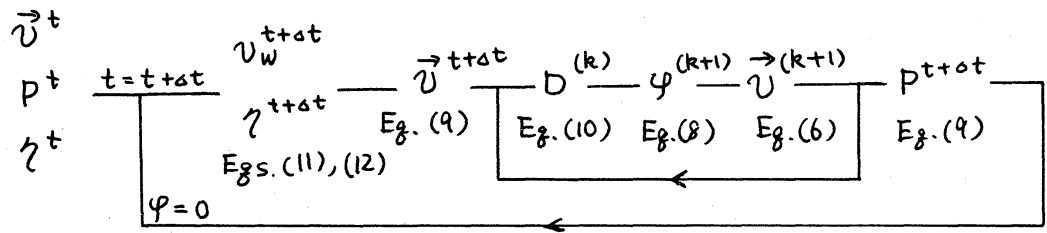


$$\varepsilon_D^{(k)} > \varepsilon_D^{(k-1)} \quad \text{or} \quad \varepsilon_D^{(k)} > \varepsilon_D^{(k-1)} \quad \text{かつ} \quad \varepsilon_\varphi^{(k)} > \varepsilon_\varphi^{(k-1)}$$

となつたら  $\varphi = 0$  とおく。ただし、

$$\varepsilon_D = |D_{i,j}|_{\max}, \quad \varepsilon_\varphi = |\varphi_{i,j}^{(k)} - \varphi_{i,j}^{(k-1)}|_{\max}.$$

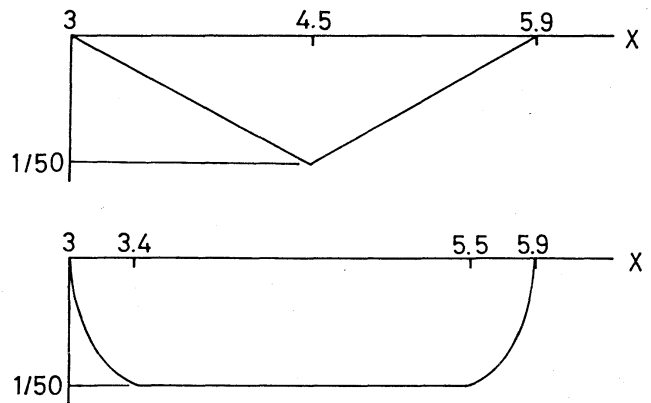
である。



### § 3 計算結果

以下の計算例では、すべて  $\alpha = 8$ ,  $IC = 61$ ,  $JC = 12$ ,  $h = 1$   
 $= 1/10$ ,  $\Delta t = 1/100$ ,  $\varphi$  の緩和係数は 1 とした。また、 $C_p = 100$  と  
 し、壁の Compliance  $C_v$  は  
 図 5 に示すように、三角  
 形型と丸型（丸い部分は  
 正弦曲線）で与えた。

図 6 は、Compliance が  
 三角形型の場合の壁の変  
 位を示す。これらの図で、  
 図 5 壁の Compliance  
 ちょうど 100 で割りきれ  
 るステップ数は、いずれ  
 も流量最大の時刻を示す。  
 この図からわかるように、  
 この場合には、Compliance  
 の最も小さいところから次  
 々と波が発生し、時間



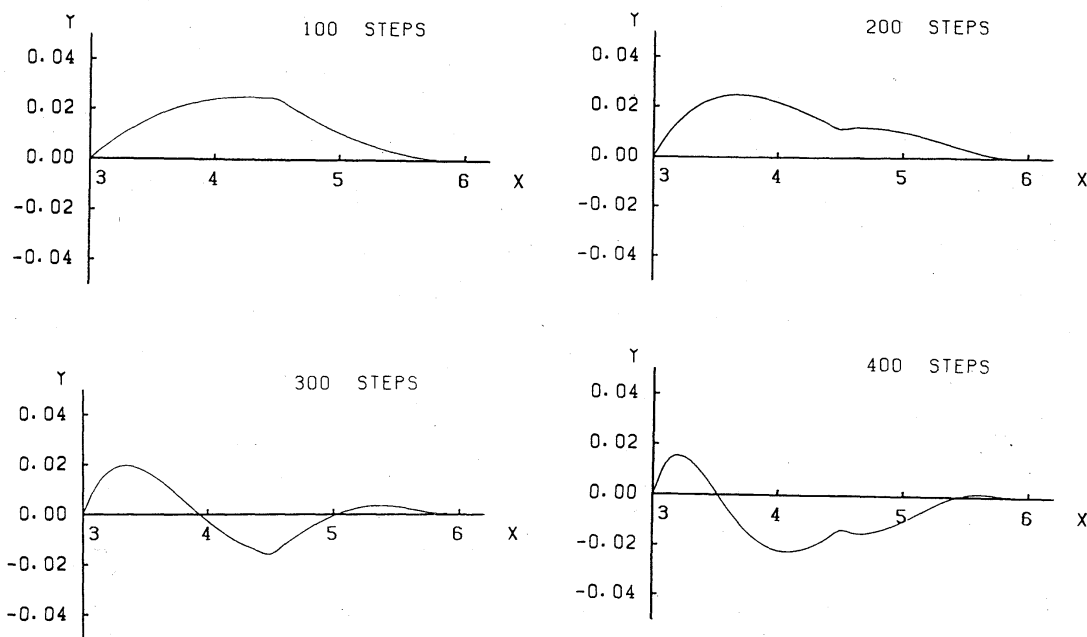


図6 三角形型の場合の壁の変位

がたつにつれ、波の数が多くな、ていく。

図7は、三角形型の場合でも、と時間が経、たとき（14～15周期）の1周期の間の流れ模様の変化を示す。図8は、30周期めの流れ模様である。

図9は、丸型の場合の壁の変位を示す。この場合には、時間がたつと波の数が増える（とい、ても三角形型の場合のようには多、くはない）とともに、壁の変位が大きくなる。また、Complianceが一定のところは、壁の変位がほぼ直線的に変化する。

図10は、丸型の場合の流れ模様の一例である。

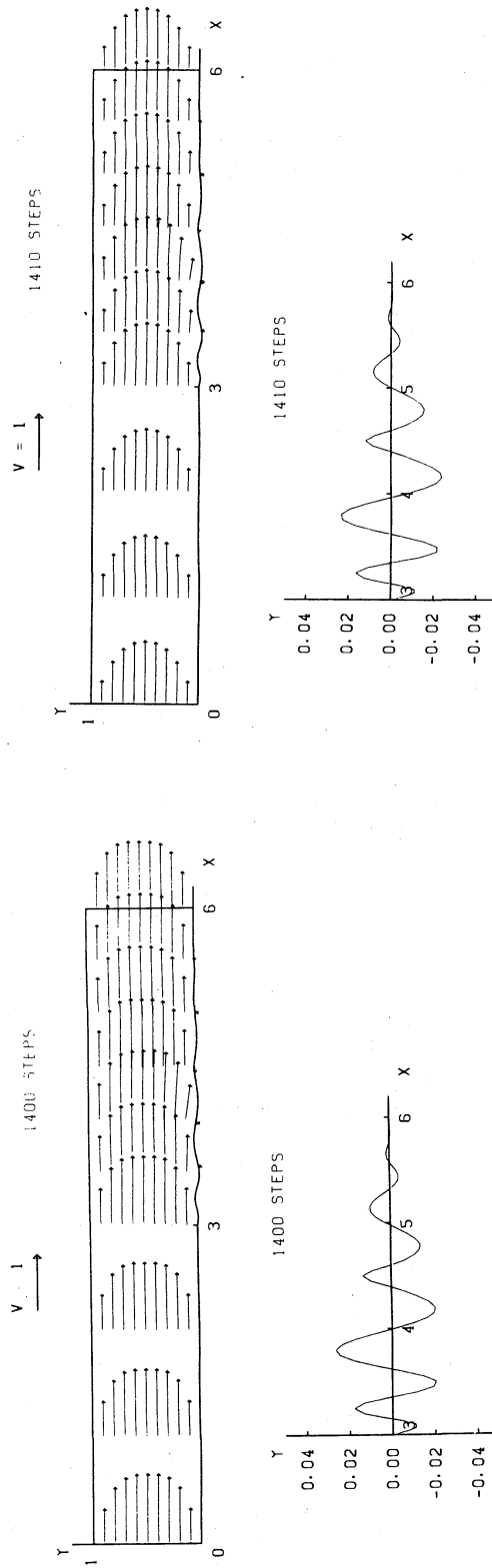


图 7(a) 1400 steps

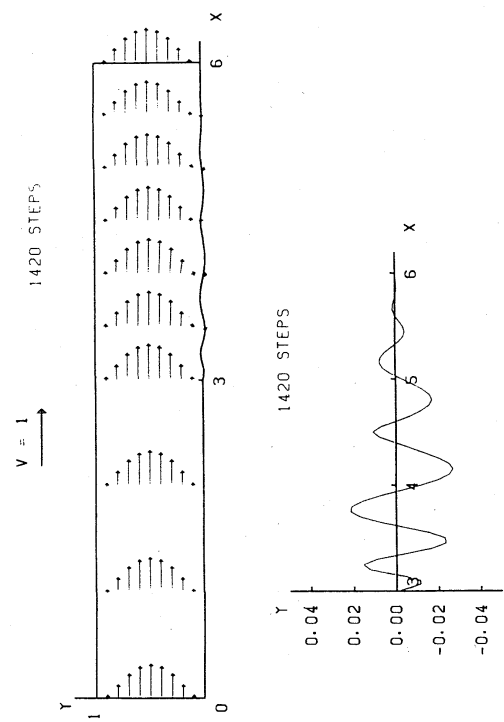


图 7(c) 1420 steps

图 7(b) 1410 steps

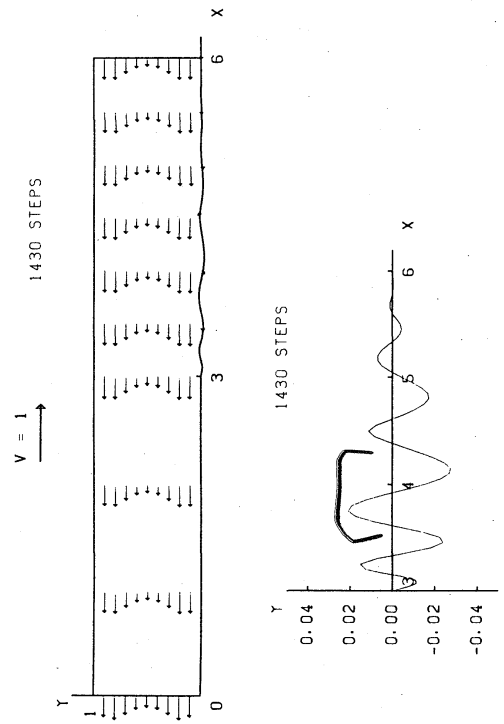


图 7(d) 1430 steps

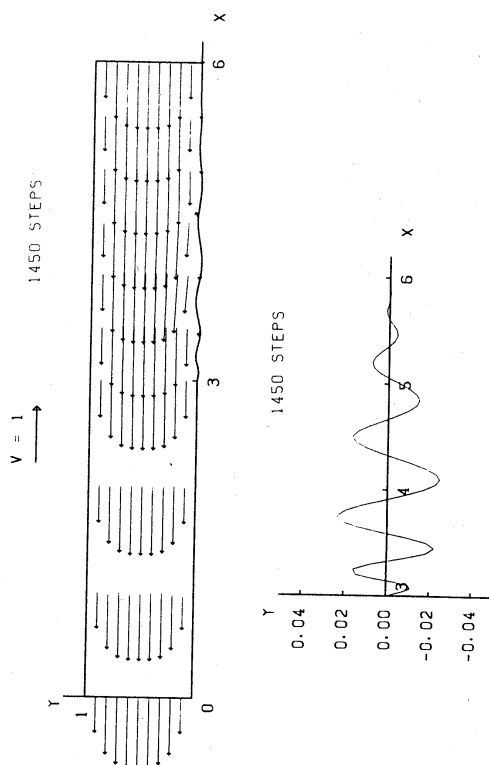


图 7(e) 1440 steps

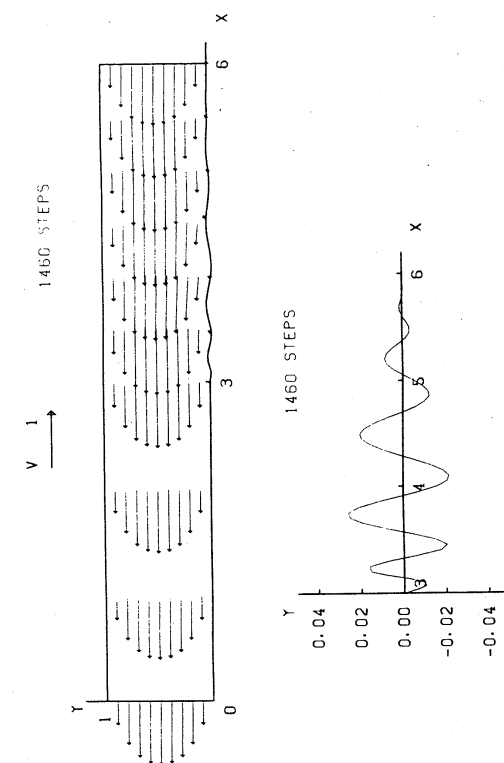


图 7(g) 1460 steps

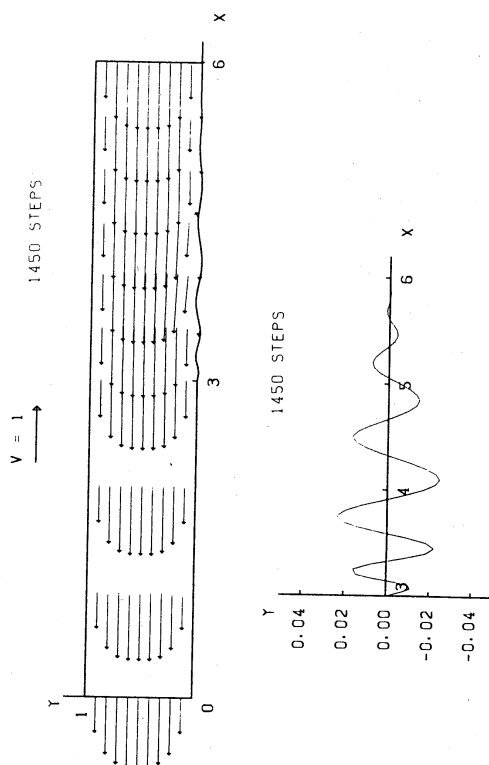


图 7(f) 1450 steps

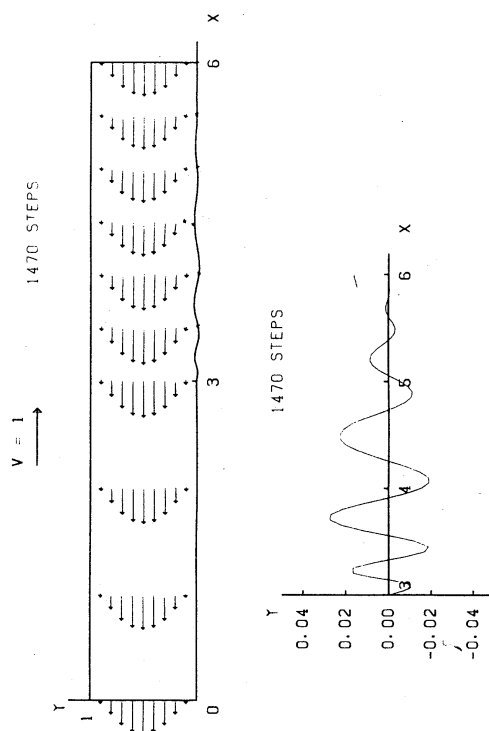


图 7(h) 1470 steps

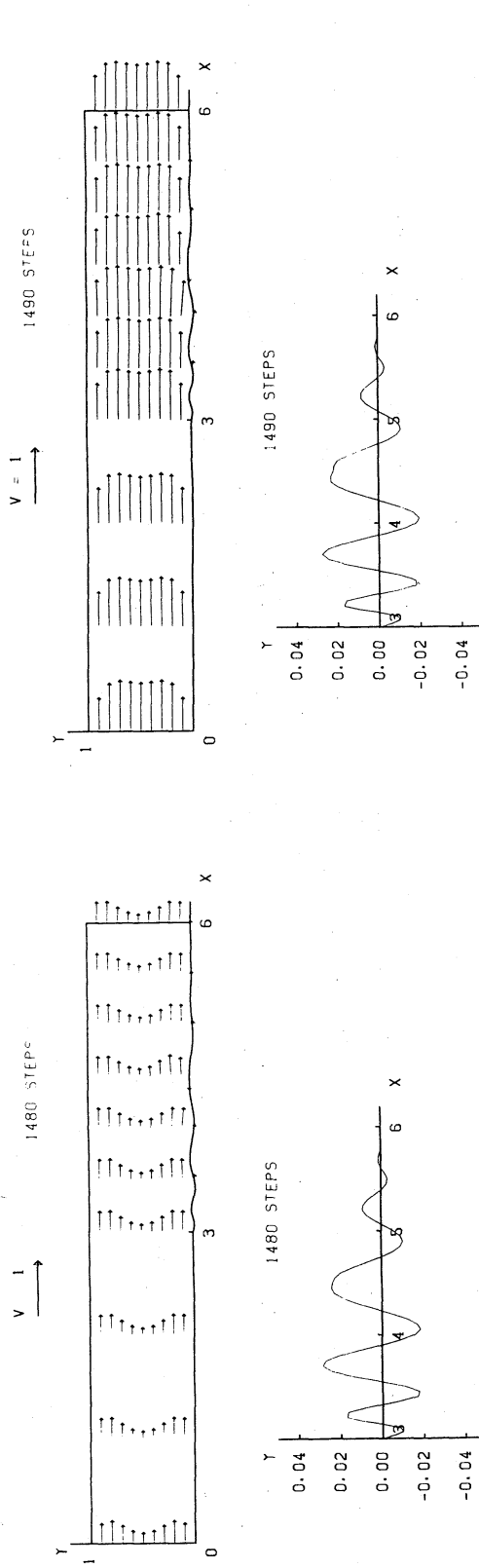


FIG 7 (i) 1480 steps

FIG 7 (ii) 1490 steps

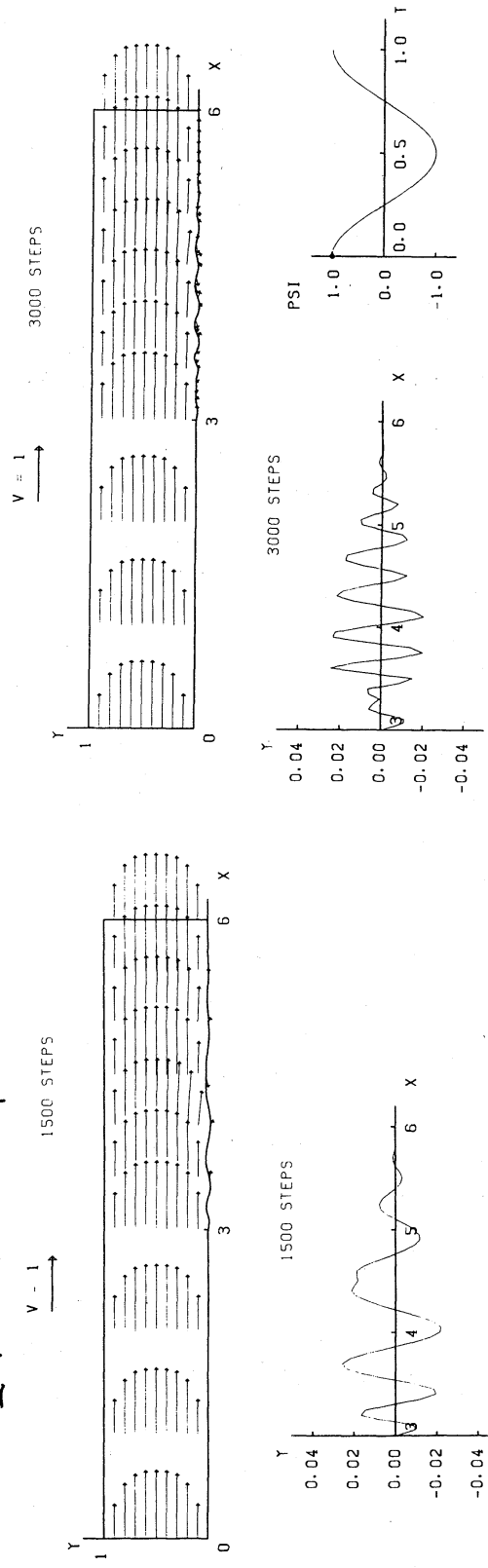


FIG 7 (k) 1500 steps

FIG 8 3000 steps

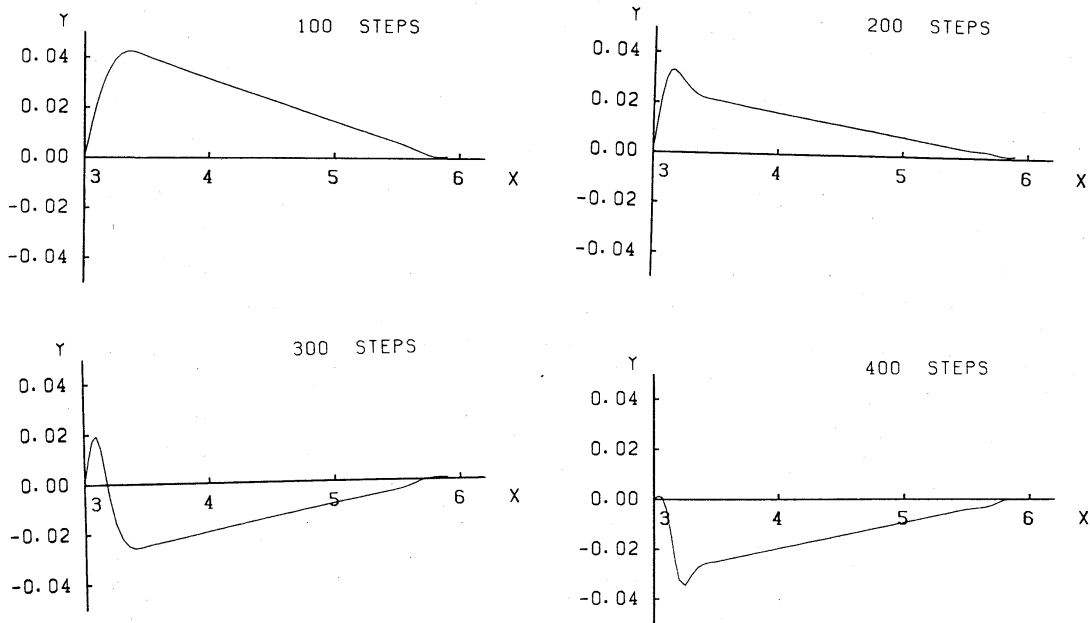


図9 丸型の場合の壁の変位

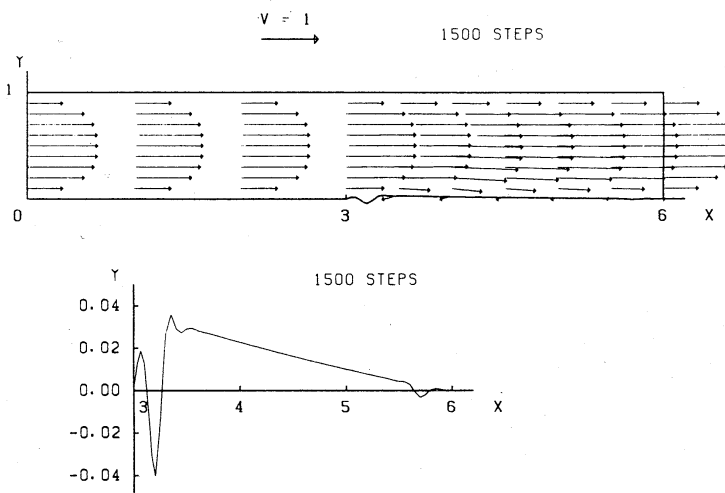


図10 流れ模様の一例 (1500 steps)

#### §4 結言

やわらかい血管壁が流体力学的にどのような効果をもつかという基礎研究の一つとして、やわらかい壁を一部にもつ溝

の中の非定常流を詳しく調べた。本研究の範囲内で得られた結果はつぎの通りである。

- (1) 上流側が定常な振動流であつても，やわらかい壁の変動は定常な振動にならない。
- (2) 三角形型の Compliance をもつ壁の場合には，時間がたつにつれ，Compliance の最も小さいところから次々に波が発生していく。

## § 5 文献

- (1) B. J. Daly, in "Lecture Notes in Physics" (A. I. Vooren and P. J. Zandbergen Ed.), p. 153, Springer-Verlag, 1976.
- (2) W. C. Rivard, C. W. Hirt and M. D. Torrey, Nuclear Engineering and Design 70 (1982), 309.
- (3) F. H. Harlow and J. E. Welch, Phys. Fluids, 8 (1965), 2182.
- (4) A. J. Chorin, Math. Comp., 22 (1968), 745.
- (5) A. A. Amsden and F. H. Harlow, LA-4370 (1970).
- (6) J. E. Viece lli, J. Comput. Phys., 8 (1971), 119.
- (7) H. Takami and K. Kuwahara, J. Phys. Soc. Jpn., 37 (1974), 1695.
- (8) N. Takemitsu, J. Comput. Phys., submitted.
- (9) 竹光信正, 日本機械学会論文集, 投稿中