

Unitary 群上の nearly holomorphic な保型形式への Galois action

京都大学理学研究科数学教室 山内淳生

0 Introduction

上半平面 $\mathcal{H}$ 上の $SL(2, \mathbb{Q})$ についての正則保型形式 (elliptic modular form) f は、Fourier 展開を持つ。つまり、

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \exp(2\pi\sqrt{-1}mz/N) \quad (N \in \mathbb{N}).$$

このとき、任意の $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ について f^σ という

$$f^\sigma(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^\sigma \exp(2\pi\sqrt{-1}mz/N) \quad (N \in \mathbb{N})$$

なる Fourier 展開を持つ正則保型形式が存在することはよく知られている。なお、 $\mathcal{H}$ 上の nearly holomorphic な保型形式 (重さ 2 の Eisenstein 級数 E_2 が有名) は、一般に

$$f(z) = \sum_{j=0}^p \left\{ (\pi \text{Im}(z))^{-j} \sum_{m=0}^{\infty} c_{(f,j,m)} \exp(2\pi\sqrt{-1}mz/N) \right\}$$

という展開を持ち、やはり任意の $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ について

$$f^\sigma(z) = \sum_{j=0}^p \left\{ (\pi \text{Im}(z))^{-j} \sum_{m=0}^{\infty} c_{(f,j,m)}^\sigma \exp(2\pi\sqrt{-1}mz/N) \right\}$$

なる nearly holomorphic な保型形式が存在している。

このような Galois action を 3 次 unitary 群上の nearly holomorphic な保型形式の Fourier-Jacobi 展開について構成する。

1 正則な保型形式への Galois action

まず、unitary 群上の (Fourier-Jacobi 展開を持つ場合の) 正則保型形式への Galois action について述べることにする。この節の内容は、[7] の要約である。

次のように記号を定義する。

F : 有限次総実代数体

K : F の CM (総虚 2 次) 拡大体

ρ : $\text{Gal}(K/F)$ の生成元 (複素共役)

$\mathfrak{a}$: F の (K の) 無限素点全体のなす集合

$X^{\mathfrak{a}} := \{x = (x_v)_{v \in \mathfrak{a}} \mid x_v \in X\}$

$\text{Aut}(\mathbb{C}) \curvearrowright X^{\mathfrak{a}}$ by $x^\sigma = y = (y_v)_{v \in \mathfrak{a}}$ where $y_{v\sigma} = x_v$.

$\mathbb{Z}^{\mathfrak{a}}$: 自由加群 $\sum_{v \in \mathfrak{a}} \mathbb{Z} \cdot v$ と同一視。 $\mathbf{1} := \sum_{v \in \mathfrak{a}} v$.

$e_{\mathfrak{a}}(x) := \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{v \in \mathfrak{a}} x_v)$ for $x = (x_v)_{v \in \mathfrak{a}} \in \mathbb{C}^{\mathfrak{a}}$.

このとき K 上の m 次非退化 skew-hermitian R を ($m = 2q + n$)

$$R = \begin{pmatrix} & & 1_q \\ & S & \\ -1_q & & \end{pmatrix} \quad \text{但し} \quad S = \begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{pmatrix},$$

$s_j^\rho = -s_j$ ($1 \leq j \leq n$), $\sqrt{-1}S$ は、 K の全ての無限素点で definite

となるようにとる。(K 上の m 次 skew-hermitian R で、 $\sqrt{-1}R$ の signature が全ての無限素点で $(q, n+q)$ か $(n+q, q)$ になっているものは、基底を適当にとれば、この形になる。) この R についての unitary similitudes 群 $G^{(q,n)}(S, \Psi)$ を、

$$G^{(q,n)}(S, \Psi)(\mathbb{Q}) = \{\gamma \in \text{GL}(m, K) \mid {}^t \gamma^\rho R \gamma = \nu(\gamma) R \text{ with } \nu(\gamma) \in F^\times\}$$

ととる。なお、 $\Psi = (\Psi_v)_{v \in \mathfrak{a}}$ は K の CM-type で、各 $v \in \mathfrak{a}$ で $-\sqrt{-1}S^{\Psi_v}$ が positive definite となるもの。(以後、 $b \in K$ について b^Ψ で $(b^{\Psi_v})_{v \in \mathfrak{a}} \in \mathbb{C}^{\mathfrak{a}}$ を表すものとする。つまり、CM-type を K の $\mathbb{C}^{\mathfrak{a}}$ への dense な埋め込みとみる。) また、special unitary 群 $G_1^{(q,n)}(S, \Psi)$ を、

$$G_1^{(q,n)}(S, \Psi)(\mathbb{Q}) = \{\gamma \in G^{(q,n)}(S, \Psi)(\mathbb{Q}) \mid \nu(\gamma) = \det(\gamma) = 1\}$$

とする。これらの作用する対称領域 $\mathfrak{D}^{(q,n)}(S, \Psi)$ を

$$\mathfrak{D}^{(q,n)}(S, \Psi) = \prod_{v \in \mathfrak{a}} \left\{ z_v = \begin{pmatrix} z_v \\ w_v \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_q^{q+n} \mid z_v \in \mathbb{C}_q^q, w_v \in \mathbb{C}_q^n, \sqrt{-1}({}^t w_v S^{\Psi_v} w_v + {}^t z_v - z_v) > 0 \right\}$$

ととる。(以後、環 A について、 A 係数の a 行 b 列の行列全体のなす集合を A_b^a と書く。) この対称領域への $G^{(q,n)}(S, \Psi)(\mathbb{Q})$ の作用を以下のよ

うに定義する。任意の $\mathfrak{z} = (z_v)_{v \in \mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} z_v \\ w_v \end{pmatrix}_{v \in \mathfrak{a}} \in \mathcal{D}^{(q,n)}(S, \Psi)$ と $\alpha =$

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in G^{(q,n)}(S, \Psi)(\mathbb{Q})$ (block の分け方は、順に、 q 行、 n 行、 q 行、 q 列、 n 列、 q 列) に対して、

$$\alpha(\mathfrak{z}) = \begin{pmatrix} (a_1^{\Psi_v} z_v + b_1^{\Psi_v} w_v + c_1^{\Psi_v})(a_3^{\Psi_v} z_v + b_3^{\Psi_v} w_v + c_3^{\Psi_v})^{-1} \\ (a_2^{\Psi_v} z_v + b_2^{\Psi_v} w_v + c_2^{\Psi_v})(a_3^{\Psi_v} z_v + b_3^{\Psi_v} w_v + c_3^{\Psi_v})^{-1} \end{pmatrix}_{v \in \mathfrak{a}},$$

また、各 $v \in \mathfrak{a}$ ごとに保型因子を

$$\lambda_v(\alpha, \mathfrak{z}) = \begin{pmatrix} \overline{a_3^{\Psi_v} z_v + c_3^{\Psi_v}} & \overline{a_3^{\Psi_v} w_v - b_3^{\Psi_v} (S^{\Psi_v})^{-1}} \\ -S^{\Psi_v} \overline{a_2^{\Psi_v} z_v - S^{\Psi_v} c_2^{\Psi_v}} & -S^{\Psi_v} \overline{a_2^{\Psi_v} w_v + S^{\Psi_v} b_2^{\Psi_v} (S^{\Psi_v})^{-1}} \end{pmatrix},$$

$$\mu_v(\alpha, \mathfrak{z}) = a_3^{\Psi_v} z_v + b_3^{\Psi_v} w_v + c_3^{\Psi_v},$$

と定める。このとき、当然 $(\alpha\beta)(\mathfrak{z}) = \alpha(\beta(\mathfrak{z}))$ と $\lambda_v(\alpha\beta, \mathfrak{z}) = \lambda_v(\alpha, \beta(\mathfrak{z}))\lambda_v(\beta, \mathfrak{z})$, $\mu_v(\alpha\beta, \mathfrak{z}) = \mu_v(\alpha, \beta(\mathfrak{z}))\mu_v(\beta, \mathfrak{z})$ が成り立つ。

任意の $k = (k_v)_{v \in \mathfrak{a}} \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{a}}$ と $\alpha \in G^{(q,n)}(S, \Psi)(\mathbb{Q})$ と $\mathcal{D}^{(q,n)}(S, \Psi)$ 上の関数 f について、

$$(f|_k \alpha)(\mathfrak{z}) = f(\alpha(\mathfrak{z})) \prod_{v \in \mathfrak{a}} \det(\mu_v(\alpha, \mathfrak{z}))^{-k_v}$$

と定義する。このとき、合同部分群 Γ についての重さ k の正則保型形式の空間を $\mathcal{M}_k^{(q,n)}(S, \Psi)(\Gamma)$ 、全ての合同部分群についてのその union を $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_k^{(q,n)}(S, \Psi)$ とおく。この場合、 $f \in \mathcal{M}_k^{(q,n)}(S, \Psi)$ は、次のような Fourier-Jacobi 展開を持つ。

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{z}) &= \sum_r g_{(f,r)}(w) \mathbf{e}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{tr}(r^{\Psi} z)) \\ &= \sum_r g_{(f,r)}(w) \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{v \in \mathfrak{a}} \mathrm{tr}(r^{\Psi_v} z_v)) \\ (1.1) \quad &\left(\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_v \\ w_v \end{pmatrix}_{v \in \mathfrak{a}} \in \mathcal{D}^{(q,n)}(S, \Psi) \right). \end{aligned}$$

なお、ここで r は

$$\mathcal{H}_q = \{x \in K_q^q \mid {}^t x^{\rho} = x\}$$

の中のある $\mathbb{Z}$ -lattice を動く。(但し、以下の theta 関数の議論より、 $g_{(f,r)} \neq 0$ となるのは r が各 $v \in \mathfrak{a}$ で semi-positive definite になっているときのみ

である。) ここで、各「係数」 $g_{(f,r)}$ は $(\mathbb{C}_q^n)^a$ 上の以下の hermitian form $H_{r,S,\Psi}$ と lattice L^Ψ (L は K_q^n の $\mathbb{Z}$ -lattice) についての theta 函数になっている。

$$H_{r,S,\Psi}((w_{1v})_{v \in \mathfrak{a}}, (w_{2v})_{v \in \mathfrak{a}}) = -2\sqrt{-1} \sum_{v \in \mathfrak{a}} \text{tr}(r^{\Psi \cdot t} \overline{w_{1v}} S^{\Psi \cdot v} w_{2v}).$$

つまり、 $g_{(f,r)}$ は次の theta 函数の空間に含まれている。

$$\mathfrak{I}((\mathbb{C}_q^n)^a, L^\Psi, H_{r,S,\Psi}) = \left\{ g : (\mathbb{C}_q^n)^a \rightarrow \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} g \text{ is holomorphic on } (\mathbb{C}_q^n)^a \text{ and} \\ g(w + l^\Psi) = \exp(\pi H_{r,S,\Psi}(l^\Psi, w + 2^{-1}l^\Psi))g(w) \\ \text{for any } l \in L \text{ and } w \in (\mathbb{C}_q^n)^a \end{array} \right. \right\}.$$

この $g \in \mathfrak{I}((\mathbb{C}_q^n)^a, L^\Psi, H_{r,S,\Psi})$ に対して、 g_* という (正則でない) 関数を、 $g_*(w) = \exp(-\frac{\pi}{2} H_{r,S,\Psi}(w, w))g(w)$ と定める。このとき、theta 函数の条件式を変形して、

$$g_*(y^\Psi + l^\Psi) = \exp(-\pi\sqrt{-1}\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}({}^t l^\rho T y)) \cdot g_*(y^\Psi)$$

($y \in K_q^n$, $l \in L$) を得る。この式は、「 K_q^n の任意の $\mathbb{Z}$ -lattice L_1 について、その sublattice L_2 が存在し、 $g_*|_{L_1^\Psi}$ は L_2^Ψ -周期である」ということを意味している。(g_* が周期関数ということではない。) 従って、近似により $g_*(y^\Psi)$ を $y \in (K_A)_q^n$ に対して定義することができる (K_A は K の adele)。

K の CM-type Ψ と任意の $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ について、[7] (本質的には [3],[1]) で K の idele class $g_\Psi(\sigma) \in K_A^\times / K^\times K_\infty^\times$ 及び

$$C_\Psi(\mathbb{C}) = \{(\sigma, \Psi, a) \mid \sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}), a \in g_\Psi(\sigma)\}$$

を定めた。この $(\sigma, \Psi, a) \in C_\Psi(\mathbb{C})$ は、 $aa^\rho \in \chi(\sigma)F^\times F_\infty^\times$ ($\chi(\sigma) \in \prod_p \mathbb{Z}_p^\times \subset \mathbb{Q}_A^\times$ で、 $[\chi(\sigma)^{-1}, \mathbb{Q}] = \sigma|_{\mathbb{Q}_A}$ となるもの) を満たす。ここで、 $\iota(\sigma, a) \in F^\times$ を $\chi(\sigma)/aa^\rho \in \iota(\sigma, a)F_\infty^\times$ となるようにとる。なお、 $\Psi\sigma = \Psi$ つまり σ の Ψ の reflex 体 K_Ψ^* への作用が自明のときには、 $[b^{-1}, K_\Psi^*] = \sigma|_{K_{\Psi,ab}^*}$ なる $b \in (K_\Psi^*)_A^\times$ と reflex norm N'_Ψ を用いて、

$$g_\Psi(\sigma) = N'_\Psi(b)K^\times K_\infty^\times$$

と書ける。この $C_\Psi(\mathbb{C})$ を使い、theta 函数への Galois action を定義することができる。(次の二つの定理は [7] 参照。)

定理 $g \in \mathfrak{I}((\mathbb{C}_q^n)^{\mathbf{a}}, L^\Psi, H_{r,S,\Psi})$ と $(\sigma, \Psi, a) \in C_\Psi(\mathbb{C})$ について、 $g^{(\sigma, \Psi, a)} \in \mathfrak{I}((\mathbb{C}_q^n)^{\mathbf{a}}, (aL)^\Psi, H_{r, \iota(\sigma, a)S, \Psi\sigma})$ が存在し、

$$(g^{(\sigma, \Psi, a)})_*((ay)^{\Psi\sigma}) = \{g_*(y^\Psi)\}^\sigma \quad \text{for any } y \in K_q^n$$

を満たす。

定理 ([7] の主定理) $f \in \mathcal{M}_k^{(q,n)}(S, \Psi)$ の Fourier-Jacobi 展開を (1.1) とおく。このとき、任意の $(\sigma, \Psi, a) \in C_\Psi(\mathbb{C})$ について、 $f^{(\sigma, \Psi, a)} \in \mathcal{M}_k^{(q,n)}(\iota(\sigma, a)S, \Psi\sigma)$ という、以下の Fourier-Jacobi 展開を持つ正則保型形式が存在する。

$$f^{(\sigma, \Psi, a)}(\tilde{z}) = \sum_r g_{(f,r)}^{(\sigma, \Psi, a)}(\tilde{w}) \mathbf{e}_{\mathbf{a}}(\text{tr}(r^\Psi \tilde{z}))$$

$$\left(\tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_v \\ \tilde{w}_v \end{pmatrix}_{v \in \mathbf{a}} \in \mathfrak{D}^{(q,n)}(\iota(\sigma, a)S, \Psi\sigma) \right).$$

2 Nearly holomorphic な保型形式への Galois action

この節では、本題である $U(2, 1)$ つまり $q = n = 1$ の場合の 3 次 unitary 群について、その上の nearly holomorphic な保型形式へ Galois action を構成する。つまり、[8] の要約である。

各 $v \in \mathbf{a}$ について、

$$\eta_v(\mathfrak{z}) = \eta_v^{(1,1)}(s, \Psi)(\mathfrak{z}) = \sqrt{-1}(s^{\Psi_v} w_v \overline{w_v} + \overline{z_v} - z_v)$$

$$\xi_v(\mathfrak{z}) = \xi_v^{(1,1)}(s, \Psi)(\mathfrak{z}) = \sqrt{-1} \begin{pmatrix} \overline{z_v} - z_v & \overline{w_v} \\ -w_v & (s^{\Psi_v})^{-1} \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 $\alpha \in G^{(1,1)}(s, \Psi)(\mathbb{Q})$ について

$$\nu(\alpha)_v \xi_v(\mathfrak{z}) = {}^t \lambda_v(\alpha, \mathfrak{z}) \xi_v(\alpha(\mathfrak{z})) \overline{\lambda_v(\alpha, \mathfrak{z})},$$

$$\nu(\alpha)_v \eta_v(\mathfrak{z}) = \mu_v(\alpha, \mathfrak{z}) \eta_v(\alpha(\mathfrak{z})) \overline{\mu_v(\alpha, \mathfrak{z})},$$

が成り立つ。

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V と V に値を持つ $\mathfrak{D}^{(1,1)}(s, \Psi)$ 上の関数 f に対して、 $\text{Hom}(\mathbb{C}_1^2, V)$ -値関数 $D_v f$ と $\overline{D}_v f$ ($v \in \mathbf{a}$) を

$$(D_v f)(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_v}, \frac{\partial f}{\partial w_v} \right) \cdot u,$$

$$(\overline{D}_v f)(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z_v}}, \frac{\partial f}{\partial \overline{w_v}} \right) \cdot u \quad (u \in \mathbb{C}_1^2),$$

と定義する。さらに、

$$(E_v f)(u) = (\overline{D_v} f)(\xi_v u \eta_v)$$

とおく。さて、各 $v \in \mathbf{a}$ について2つの C^∞ -関数を、

$$\begin{aligned} r_{1,v}(\mathfrak{z}) &= r_{1,v}^{(1,1)}(s, \Psi)(\mathfrak{z}) = \sqrt{-1} \eta_v^{(1,1)}(s, \Psi)(\mathfrak{z})^{-1}, \\ r_{2,v}(\mathfrak{z}) &= r_{2,v}^{(1,1)}(s, \Psi)(\mathfrak{z}) = -\sqrt{-1} s^{\Psi_v} \overline{w_v} \eta_v^{(1,1)}(s, \Psi)(\mathfrak{z})^{-1}, \end{aligned}$$

と定める。

合同部分群 Γ と $p = (p_v)_{v \in \mathbf{a}} \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^{\mathbf{a}}$ と $k = (k_v)_{v \in \mathbf{a}} \in \mathbf{Z}^{\mathbf{a}}$ について、重さ k の nearly holomorphic な保型形式の空間を、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_k^p(\Gamma) &= \mathcal{N}_k^{p,(1,1)}(s, \Psi)(\Gamma) \\ &= \left\{ f \in C^\infty(\mathcal{D}^{(1,1)}(s, \Psi)) \left| \begin{array}{l} f|_k \gamma = f \text{ for any } \gamma \in \Gamma, \\ (E_v^{p_v+1})f = 0 \text{ for each } v \in \mathbf{a} \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

と定義する。正則な場合と同様に、全ての合同部分群 Γ についての $\mathcal{N}_k^p(\Gamma)$ の union を $\mathcal{N}_k^p = \mathcal{N}_k^{p,(1,1)}(s, \Psi)$ とおく。このとき、 $f \in \mathcal{N}_k^{p,(1,1)}(s, \Psi)$ は

$$f(\mathfrak{z}) = \sum_{\substack{j_1, j_2 \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^{\mathbf{a}} \\ j_1 + j_2 \leq p}} c(f; j_1, j_2)(\mathfrak{z}) \left(\prod_{v \in \mathbf{a}} r_{1,v}(\mathfrak{z})^{j_{1,v}} \right) \left(\prod_{v \in \mathbf{a}} r_{2,v}(\mathfrak{z})^{j_{2,v}} \right)$$

と、正則関数 $c(f; j_1, j_2)$ を用いて表される。つまり、 f は、正則関数係数の $\cup_{v \in \mathbf{a}} \{r_{1,v}, r_{2,v}\}$ の多項式になっている。さて、 $r_{2,v}(\mathfrak{z}) = -s^{\Psi_v} \overline{w_v} r_{1,v}(\mathfrak{z})$ であることを使うと、 f は、

(2.1)

$$f(\mathfrak{z}) = \sum_{\substack{j \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^{\mathbf{a}} \\ 0 \leq j \leq p}} \sum_{0 \leq m \in F} g(f; j, m)(w) \mathbf{e}_{\mathbf{a}}(mz) \left(\prod_{v \in \mathbf{a}} \left((\pi \sqrt{-1})^{-1} r_{1,v}^{(1,1)}(s, \Psi)(\mathfrak{z}) \right)^{j_v} \right)$$

と書き直すことができる。(但し、 $j \leq p$ は全ての $v \in \mathbf{a}$ について $j_v \leq p_v$ であることを表す。上の式の $j_1 + j_2 \leq p$ も同様。) ここで、Unipotent radical の作用を考えると、各 $g(f; j, m)$ は、nearly holomorphic な theta 関数になることが分かる。つまり、 K のある $\mathbf{Z}$ -lattice L と $j = (j_v)_{v \in \mathbf{a}} \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^{\mathbf{a}}$ について、

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^j(\mathbf{C}^{\mathbf{a}}, L^{\Psi}, H_{m,s,\Psi}) &= \\ \left\{ g : \mathbf{C}^{\mathbf{a}} \rightarrow \mathbf{C} \left| \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{w_v}} \right)^{j_v+1} g = 0 \text{ for each } v \in \mathbf{a} \text{ and} \\ g(w + l^{\Psi}) = \exp(\pi H_{m,s,\Psi}(l^{\Psi}, w + 2^{-1} l^{\Psi})) g(w) \\ \text{for any } l \in L \text{ and } w \in \mathbf{C}^{\mathbf{a}} \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

なる関数の空間に含まれる。言い換えると、正則関数係数の $\{\overline{w_v} | v \in \mathfrak{a}\}$ の多項式で、theta 関数の条件式を満たすものである。こういった nearly holomorphic な theta 関数は、正則な theta 関数にある微分作用素を施したものの一次結合になっている。(Nearly holomorphic な theta 関数は、[2] や [5] などで紹介されている。)

この $g \in \mathcal{I}^j(\mathbb{C}^{\mathfrak{a}}, L^{\Psi}, H_{m,s,\Psi})$ について、 $g_*(y^{\Psi})$ を正則な場合と同様に $y \in K_A$ について定義でき、以下の定理が成り立つ。

定理 任意の $g \in \mathcal{I}^p(\mathbb{C}^{\mathfrak{a}}, L^{\Psi}, H_{m,s,\Psi})$ と $(\sigma, \Psi, a) \in C_{\Psi}(\mathbb{C})$ に対して、 $g^{(\sigma, \Psi, a)} \in \mathcal{I}^{p\sigma}(\mathbb{C}^{\mathfrak{a}}, (aL)^{\Psi\sigma}, H_{m, \iota(\sigma, a)s, \Psi\sigma})$ という以下の条件を満たす nearly holomorphic な theta 関数が存在する。

$$(g^{(\sigma, \Psi, a)})_*((ay)^{\Psi\sigma}) = \{g_*(y^{\Psi})\}^{\sigma} \quad \text{for each } y \in K.$$

定理 (2.1) の展開を持つ $f \in \mathcal{N}_k^{p, (1,1)}(s, \Psi)$ と $(\sigma, \Psi, a) \in C_{\Psi}(\mathbb{C})$ について、 $f^{(\sigma, \Psi, a)} \in \mathcal{N}_{k\sigma}^{p\sigma, (1,1)}(\iota(\sigma, a)s, \Psi\sigma)$ という以下の展開を持つ nearly holomorphic な保型形式が存在する。

$$\begin{aligned} f^{(\sigma, \Psi, a)}(\tilde{\mathfrak{z}}) = & \sum_{\substack{j \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{\mathfrak{a}} \\ 0 \leq j \leq p}} \sum_{0 \leq m \in F} g_{(f, j, m)}^{(\sigma, \Psi, a)}(\tilde{w}) e_{\mathfrak{a}}(m\tilde{z}) \\ & \times \prod_{v \in \mathfrak{a}} \left((\pi\sqrt{-1})^{-1} r_{1, v\sigma}^{(1,1)}(\iota(\sigma, a)s, \Psi\sigma)(\tilde{\mathfrak{z}}) \right)^{j_v} \\ & \left(\tilde{\mathfrak{z}} = \begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}^{(1,1)}(\iota(\sigma, a)s, \Psi\sigma) \right). \end{aligned}$$

全ての $v \in \mathfrak{a}$ について $k_v \geq 5$ のときには、この $\mathcal{N}_k^p$ から $\mathcal{M}_k$ への orthogonal projection $\mathfrak{A}$ が存在する。([8] の §5 あるいは [6] の §15 参照。) なお、任意の $f \in \mathcal{N}_k^p$ について、 $\mathfrak{A}f - f$ は、全ての重さ k の cusp form との内積が 0 となる。ここで、上で構成した Galois action とこの $\mathfrak{A}$ は可換となる。つまり、次の定理が成り立つ。

定理

$$(\mathfrak{A}f)^{(\sigma, \Psi, a)} = \mathfrak{A}(f^{(\sigma, \Psi, a)}).$$

(但し、左辺の $\mathfrak{A}$ は $\mathcal{N}_k^{p, (1,1)}(s, \Psi)$ から $\mathcal{M}_k^{(1,1)}(s, \Psi)$ への projection で、右辺の $\mathfrak{A}$ は $\mathcal{N}_{k\sigma}^{p\sigma, (1,1)}(\iota(\sigma, a)s, \Psi\sigma)$ から $\mathcal{M}_{k\sigma}^{(1,1)}(\iota(\sigma, a)s, \Psi\sigma)$ への projection である。)

参考文献

- [1] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus, K.-Y. Shih, Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, Lecture Notes in Math. 900, Springer-Verlag, 1982.
- [2] Y. Ishikawa, The Generalized Whittaker Functions for $SU(2, 1)$ and the Fourier Expansions of Automorphic Forms, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 6(1999), 477-526.
- [3] S. Lang, Complex Multiplication, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 255, Springer-Verlag, 1983.
- [4] G. Shimura, On a class of nearly holomorphic automorphic forms, Ann. of Math. 123(1986), 347-406.
- [5] G. Shimura, Nearly holomorphic functions on hermitian symmetric spaces, Math. Ann. 278(1987), 1-28.
- [6] G. Shimura, Arithmeticity in the theory of automorphic forms, Mathematical Surveys and Monographs 82, AMS(2000).
- [7] A. Yamauchi, On a certain extended Galois action on the space of arithmetic modular forms with respect to a unitary group, J. Math. Kyoto Univ. 41 No.1(2001), 183-231.
- [8] A. Yamauchi, A certain Galois action on nearly holomorphic modular forms with respect to a unitary group in three variables, プレプリント。