

急峻な水面重力波の波頂不安定
—主に不安定な固有モードの数について—

岐阜大工 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)

§1. イントロダクション (歴史的背景)

まず本研究の動機を明らかにするために、本研究の内容と関連すると思われる従来の研究の中から特に重要と思われるものだけをピックアップし、そこで得られた主な結果を紹介する。

◇ Longuet-Higgins & Fox (1977):

非常に急峻な定常進行重力波のクレスト (波頂) 近傍において、自由表面における境界条件 (圧力一定) を満足し、かつクレストからの距離 r が十分大きい所では 120° の角を持ついわゆる「Stokes の corner flow」に漸近するような相似解を見いだした。重力加速度を g 、波と一緒に動く座標系から見たときのクレストにおける粒子速度を q_c と書く時、相似解の長さスケール l は $l = q_c^2/2g$ で与えられる。また大きな r/l に対してこの相似解は Stokes の corner flow に振動的に近づくことが示されたが、これは自由表面の最大傾斜が 30° 以上になることを意味している。時間空間を $g = 1$, $q = \sqrt{2}$ となるように規格化した時のクレストにおける曲率半径 R_c および加速度 W_c が $R_c = 5.15$, $W_c = q_c^2/R_c = 0.388$ となることも示された。(R_c のこの値については以下で数値計算結果と比較する。)

◇ Longuet-Higgins & Fox (1978):

LHF(1977) で得られた相似解を「内部解」として、それを深水における限界 Stokes 波のクレスト近傍で成り立つ展開形と接続することによって、外部の流れによる相似解 (内部解) の補正を考慮した。接続条件から波の諸量に対して以下のような漸近表現が導かれた。

$$C^2 = (g/k) \{1.1931 - 1.18\epsilon^3 \cos(2.143 \ln \epsilon + 2.22)\}, \quad (1.1a)$$

$$V = (g/k^2) \{0.03457 - 0.169\epsilon^3 \cos(2.143 \ln \epsilon + 1.49)\}, \quad (1.1b)$$

$$T = (g/k^2) \{0.03829 - 0.215\epsilon^3 \cos(2.143 \ln \epsilon + 1.66)\}, \quad (1.1c)$$

$$ak = 0.4432 - 0.50\epsilon^2 + 0.503\epsilon^3 \cos(2.143 \ln \epsilon - 1.54). \quad (1.1d)$$

ここで C は波速、 V はポテンシャルエネルギー、 T は運動エネルギー、 ak は波の急峻度 (steepness) を表わす。また ϵ は $\epsilon = q_c/\sqrt{2}C_0$ で定義される限界波 ($q_c = 0$) への近さを表わすパラメタであり、 $C_0 = \sqrt{g/k}$ は波長 $L = 2\pi/k$ の無限小振幅波の波

速を表わす。これらの表式は q_c が 0 に近づくにつれて、波速 C および全エネルギー $E = V + T$ がともに無限回振動すること、 ak は ϵ^2 の項の存在のために単調関数となることを示している。

◇ Longuet-Higgins (1978):

深水における完全非線形な Stokes 波の 2 次元攪乱に対する線形安定性が解析された。これは 2 部からなる連作の第 1 部であり、攪乱は主流である Stokes 波と同一の周期性を持つと仮定されたが、それが副題「Superharmonics」の由縁である。 $ak = 0.42$ まで調べられたが、この範囲では不安定は発見されなかった。しかし固有値の ak の関数としての振舞い (図 1a,b)、および波速 C が極値を取る点においては振動数 0 の新たな固有モードが出現するはずであるという物理的考察から「 C の最初の極大に対応する ak において $n=2$ モードが不安定になるであろう」との推論がなされた。

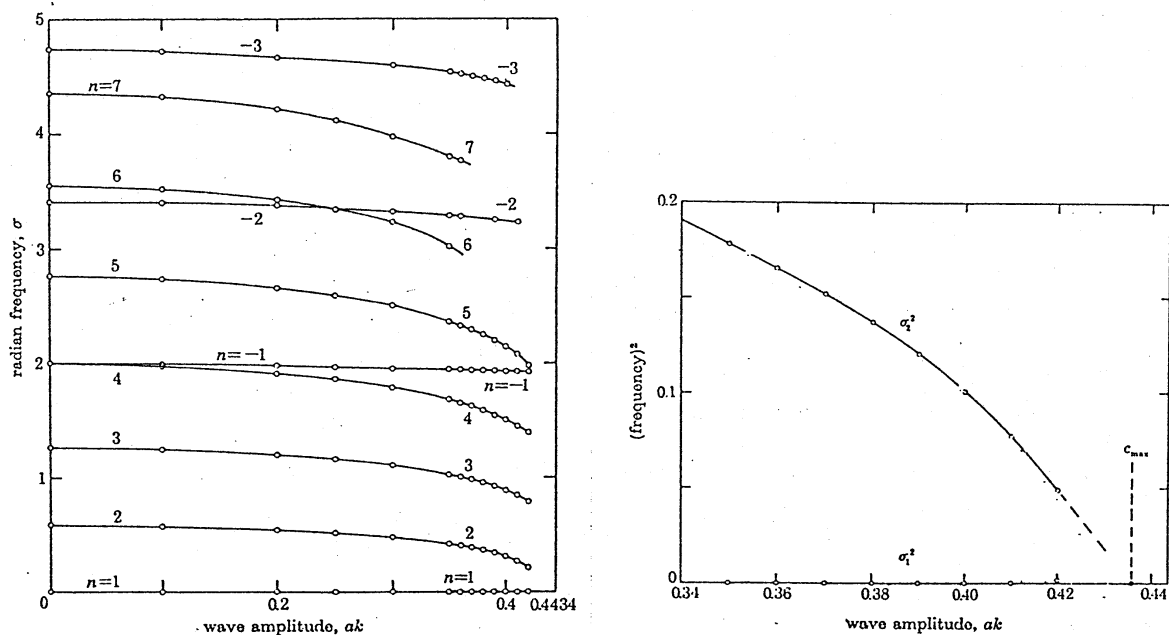


図 1 : (a) 固有モードの振動数 vs. ak .
(b) $n=2$ モードの振動数の 2 乗 vs. ak (L-H(1978) より)

◇ Tanaka (1983):

L-H(1978) と同じく完全非線形な深水 Stokes 波の、2 次元高調波攪乱に対する線形安定性を解析した。Stokes 波の計算に新たな等角写像を導入することによって収束を格段に加速したこと、時間反転に対する対称性を利用して線形増幅率 λ に対する問題を λ^2 に対する問題に帰着することにより行列サイズを半減したことなどにより、より大きな ak まで高精度の計算を可能にした。その結果、L-H(1978) の推論に反して $n=2$

モードは波速 C ではなく全エネルギー E を最大にするような振幅 $ak = 0.4292$ において不安定になることを見いだした。しかしながらこの結果は、それ以前に Chen-Saffman(1980) によって得られていた「水面重力波に対しては高調波分岐は起こらない」という結果と一見矛盾している、また C の最大で何も起こらないのも L-H(1978) のもっともらしい議論と食い違うことなどから、その数値結果の正当性に疑問をはさむ声もあった。

◇ Tanaka (1985):

Tanaka(1983) で調べられた完全非線形な深水 Stokes 波の 2 次元高調波攪乱に対する線形安定性において、最初に不安定となる $n=2$ モードの固有関数の具体的な形の ak に伴う変化を調べ、それが臨界点、すなわちエネルギー最大の点 ($ak = 0.4292$) において、水平方向の位相のずれに対応する固有値 0 の自明なモード $n=1$ のそれと全く同形になることを見出した。これによって「安定性の交換が起こること」と「高調波分岐が起こらないこと」の間の矛盾が解消された。

◇ Saffman (1985):

Zakharov による水の波のハミルトン系としての定式化から出発し、エネルギー（ハミルトニアン）が ak の関数として極値を取るところでは安定性の交換が起こること、そのときの固有関数が自明な固有関数（位相のずらし）と一致することを解析的に証明した。また波速 C の最大で安定性の交換が起こらないことに対しても説明を与えた。

◇ Tanaka (1986):

一定有限水深上を定常伝播する完全に非線形な孤立波の 2 次元攪乱に対する線形安定性を数値的に解析した。不安定がエネルギー最大に対する波高で出現すること、またそのときの固有関数が水平方向の位相のずらしに対応する自明な固有関数に一致することを示し、Saffman(1985) の理論が深水 Stokes 波のみならず、浅水孤立波に対しても同様に成り立つことを示唆した。

◇ Tanaka, Dold, Lewy and Peregrine (1987):

境界積分法により Tanaka(1986) で得られた不安定な固有モードの成長の様子を非線形段階に至るまで追跡し、初期攪乱の重ねかたにより (1) 攪乱の発達で孤立波の砕波に導くケース、及び (2) 攪乱の発達がほぼ同じエネルギーを持ち、より低くて安定な孤立波へのおだやかな遷移に導くケースの 2 種類の異なる発達が存在することを示した。

◇ Zufiria & Saffman (1986):

Saffman(1985) の深水 Stokes 波の高調波不安定性に関する理論が一定有限水深上の Stokes 波および孤立波に対して拡張できること、また有限水深上の Stokes 波に適用す

る場合にはハミルトニアンは水平速度の平均が 0 になるような座標系で計算しなければならないことを示した。

◇ Longuet-Higgins & Cleaver (1994):

LHF(1977) で求められた急峻な定常進行重力波のクレスト近傍で局所的に成り立つ相似解の線形安定解析を行なった。不安定な固有モードはたった一つだけ存在し、その線形増幅率 β は $g = 1$, $q_c = \sqrt{2}$ と規格化した場合 $\beta^2 = 0.00296$ となることを見だし、これを「クレスト不安定 (crest instability)」と呼んだ。またこの不安定は Tanaka(1983) で見い出された高調波不安定の最初のモードの極限的なものであろうと推論した。

◇ Longuet-Higgins, Cleaver & Fox (1994):

LHF(1978) で得られた深水 Stokes 波の限界波と接続することにより修正を受けたクレスト近傍の流れの線形安定性を解析し、LHC(1994) で解析されたクレスト不安定が、小さいながらも有限な $\epsilon = q_c/\sqrt{2}C_0$ に対してどのように修正されるかを求めた。その結果指数関数的に増大する固有モードはやはりただ一つだけ存在すること、その線形増幅率 β は ϵ の減少関数となること、また ak の関数として見たときの β/ϵ のカーブが Tanaka(1983) で得られた最低次 ($n=2$) の高調波不安定のそれにうまく漸近するように見えることなどを示した。

§2. 本研究の動機

上に紹介したように最近の Longuet-Higgins らの結果によるとほぼ限界の波高を持つ定常進行重力波はたった一つの不安定固有モードしか持たないことになっている。しかし「Stokes 波のエネルギーは限界波高に至るまでに無限回振動する」という Longuet-Higgins & Fox(1978) の結果と、「エネルギーが振幅の関数として極値を取るたびに安定性の交換 (exchange of stability) が起こる」という Saffman(1985) の結果を考え合わせると、限界に近い波高を持つ定常進行重力波は無限個の不安定な固有モードを持つと期待する方がより自然なように思われる。

これら 2 つが矛盾しないためには以下のようないくつかの可能性が考えられる。まず第一は、LHC(1994), LHCF(1994) が安定解析で扱っているのは定常進行波解そのものではなく、あくまでもそのクレスト近傍の流れであるという点である。したがってもし仮に、定常進行波解自身は無限個の不安定モードを持つものの、その中でただ一つ最低次の不安定モードだけが主流の振幅の増大に伴って次第にクレスト近傍に局在化するようになり、残りの無限個の不安定モードは依然として主流全体にわたるような空間スケールを保ち、したがって Longuet-Higgins らの解析には引っ掛からなかったという可能性がある。

しかし出現するであろうと期待される無限個の不安定モードはすべて同一の原理（すなわち水平方向へのずれに対応する自明な固有モードと他の固有モードとのエネルギー極大点における衝突）によって引き起こされるものであり、そのうちの最初のモードだけが他のモードと本質的に異なる振舞いをするとは考えにくいように思われる。

第2の可能性は、出現する無限個の不安定モードが主流の振幅の増大に伴って単一のモード、すなわち Longuet-Higgins らが見出したただ一つの不安定固有モードに収束していくという可能性である。しかし $ak_{\max} (= 0.4432)$ はエネルギーが極値を取るような ak の数列の集積点になっており、したがってもしこの可能性が本当ならばより $ak_{\max}$ に近くなってから出現する高次の不安定固有モードの（Longuet-Higgins 流に無次元化された）増幅率は0から一瞬のうちにある決められた有限な値 β_0 に到達しなければならないことになるが、これはあまりにも不自然な振舞いのように思われる。

第3の可能性は、無限個の「安定性の交換」のそれぞれにおいて次々と新たな不安定モードが出現するのではなく、それ以前に不安定になったモードが逆に安定に戻るというプロセスがあり、独立な不安定モードの数が増えていかないというもの。数学的には確かにこのような系の例を作ることもでき、また Saffman 理論とも矛盾はしない。しかし図 1a に示されたような各モードの固有値の、主流の ak の増加にともなう変化の様子から想像するに、本問題に関する限りこの可能性もほとんどないように思われる。

以下ではこのような状況を踏まえて、限界に近い振幅を持つような大振幅定常進行重力波の線形安定性を、なんらの漸近手法を用いることなく純数値的に研究し、漸近手法に基づいた最近の Longuet-Higgins らの解析の妥当性を検討する。なお定常進行波解としてここでは特に深水 Stokes 波と一定有限水深上の孤立波を取り扱う。

§3. 数値結果（深水 Stokes 波のケース）

主流となる深水 Stokes 波の計算法およびその線形安定性問題の、ある行列の固有値問題への帰着のさせ方は Tanaka(1983) に詳しく説明されたと同様の手法を用いた。表 1 は主流を表現するのに使う Fourier モードの数 N を増加させた時の Stokes 波の急峻度 ak 、波速 C および表面での Bernoulli 数の定数からのずれ（誤差）を示している。ここで用いる計算スキームでは各 Stokes 波はパラメタ $\omega = 1 - q_c/q_t$ によって区別される。ここで q_c, q_t はそれぞれ波とともに動く座標系から見たときのクレストおよびトラフでの水粒子速度を表わす。 $\omega = 0$ は無限小振幅波に、また $\omega = 1$ は 120° の角を持つ限界波に対応する。表 1a は $\omega = 0.80$ の場合、すなわちここで取り扱う中で最も振幅の小さい場合の、また表 1b は $\omega = 0.96$ の場合、すなわち最も振幅の大きい場合の結果である。Stokes 波の限界急峻度 $ak_{\max} = 0.4432$ に比べるとそれらはそれぞれ約 96.3% 及び 99.8% であ

表1a: Stokes波の収束 ($\omega=0.80$)

N	ak	C	error(%)
64	0.4267367789	1.0915699348	1.805E-04
128	0.4267368619	1.0915699350	3.820E-10
256	0.4267368619	1.0915699350	1.602E-10

表1b: Stokes波の収束 ($\omega=0.96$)

N	ak	C	error(%)
512	0.4424351403	1.0922819048	7.414E-02
1024	0.4424373083	1.0922819118	2.524E-06
2048	0.4424373084	1.0922819118	1.247E-09

る。例えば波速 C を見ると $\omega = 0.80$ に対しては $N = 128$ においてすでに小数点以下 10 桁程度の収束が得られているのに対し、 $\omega = 0.96$ においては同程度の収束を得るためには $N = 1024$ の項が必要なが分かる。主流の収束の速度は固有値問題における解の収束の速度を支配し、 ω の増大に伴うこの急速な収束速度の減少は後に安定性計算の限界をもたらすことになる。

表 2 はこれら 2 つのケースにおける最低次 ($n=2$) のモードの固有値 λ_2 の 2 乗の収束状況を示す。ここで N_e は固有関数を表現するために使われる Fourier モードの数であり、固有値問題を解かなければならない行列のサイズは $(2N_e + 1) \times (2N_e + 1)$ である。 $\omega = 0.80$ においては $N_e = 30$ においてすでに小数点以下 5 桁程度の収束が見られるのに対して、 $\omega = 0.96$ においては $N_e = 400$ 程度、すなわち行列のサイズを約 800×800 まですべて増やしてもやっと小数点以下 3 桁程度の収束が得られるにすぎない。またこの時、行列の構成からすべての固有値固有ベクトルを求めるまでに要した CPU 時間は、名古屋大学大型計算機センターの VP2600 で約 15 秒であった。

表2a: 固有値の収束($\omega=0.80$)

N_e	λ_2^2
10	-0.02276
15	-0.01820
20	-0.01506
30	-0.01488
50	-0.01488
70	-0.01488

表2b: 固有値の収束($\omega=0.96$)

N_e	λ_2^2
70	1.48890
90	1.42659
120	1.37452
200	1.33835
300	1.33484
400	1.33468

Longuet-Higgins らの解析においては時間、空間が $g = 1$, $q_c = \sqrt{2}$ となるように規格化されており、一方我々の計算においては今述べている深水 Stokes 波については $\tilde{g} = 1$ 、波長 $\tilde{L} = 2\pi$ と、また次節で述べる孤立波については $\tilde{g} = 1$ 、無限遠での水深 $\tilde{d} = 1$ と規格化されているため、両者を比較するためには時間空間の換算が必要となる。我々の量（ティルダで表す）を Longuet-Higgins らの規格化に直すためには長さの次元につき $2/\tilde{q}_c^2 (= 1/\epsilon^2)$ を、また時間の次元につき $\sqrt{2}/\tilde{q}_c (= 1/\epsilon)$ を掛ける必要がある。我々が

ここで扱う範囲 $0.80 \leq \omega \leq 0.96$ は Longuet-Higgins らが用いたパラメタ $\epsilon = q_c/\sqrt{2}C_0$ では $0.189 \geq \epsilon \geq 0.038$ に対応するが、この ϵ の範囲においては Longuet-Higgins & Fox(1978) が C, ak に対して導出した漸近式 (1.1a), (1.1d) は有効数字 4 桁の範囲で数値結果と完全に一致する。また図 2 は数値的に求められたクレストにおける曲率半径 R_c を Longuet-Higgins 流に規格化したものを q_c/C の関数としてプロットしたものであるが、Longuet-Higgins & Fox(1977) の予想通り限界波 ($q_c = 0$) に近づくにつれて約 5.15 に収束する様子がはっきりと見られる。これらの結果はまた比較のための換算の仕方に間違いがないことも示している。

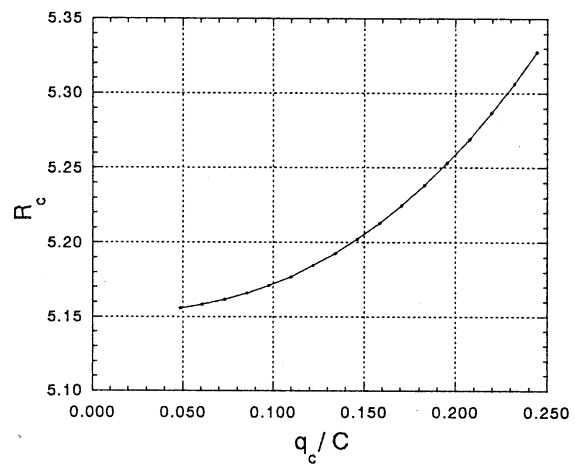


図 2 : R_c vs. q_c/C

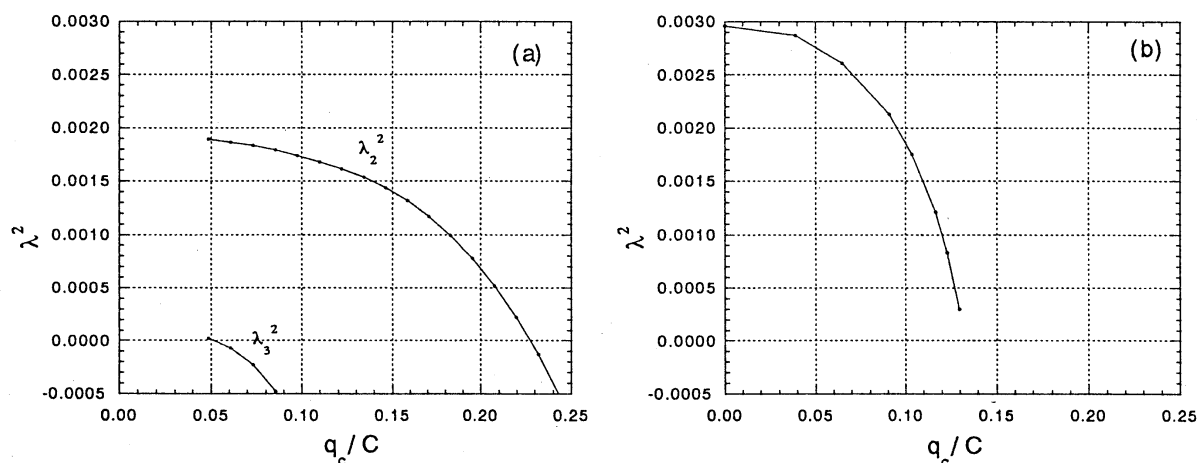


図 3 : Longuet-Higgins 流に規格化された不安定モードの固有値の 2 乗。
(a) 本研究、(b) LHCF(1994).

図 3a には Longuet-Higgins 流に規格化した固有値の 2 乗をプロットした。図は q_c/C の関数として描かれており、左へ行くほど主流である Stokes 波の ak は大きくなる。攪乱は $\propto \exp(\lambda t)$ と仮定されており、したがって $\lambda^2 > 0$ は不安定を意味する。比較のために図 3b に LHCF(1994) の結果も再プロットしたが、両者の定量的な不一致は明白である。

図 4a は 3 つの異なる ω ($\omega=0.84, 0.88, 0.92$) における第 1 不安定モードの波形を x の関数としてプロットしたものである。 ω が増大し、Stokes 波が限界波高に近づくにつれて、固有関数の空間スケールが次第に縮小し、Stokes 波のクレスト近傍に局在していくようすが分かる。なお Stokes 波のクレストは $x=0$ ある。図中の矢印は Stokes 波の伝播方向を示す。また固有関数の振幅は任意であり、ここでは最大値が 1 になるように規格化してある。図 4b は 4a と同じ固有関数を x/ϵ^2 , すなわちクレスト近傍の相似流を表わす空間変数の関数としてプロットしたものである。この程度の ω に対してもすでにかんりの収束が見られる。

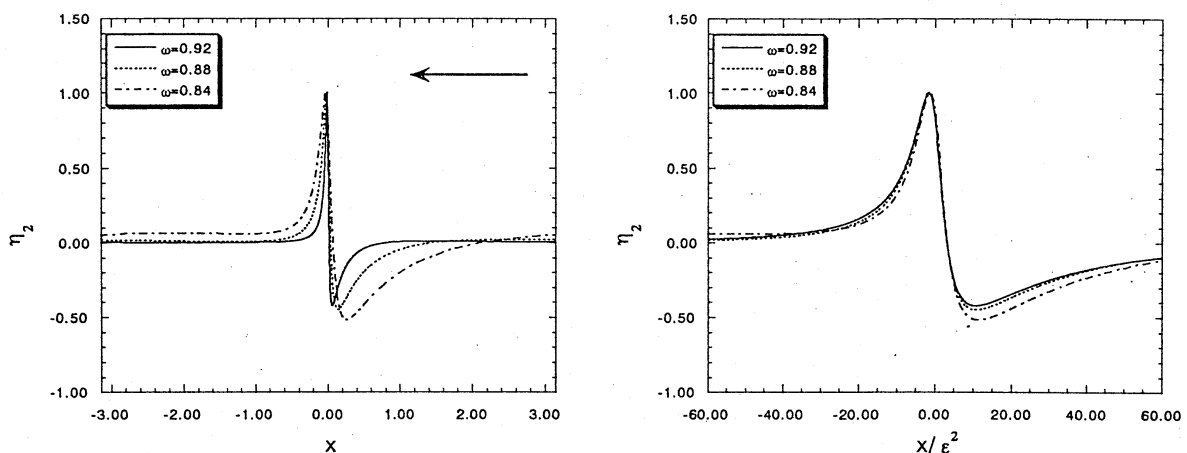


図 4 : Stokes 波に対する第一不安定モードの波形。
 $\omega = 0.84, 0.88, 0.92$.

図 3a に示すようにここでの計算範囲ではかろうじて第 2 の不安定モード ($n=3$) の出現が捉えられる程度である。前に述べたように、最も限界に近いケース $\omega = 0.96$ ($\epsilon = 0.03766$) では固有値 (の 2 乗) に対して有効数字 4 桁程度の収束を得るためにはサイズが 800×800 以上の行列の固有値問題を解かねばならない。これ以上の大振幅を扱うためには Stokes 波の計算法などから根本的にやり直す方が得策と考え、深水 Stokes 波に関してはこれ以上の計算は行なわなかった。この不十分なデータからでは、より限界振幅に近づいた時の不安定モードの振舞いについてあまり確定的なことは言えないが、図 3a に示した固有値の振舞いを見る限り少なくとも最初の 2 つの不安定モードは $q_c \rightarrow 0$ の極限においても独立性を保ったまま存在し続けるように思われる。

§4. 数値結果（孤立波の場合）

我々のスキームでは様々な波高を持つ定常孤立波は q_c/C の値によって区別される。表 3 は $q_c/C = 0.01$ 、すなわちここで扱う中で最小の q_c/C 、したがって最大の波高を持つ孤立波に対して、節点数 Ne を増やしたときのフルード数 $Fr (= C/\sqrt{gd})$ 、波高、第 1 及び第 2 不安定固有モードの固有値の 2 乗の収束状況を示したものである。ここでは時間空間は $g = 1, d = 1$ のように規格化されている。孤立波の限界波高 $h_{\max}$ は 0.83322 であることが知られており、表 3 の孤立波の波高はその約 99.99% に当たる。また $q_c/C = 0.01$ 、すなわちクレストでの流速は波の伝播速度のわずか 1% しかなく、ほぼよどみ点となっている。ちなみに前節で扱った深水 Stokes 波の場合では、扱った中での最大振幅の場合でも q_c/C の値は約 0.05 であった。このようなほぼ限界波高に近い波に対してすら、 $Ne=60$ においてすでに Fr は小数点以下 8 桁まで、また第 1 不安定固有値も有効数字 4 桁まで収束している。

表 3：孤立波解及び固有値の収束 ($q_c/C=0.01$)

Ne	Fr	波高	λ_1^2	λ_2^2
30	1.2908876618	0.8331121581	1.30763e+01	6.82318e-01
40	1.2908906712	0.8331160426	1.39659e+01	7.13888e-01
50	1.2908908571	0.8331162825	1.38925e+01	7.14442e-01
60	1.2908908823	0.8331163150	1.38940e+01	7.14884e-01
70	1.2908908866	0.8331163205	1.38931e+01	7.14946e-01
80	1.2908908874	0.8331163216	1.38930e+01	7.14966e-01
90	1.2908908876	0.8331163218	1.38929e+01	7.14973e-01

孤立波に対しては深水 Stokes 波の場合と異なりコロケーション的な扱いをしており、したがって Ne は主流である定常孤立波を求めるための節点数であると同時に、攪乱の固有関数を表現するための節点数でもある。また固有値問題を解かなければならない行列のサイズは $(2Ne - 1) \times (2Ne - 1)$ となる。表 3 の結果は、「ほぼ限界に近い振幅を有する定常進行重力波に対して不安定固有モードの振舞いを調べる」という我々の目的のためには、現有の数値コードを使う限りにおいては、孤立波の方が深水 Stokes 波に比べて格段に有望であることを示唆している。

図 5 は全エネルギーを q_c/C の関数としてプロットしたものである。図によると $q_c = 0.01$ に到達するまでに全エネルギーは 3 度極値を取り、したがって $q_c = 0.01$ においては 3 つの不安定固有モードの存在が期待できる。図 6 はエネルギーの最初の 2 つの極値

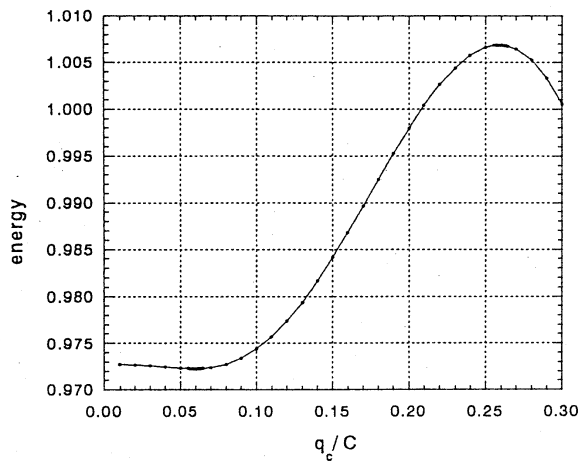


図5： 全エネルギー vs. q_c/C .

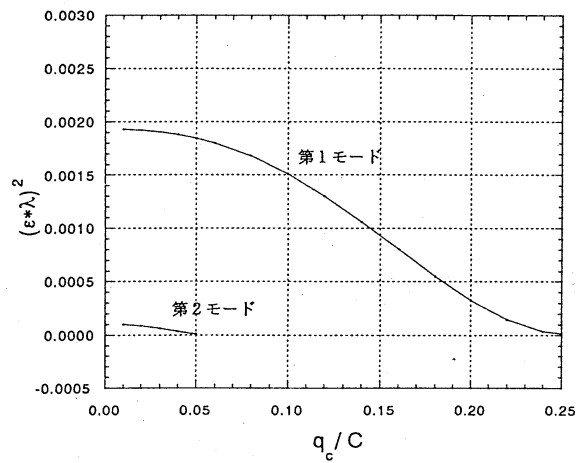


図6： 不安定固有値の2乗 vs. q_c/C .

における「安定性の交換」の結果出現する2つの不安定モードの固有値の2乗 λ_1^2 , λ_2^2 をプロットしたものである。

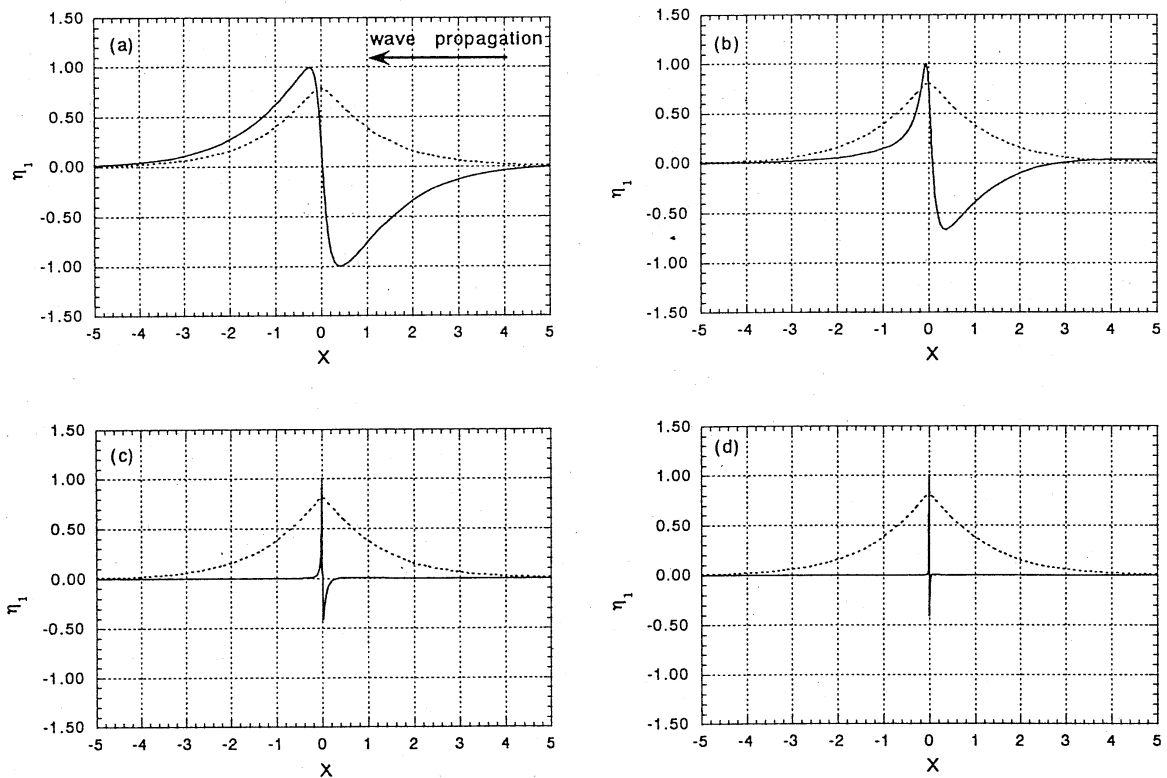


図7： 第一不安定モードの波形 vs. x
 $q_c/C=0.25$ (a), 0.20 (b), 0.10 (c), 0.02 (d).

図7のaからdは第一不安定モードの関数形 η_1 が q_c/C が小さくなるに連れて変化し

ていく様子を示すために4つの異なる q_c/C についてプロットしたものである。図中の点線は主流である定常孤立波の波形を表している。またこれらの図は主流の空間スケール x 、すなわち無限遠方での水深を1とするような長さスケールに対してプロットされている。ここでの解析はすべて線形安定論であり、攪乱の絶対値には意味がない。したがって図中の縦座標は孤立波のみに意味があり、攪乱の振幅は便宜上0からの最大変位が1になるように規格化をした。 q_c が減少して孤立波の波高が限界波高に近づくにつれて、固有関数の空間スケールが次第に短くなり、クレスト近傍に集中していく様子がはっきりと見ることができる。

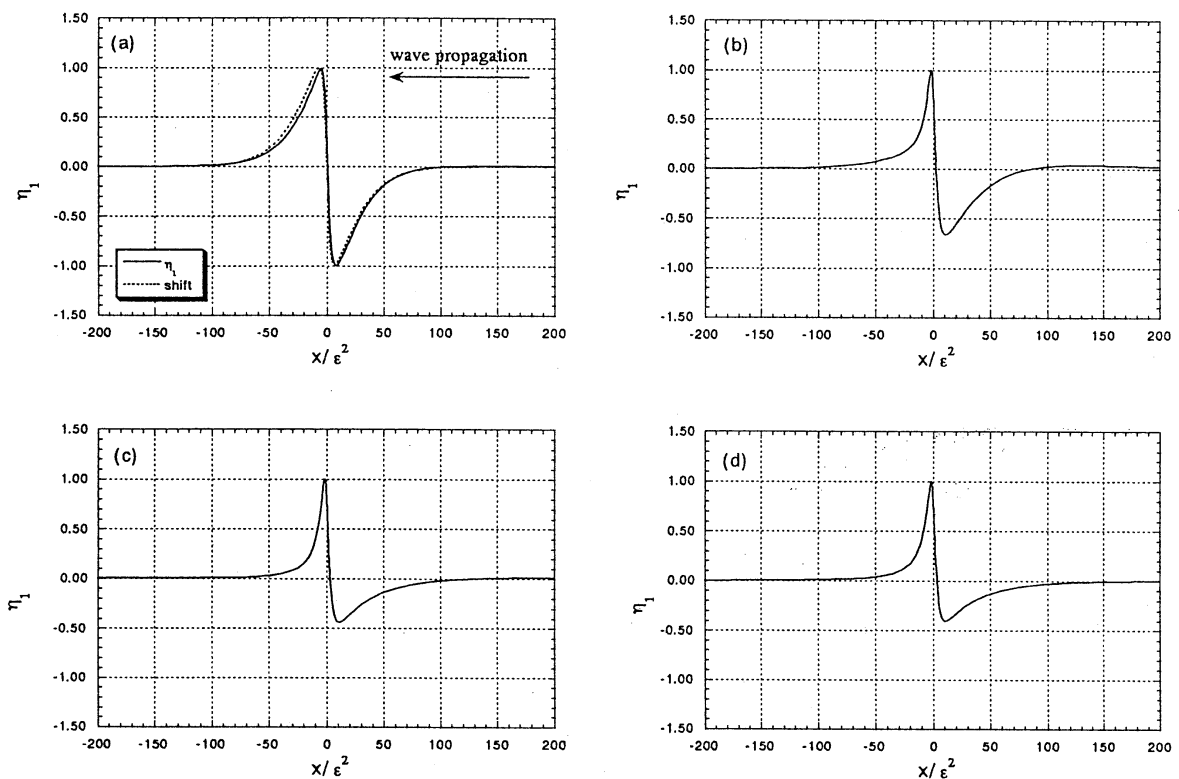


図8： 第一不安定モードの波形 vs. x/ϵ^2 . $q_c/C=0.25$ (a), 0.20 (b), 0.10 (c), 0.02 (d).

同じ固有関数をクレスト近傍の相似流を表現する長さスケール x/ϵ^2 の関数としてプロットし直したのが図8a,b,c,dである。このスケールでプロットした場合、 $q_c/C=0.05$ (c)と 0.02 (d)はほぼ同一の関数形になる。この事実はこのような小さな q_c/C に対しては、第一不安定モードはすでに実質的にはクレスト近傍の相似流のみに支配される固有モードになっていることを示している。なお図8a ($q_c/C=0.25$) の点線はこの値における主流の空間微分、すなわち水平方向のずれに対応する固有値0の自明な固有関数を示している。図5が示すようにエネルギーを q_c/C の関数としてプロットした時の最初の極値は $q_c/C \approx 0.259$ で起こり、これが第一不安定モードの臨界点を与える。Saffman 理論によ

ると臨界点において安定性を交換するモードの固有関数形は、水平方向のずれに対応する固有値 0 の自明な固有関数のそれに等しい。 $q_c/C = 0.25$ は第一モードにとっては臨界点をわずかに越えた状況になっており、不安定になったばかりの第一不安定固有関数はまだ自明な固有関数とかなり似通った関数形を保っているのが分かる。

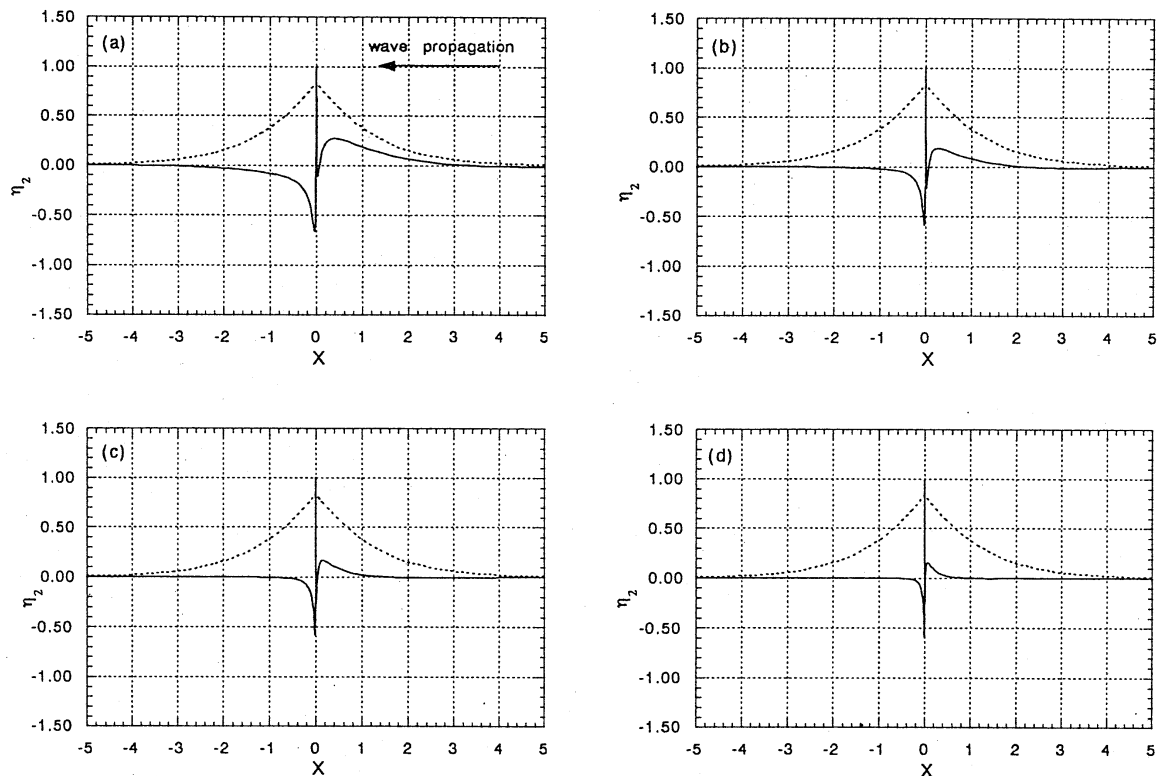


図9： 第二不安定モードの波形 vs. x . $q_c/C=0.05$ (a), 0.04 (b), 0.03 (c), 0.02 (d).

図9a,b,c,d は4つの異なる q_c/C の値において第二不安定モードの固有関数を主流の空間スケール x の関数としてプロットしたものであり、やはり第一モード同様 q_c/C の減少に伴い固有関数がクレスト近傍に局在化していく様子を示している。

図10a,b,c,d は図9と同じ固有関数を相似流の空間変数である x/ϵ^2 の関数としてプロットしたものである。特に最小の q_c に対する2つの関数形(cとd)は全く区別が付かない。小さな q_c において見られるこの固有関数の収束は、この第二不安定モードも第一不安定モード同様、クレスト近傍の相似流に完全に支配された「クレスト不安定」であり、したがって LHC(1994) および LHCF(1994) の解析で検出されるべきタイプの固有モードであることを示唆している。図8と図10の比較から、これら2つの不安定モードは明らかに異なった関数形に収束しており、主流である定常孤立波が限界波へ漸近するにあたって独立な不安定モードとして存在し続ける。この結果は明らかに、限界波高に近い波高を有する定常進行孤立波は少なくとも2つ以上の独立な不安定固有モードを有することを示し

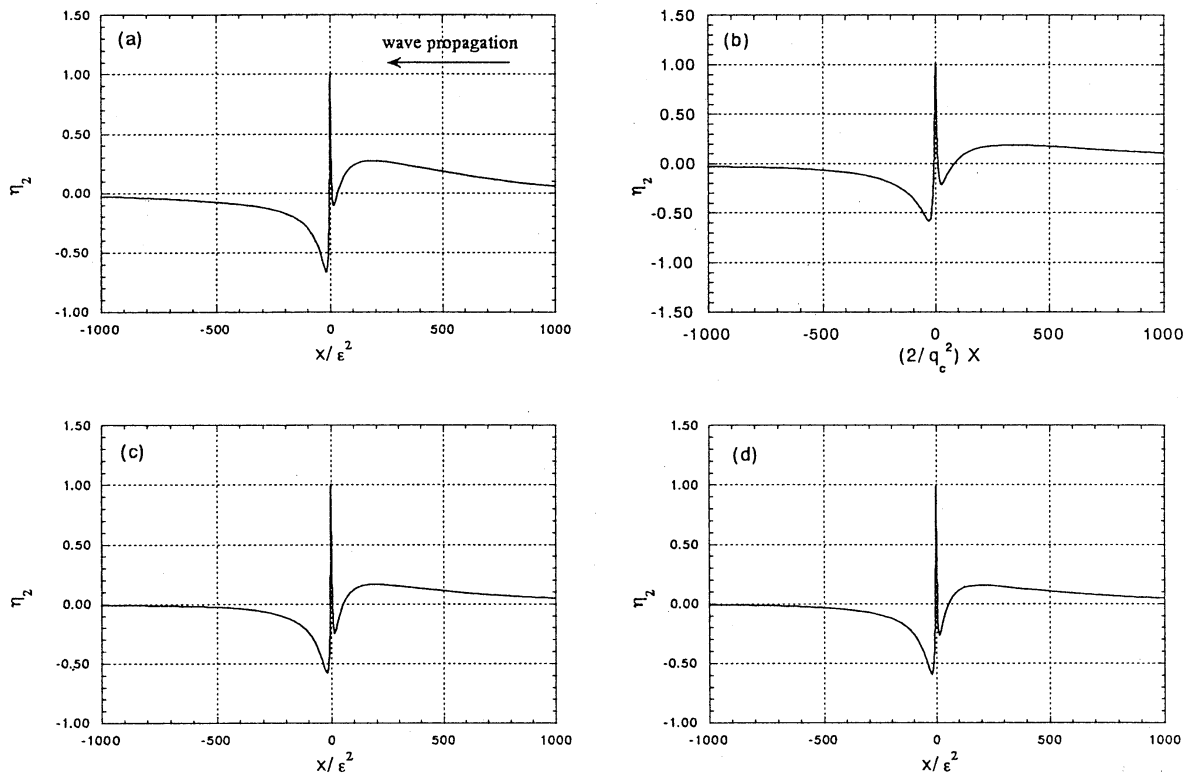


図10： 第二不安定モードの波形 vs. x/ϵ^2 . $q_c/C=0.05$ (a), 0.04 (b), 0.03 (c), 0.02 (d).

ており、不安定モードが一つしかないとする LHC(1994) および LHCF(1994) の結果とは相容れないものである。

§5. Stokes 波のケースと孤立波のケースの比較

前2節では Stokes 波に対する結果と孤立波に対する結果をそれぞれ別々に示した。そしてどちらのケースについても、主流の定常進行波解が限界振幅に近づくにつれて、不安定固有モードの波形が次第にクレスト近傍に局在していくこと、 x/ϵ^2 の関数として見たとき、どちらのケースにおいても各固有モードは $\epsilon \rightarrow 0$ である特定の波形に収束していくこと、また相似流の時間スケールで見た時の不安定の増幅率 $\epsilon\lambda$ も $\epsilon \rightarrow 0$ において各モードごとに異なるある一定値に漸近することが明らかになった。これらの結果は Stokes 波、孤立波どちらのケースにおいても、主流が限界波に近く ϵ が十分小さくなると不安定モードは実質的にはクレスト近傍の流れ場のみに支配されるようになる事を示している。

一方 LHF(1978) はどのようなタイプの定常進行重力波であっても、その急峻なクレストの近傍では同一の相似流が実現することを示しており、これは、上で得られた各モードの増幅率や波形などが、相似流の時間空間スケール $x/\epsilon^2, t/\epsilon$ で見た時には $\epsilon \rightarrow 0$ の極限

で、Stokes 波の場合と孤立波の場合とで一致する事を要求する。

図 11 は図 3a に示した Stokes 波に対する固有値と、図 6 に示した孤立波に対する固有値を ϵ の関数として同時にプロットしたものであるが、確かに $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において第 1 モードどうし、また第 2 モードどうし等しい極限值に漸近する様子が見られる。

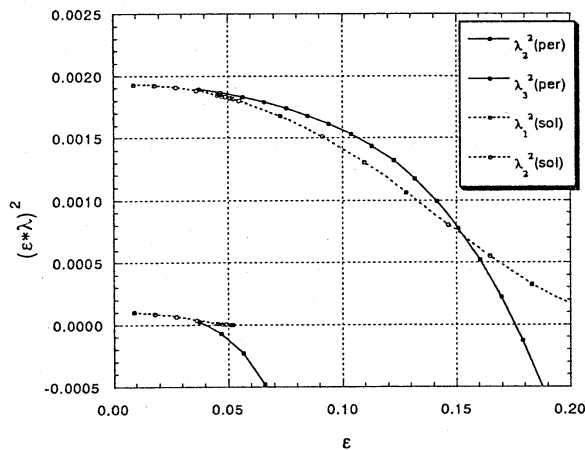


図 1 1 : Stokes 波と孤立波の不安定固有値の 2 乗 vs. ϵ

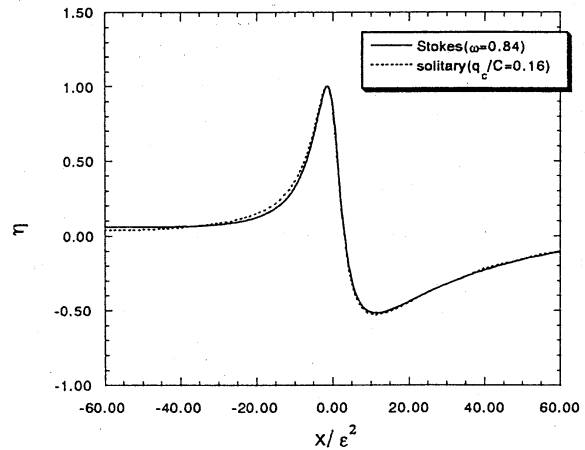


図 1 2 : Stokes 波と孤立波の第一不安定モードの波形の比較。

図 12 は $\omega = 0.84$ ($\epsilon = 0.15086$) の Stokes 波に対する第 1 不安定モードと、 $q_c/C = 0.16$ ($\epsilon = 0.14628$) の孤立波に対する第 1 不安定モードの波形を x/ϵ^2 の関数としてプロットしたものである。 ϵ の値はまだ十分小さいとは言えないが、にもかかわらず両波形の主要部分はすでにかなり一致しているのが分かる。

2 つの固有モードの近さをより定量的に議論するためにここでは以下のような手続きを取る。まず、Stokes 波、孤立波を含めて本研究で扱った中で最も限界波に近いのは $q_c/C = 0.01$ ($\epsilon = 0.00913$) の孤立波のケースなので、このケースに対する第 1 不安定モードの波形を極限波形と同一視して $f(\xi)$ と書くことにする。ここで $\xi = x/\epsilon^2$ であり、また固有関数の波形は常に最大値が 1 となるように規格化してあるものとする。そしてある ϵ に対応する Stokes 波または孤立波に対する第 1 不安定モードの波形を $g(\xi)$ とするとき、

$$D(f, g) = \int_{-60}^{60} \{f(\xi) - g(\xi)\}^2 d\xi$$

で f と g の「距離」を定義する。

図 13 はこのように定義された D を ϵ の関数としてプロットしたものであり、 D_{per} , D_{sol} はそれぞれ Stokes 波、孤立波に対する結果である。 D_{sol} はその定義から $\epsilon = 0.00913$ で 0 になる。 ϵ の減少に伴う D の減少は $D \approx 0.01$ 程度で止まってしまう。 f, g の大

きさがほぼ 1 であること、 D を定義する積分区間の長さが 120 であることを考えると、 $D \approx 0.01$ は各点における $f(\xi)$ と $g(\xi)$ のずれがほぼ 0.01、すなわち 1% 程度であることを意味している。有限項の打ち切りにより固有値問題が完全には収束していないこと、固有値の収束に比べて一般に固有関数の収束は悪いこと、 D の定義に含まれる補間や正規化の過程でも誤差が生じることなどを考えると、この程度の D は 0、すなわち 2 つの固有関数は完全に一致していると見なすべきであろう。図 13 の結果は、主流が Stokes 波か孤立波かにかかわらず、その第 1 不安定モードの波形は $\epsilon < 0.06$ においてはある一定の波形—これは $\epsilon \rightarrow 0$ の極限におけるクレスト近傍の相似流に対する第 1 不安定モードの波形のはずであるが—にほぼ完全に一致することを示している。

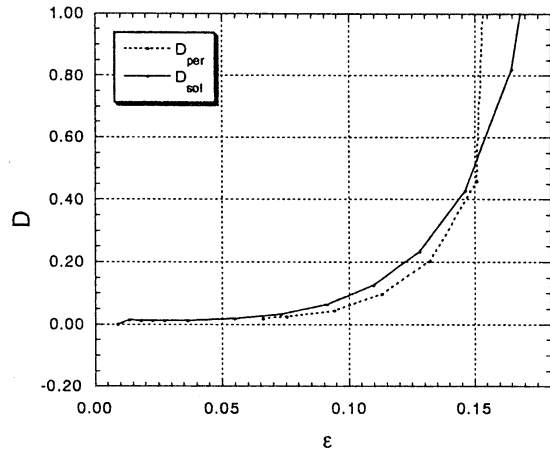


図 13 : Stokes 波と孤立波の第一不安定モードの波形の収束。

§6. 議論

前節で得られた結果は「§2. 本研究の動機」で述べたナイーブな予想、すなわち「限界波高に近い大振幅定常進行重力波は無限に多くの独立な不安定モードを持つ」が正しいことを強く示唆する。その一方でこの予想が最近の Longuet-Higgins らの結果と両立するための様々な可能性をすべて否定するように思われる。第一の可能性、すなわち不安定モードは無限に多く存在するものの、クレスト近傍の相似流の領域に局在し、「クレスト不安定」と呼べるようなモードは一つしかないという可能性は、そのような不安定が少なくとも 2 つはあるという上の結果と明らかに矛盾する。また第 2 の可能性、すべての不安定モードが最終的に単一のモードに収束するという可能性も、最初の 2 つの不安定モードが全く異なる関数形および増幅率に収束するという上述の数値結果とは相容れない。図 6 に示した最初の 2 つの不安定モードの固有値の振舞い、及び第三モード以降の振舞いが最初の 2 つのモードのそれと本質的に異なることを期待する理由が何もないことから第 3 の可能性も非常に薄いと考えられる。これらを考え合わせると、LHC(1994) 及び LHCF(1994) の漸近解析結果の正当性は疑わしいといわざるを得ない。

最後に、この不安定性の物理的な意味、重要性についてひとこと触れておく。水面波の砕波の仕方には大きく分けて「plunging breaker」と呼ばれるものと「spilling breaker」と呼ばれるものの 2 種類あることが知られている。海岸などの浅水域での遡上によって引

き起こされる砕波については前者が、また深水域での砕波には後者がより重要と考えられる。plunging breaker と spilling breaker の間には何ら本質的な差違はなく、単にクレストから前方に飛び出すジェットのサイズの違いだけと考えている研究者が多いが、その一方で spilling breaker は plunging breaker とは本質的に異なり、spilling breaker においてはそもそも overturning (水面波形の多価化) やジェットの放出は必要不可欠な部分ではないと考える研究者もいる (Longuet-Higgins, 1994)。彼らは spilling breaker を特徴付けるところの波形前面に現れるさざ波 (表面張力波) の原因をジェットの突っ込みや急峻なクレストが作り出す大きな曲率に求める代わりに、本研究で扱ったようなクレスト近傍に局在する固有関数と大きな増幅率を持つ不安定性に求めている。すなわちそのような不安定の増幅によってクレスト近傍の波形のみが局所的に大きな変形を受け、そうでない領域との境界に表面張力を有効にするような大きな曲率が生み出されるというものである。この理論によると spilling breaker のさざ波はクレストそのものではなく、そこからやや前方に下がった波形前面の中腹から生じることになるが、これに対しては実験的なサポートもある (Duncan et al. 1994)。spilling breaker は海洋における風波のエネルギー散逸の最も重要な素過程であり、それを引き起こす詳細なメカニズムを解明することは、海面における海と大気エネルギー・物質の交換に対する信頼できる評価法を確立する上で重要な基礎的課題だと思われる。

参考文献

- Longuet-Higgins, M.S. & Fox, M.J.H. (1977): Theory of the almost-highest wave: the inner solution. *J. Fluid Mech.* 80, 721-741.
- Longuet-Higgins, M.S. & Fox, M.J.H (1978): Theory of the almost-highest wave: Part 2: Matching and analytic extension *J. Fluid Mech.* 85, 769-786.
- Longuet-Higgins, M.H. (1978): The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water I. Superharmonics. *Proc. R. Soc. Lond.* A360, 471-488.
- Tanaka, M. (1983): The stability of steep gravity waves. *J. Phys. Soc. Japan* 52, 3047-3055.
- Tanaka, M. (1985): The stability of steep gravity waves. Part 2 *J. Fluid Mech.* 156, 281-289.
- Saffman, P.G. (1985): The superharmonic instability of finite-amplitude water waves *J. Fluid Mech.* 159, 169-174.

- Tanaka, M. (1986): The stability of solitary waves. *Phys. Fluids* 29, 650-655.
- Tanaka, M., Dold, J.W., Lewy, M. & Peregrine, D.H. (1987): Instability and breaking of a solitary wave. *J. Fluid Mech.* 185, 235-248.
- Zufiria & Saffman (1986): The superharmonic instability of finite-amplitude surface waves on water of finite depth. *Stud. in Appl. Math.* 74, 259-266.
- Longuet-Higgins, M.S. & Cleaver, R.P. (1994): Crest instabilities of gravity waves. Part 1. The almost-highest wave *J. Fluid Mech.* 258, 115-129.
- Longuet-Higgins, M.S., Cleaver, R.P. & Fox, M.J.H (1994): Crest instabilities of gravity waves. Part 2. Matching and asymptotic analysis. *J. Fluid Mech.* 259, 333-344.
- Longuet-Higgins, M.S. (1994) The initiation of spilling breaker. *Proceedings of International Symposium: Waves—Physical and Numerical Modelling*, 24-48.
- Duncan, J.H., Philomin, V., Behres, M. & Kimmel, J. (1994): The formation of spilling breaking water waves. *Phys. of Fluids* 6, 2558-2560.