

楢円 Ruijsenaars 差分作用素の形式的固有函数 Formal eigenfunctions for the elliptic Ruijsenaars difference operators

By

Edwin LANGMANN* · 野海 正俊** · 白石 潤一***
Edwin LANGMANN, Masatoshi NOUMI and Junichi SHIRAISHI

Abstract

We report recent progresses on the existence of formal eigenfunctions for the elliptic Ruijsenaars difference operators. These formal eigenfunctions provide p -deformations of Macdonald polynomials and asymptotically free Macdonald functions. We also give remarks on the present status of conjectures regarding the non-stationary Ruijsenaars functions.

序

本稿では、楢円 Ruijsenaars 差分作用素の形式的固有函数 (Macdonald 多項式及び漸近挙動で指定される Macdonald 函数の p 変形) の存在と、非定常型 Ruijsenaars 函数に関する予想の現状と課題について報告したい。

2 個の底 $p, q \in \mathbb{C}^*$ ($|p| < 1, |q| < 1$) とパラメータ $t \in \mathbb{C}^*$ を固定する。次のように定義される q 差分作用素 $\mathcal{D}_x^{(r)}(p)$ ($r = 1, 2, \dots, n$) を、 A 型 n 変数 $x = (x_1, \dots, x_n)$ の楢円 Ruijsenaars q 差分作用素 という。

$$(0.1) \quad \mathcal{D}_x^{(r)}(p) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}; |I|=r} t^{(r)} \prod_{i \in I, j \notin I} \frac{\theta(tx_i/x_j; p)}{\theta(x_i/x_j; p)} \prod_{i \in I} T_{q, x_i} \quad (r = 1, \dots, n)$$

ここで、 $\theta(z; p)$ ($z \in \mathbb{C}^*$) は、Jacobi テータ函数の乗法的記法で、

$$(0.2) \quad \theta(z; p) = (z; p)_\infty (p/z; p)_\infty, \quad (z; p)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - p^i z) \quad (z \in \mathbb{C})$$

Received May 21, 2020. Revised August 16, 2020.

2020 Mathematics Subject Classification(s): 81Q80; 33E30, 33D67

Key Words: Ruijsenaars 作用素, 形式的固有函数, Macdonald 多項式

*Department of Physics, KTH Royal Institute of Technology, SE-106 91, Stockholm, Sweden

**神戸大学大学院理学研究科 (Department of Mathematics, Kobe University, Kobe 657-8501, Japan)

***東京大学大学院数理科学研究科 (Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, Tokyo 153-8914, Japan)

で定義されるものである. また, T_{q,x_i} ($i = 1, \dots, n$) は, 変数 x_i に関する q シフトの作用素を表す: $T_{q,x_i} f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n)$.

Ruijsenaars の先駆的な研究 (1987, [7]) によって, これらの作用素 $\mathcal{D}_x^{(r)}(p)$ ($r = 1, \dots, n$) が互いに可換であることが知られている. 基本的な課題は, この q 差分作用素の可換族の同時固有函数, 即ち q 差分方程式

$$(0.3) \quad \mathcal{D}_x^{(r)}(p)\psi(x;p) = \varepsilon^{(r)}(p)\psi(x;p) \quad (r = 1, \dots, n).$$

満たすような函数 $\psi(x;p)$ を記述することである. 本稿では特に, 同時固有函数 $\psi(x;p)$ および固有値 $\varepsilon^{(r)}(p)$ が

$$(0.4) \quad \psi(x;p) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \psi_k(x), \quad \varepsilon^{(r)}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \varepsilon_k^{(r)} \quad (r = 1, \dots, n)$$

のように p の形式冪級数として展開可能なものを考察する.

以下では, まず「三角」の場合に知られている事項を概観し, その後で「楕円」の場合の形式的同時固有函数を中心に, 最近の進展について報告する.

§ 1. Macdonald–Ruijsenaars 差分作用素の同時固有函数 (三角の場合)

§ 1.1. Macdonald–Ruijsenaars の q 差分作用素

$p \rightarrow 0$ の極限では, 楕円 Ruijsenaars 差分作用素 $\mathcal{D}_x^{(r)}(p)$ は次の, 有理函数を係数とする q 差分作用素に移行する:

$$(1.1) \quad D_x^{(r)} = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}; |I|=r} t^{(2)} \prod_{i \in I, j \notin I} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i \in I} T_{q,x_i} \quad (r = 1, \dots, n).$$

本稿では, $D_x^{(r)}$ を **Macdonald–Ruijsenaars q 差分作用素** と呼ぶ. 差積の記号 $\Delta(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ を用いると, q 差分作用素 $D_x^{(r)}$ は次のように表示される.

$$D_x^{(r)} = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}; |I|=r} \frac{T_{t,x}^I \Delta(x)}{\Delta(x)} T_{q,x}^I \quad (r = 1, \dots, n), \quad T_{q,x}^I = \prod_{i \in I} T_{q,x_i}.$$

ルート系の記号で, 差積 $\Delta(x)$ は

$$(1.2) \quad \Delta(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} x_i (1 - x_j/x_i) = x^\rho \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - x^{-\alpha}).$$

と表示される. 以下では, 次のようなルート系の記号を用いる.

$P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i : \mathfrak{gl}_n$ の整ウエイトの格子, 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle : P \times P \rightarrow \mathbb{Z}; \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}$.
 $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \ (i = 1, \dots, n-1)$: 単純ルート, $Q = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}\alpha_i \subset P$: ルート格子,
 $\Delta_+ = \{ \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n \} \subset Q$: 正ルートの集合, $\rho = \sum_{i=1}^n (n-i)\varepsilon_i$.

ここで ρ と書いたのは Macdonald [4] の記号では $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0)$ であるが, δ は後でアフィン・ルート系の零ルートの意味で用いるので, このような流儀にしておく. また, 整ウエイト $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \in P$ に対して, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ を多重指数とする単項式 $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ と形式的指数函数 $e(\lambda) = e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda}$ を同一視する.

§ 1.2. Macdonald 多項式

Macdonald 多項式の理論 ([4]) では, パラメータ $t \in \mathbb{C}^*$ が一般の (generic な) 場合には, q 差分作用素の可換族 $D_x^{(r)}$ ($r = 1, \dots, n$) が対称 Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[x^\pm]^{\mathfrak{S}_n}$ 上で同時対角化されることが知られている.

$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \in P$ が次の同値な条件を満たすとき, λ は支配的であるといい, 支配的整ウエイトの全体からなる正錐を P_+ で表す.

$$(1.3) \quad \langle \alpha_i, \lambda \rangle \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n-1) \iff \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$$

また, ルート格子の正錐を $Q_+ = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ で表し, P 上の支配的順序 $\mu \leq \lambda$ を次の条件で定義する.

$$(1.4) \quad \lambda - \mu \in Q_+ \iff |\mu| = |\lambda|, \quad \mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

定理 1.1. $t \in \mathbb{C}^*$ が一般性の条件 $t^k \notin q^{\mathbb{Z}}$ ($k = 1, \dots, n-1$) を満たすとする. このとき, 任意の支配的整ウエイト $\lambda \in P_+$ に対して, 次の条件を満たす対称 Laurent 多項式 $P_\lambda(x) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$ が唯一つ存在する.

- (0) $P_\lambda(x) = x^\lambda + (\text{支配的順序 } \leq \text{に関して } x^\lambda \text{ より小さい項})$
- (1) 各 $r = 1, \dots, n$ に対して $D_x^{(r)} P_\lambda(x) = d_\lambda^{(r)} P_\lambda(x)$ となる $d_\lambda^{(r)} \in \mathbb{C}$ が存在する.

以下, パラメータ $t \in \mathbb{C}^*$ は上の意味の一般性の条件を満たすものと仮定する. このとき, 固有値 $d_\lambda^{(r)}$ は $t^\rho q^\lambda = (t^{n-1} q^{\lambda_1}, \dots, t q^{\lambda_{n-1}}, q^{\lambda_n})$ の r 次基本対称式 $e_r(t^\rho q^\lambda)$ と決まる. 条件 (0) から Macdonald 多項式 $P_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, t)$ ($\lambda \in P_+$) は, 対称 Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$ の $\mathbb{C}$ 基底をなす.

$$(1.5) \quad \mathbb{C}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\lambda \in P_+} \mathbb{C} P_\lambda(x)$$

このような定理が成立する根拠は,

- 互いに可換な Macdonald–Ruijsenaars 作用素 $D_x^{(r)}$ ($r = 1, \dots, n$) が対称 Laurent 多項式環を保つ $\mathbb{C}$ 線形写像 $D_x^{(r)} : \mathbb{C}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n} \rightarrow \mathbb{C}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$ を定義し, それらが支配的順序に関して三角性を持つこと,
- t の一般性の条件の下では, 固有値の $d_\lambda^{(r)} = e_r(t^\rho q^\lambda)$ ($r = 1, \dots, n$) が全体として支配的整ウェイト $\lambda \in P_+$ を分離すること

の 2 点である.

Macdonald 多項式には数多くの特徴的な性質があるが, その幾つかをここに掲げておく.

(a) 組合せ論的表示: 支配的整ウェイト $\lambda = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ が分割を表すとき, 即ち, 条件

$$(1.6) \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

を満たすとき, Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ は次のように, n ステップで ϕ から λ に至る, 分割の増大列に関する和で表される.

$$(1.7) \quad P_\lambda(x) = \sum_{\phi = \mu^{(0)} \subseteq \mu^{(1)} \subseteq \dots \subseteq \mu^{(n)} = \lambda} \prod_{k=1}^n \psi_{\mu^{(k)}/\mu^{(k-1)}} x_k^{|\mu^{(k)}/\mu^{(k-1)}|}$$

ここで, $\psi_{\lambda/\mu} = \psi_{\lambda/\mu}(q, t)$ は $\mu \subseteq \lambda$ を満たす分割の組に対して

$$(1.8) \quad \psi_{\lambda/\mu} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(q^{\mu_i - \lambda_j + 1} t^{j-i-1}; q)_{\lambda_i - \mu_i}}{(q^{\mu_i - \lambda_j} t^{j-i}; q)_{\lambda_i - \mu_i}} \prod_{1 \leq i \leq j < n} \frac{(q^{\mu_i - \mu_j} t^{j-i+1}; q)_{\lambda_i - \mu_i}}{(q^{\mu_i - \mu_j + 1} t^{j-i}; q)_{\lambda_i - \mu_i}}$$

$$(a; q)_k = (1-a)(1-qa) \cdots (1-q^{k-1}a) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

で定義される **Pieri** 係数で, λ/μ が水平断片 (horizontal strip) でないときには 0 となる. この明示公式は, λ を台とする半標準盤 (semi-standard tableau) の全体にわたる和に読替えることができるので, Macdonald 多項式のタブロー表示とも呼ばれる. (詳しくは Macdonald の本 [4] を参照のこと.)

(b) 自己双対性: $P_\lambda(x)$ を x 変数の基点 t^ρ での値が 1 となるように規格化すると, $x = t^\rho q^\mu$ での値が, $\mu \in P_+$ と $\lambda \in P_+$ に関して対称となる.

$$(1.9) \quad \tilde{P}_\lambda(x) = \frac{P_\lambda(x)}{P_\lambda(t^\rho)} \quad \text{と規格化すると} \quad \tilde{P}_\lambda(t^\rho q^\mu) = \tilde{P}_\mu(t^\rho q^\lambda) \quad (\lambda, \mu \in P_+).$$

この自己双対性の反映として, $P_\lambda(x)$ の q 差分方程式と, Pieri 公式 ($e_r(x)P_\lambda(x)$ を Macdonald 多項式で展開する公式) が互いに移り合う構造になっている.

§ 1.3. Macdonald 函数 (漸近自由な同時固有函数)

一般の複素数値のウェイト $\lambda \in P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ に対しても, $|x_1| \gg \cdots \gg |x_n|$ なる領域で x^λ を漸近展開の主要項とするような, 漸近自由 (asymptotically free) な, 有理型の同時固有函数が存在することが知られている. (Cherednik [1], van Meer–Stokman [5], Noumi–Shiraishi [6]).

以下では, 変数 $x^{-\alpha_i} = x_{i+1}/x_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) に関する有理函数体と形式冪級数環を, それぞれ, 記号

$$(1.10) \quad \mathbb{C}(x^{-Q_+}) = \mathbb{C}(x_2/x_1, \dots, x_n/x_{n-1}), \quad \mathbb{C}[[x^{-Q_+}]] = \mathbb{C}[[x_2/x_1, \dots, x_n/x_{n-1}]]$$

で表す. そこで, 変数 $x = (x_1, \dots, x_n)$ と双対変数 $s = (s_1, \dots, s_n)$ について, 次の形の形式冪級数を考える.

$$(1.11) \quad p(x; s) = \sum_{\beta \in Q_+} x^{-\beta} p_\beta(s) \in \mathbb{C}(s^{-Q_+})[[x^{-Q_+}]], \quad p_0(s) = 1$$

定理 1.2. 主係数 1 の形式冪級数 $p(x; s) \in \mathbb{C}(s^{-Q_+})[[x^{-Q_+}]]$ で, 一般の (*generic* な) 複素パラメータ $\lambda \in P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ に対しても, 次の条件を満たすものが唯一つ存在する: 双対変数の読替え $s = t^\rho q^\lambda$ 即ち $s_i = t^{n-i} q^{\lambda_i}$ ($i = 1, \dots, n-1$) の下で

$$(1.12) \quad D_x^{(r)} x^\lambda p(x; s) = e_r(t^\rho q^\lambda) x^\lambda p(x; s) \quad (r = 1, \dots, n).$$

本稿では, この $x^\lambda p(x; s)$ を領域 $|x_1| \gg |x_2| \gg \cdots \gg |x_n|$ の **Macdonald 函数** と呼ぶ. 定理の証明等については文献 [6] を参照してほしい.

こうして定まる $p(x; s) = p(x; s|q, t)$ もまた, Macdonald 多項式同様, 幾つもの著しい性質を持つことが知られている.

(a) 組合せ論的表示: 非負整数を成分とする, 狭義の上三角行列 $\theta = (\theta_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ の全体を M_n で表すとき, $p(x; s)$ は次のような無限和で表される.

$$(1.13) \quad p(x; s) = \sum_{\theta \in M_n} c(\theta; s) \prod_{1 \leq i < k \leq n} (x_k/x_i)^{\theta_{ik}},$$

$$c(\theta; s) = \prod_{1 \leq i < j \leq k \leq n} \frac{(q^{\theta_{i,>k}-\theta_{j,>k}} t s_j / s_i; q)_{\theta_{ik}}}{(q^{\theta_{i,>k}-\theta_{j,>k}} q s_j / s_i; q)_{\theta_{ik}}} \prod_{1 \leq i \leq j < k \leq n} \frac{(q^{\theta_{i,>k}-\theta_{j,\geq k}} q s_j / t s_i; q)_{\theta_{ik}}}{(q^{\theta_{i,>k}-\theta_{j,\geq k}} s_j / s_i; q)_{\theta_{ik}}}$$

ここで $\theta_{i,>k} = \sum_{k < l \leq n} \theta_{il}$ 等の略記法を用いた. 双対変数 s を $s = t^\rho q^\lambda$, $\lambda \in P_+$ と特殊化すると, $x^\lambda p(x; t^\rho q^\lambda) = P_\lambda(x)$ として, Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ が回復され, 上記の表示は $P_\lambda(x)$ のタブロー表示に戻る.

(b) 対称性: $p(x; s|q, t)$ を $\mathbb{C}[[s^{-Q_+}]][[x^{-Q_+}]]$ に属する形式冪級数とみなし,

$$(1.14) \quad \varphi(x; s|q, t) = p(x; s|q, t) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(qs_j/s_i; q)_\infty}{(qs_j/ts_i; q)_\infty}$$

と規格化する. このとき

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \varphi(s; x|q, t) &= \varphi(x; s|q, t), \\ \varphi(x; s|q, q/t) &= \varphi(x; s|q, t) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(qx_j/tx_i; q)_\infty}{(tx_j/x_i; q)_\infty} \frac{(qs_j/ts_i; q)_\infty}{(ts_j/s_i; q)_\infty}. \end{aligned}$$

(c) 双スペクトル自己双対性: 特に $\varphi(x; s|q, t)$ は, 双スペクトル問題に関して 自己双対的 である: $r = 1, \dots, n$ に対して

$$(1.16) \quad \begin{aligned} D_x^{(r)} x^\lambda \varphi(x; s|q, t) &= e_r(s) x^\lambda \varphi(x; s|q, t) & (s = t^\rho q^\lambda) \\ D_s^{(r)} s^\mu \varphi(x; s|q, t) &= e_r(x) s^\mu \varphi(x; s|q, t) & (x = t^\rho q^\mu) \end{aligned}$$

(d) 正則性: $\varphi(x; s|q, t)$ は次のような表示をもつ.

$$(1.17) \quad \varphi(x; s|q, t) = \frac{F(x; s|q, t)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (qx_j/tx_i; q)_\infty (qs_j/ts_i; q)_\infty}$$

ここで $F(x; s|q, t)$ は, 変数 $(x_2/x_1, \dots, x_n/x_{n-1}; s_2/s_1, \dots, s_n/s_{n-1})$ に関する $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}$ 上の正則関数 (整関数) であって, x 変数と s 変数の入替え, また t と q/t の入替えに関して対称性をもつ.

$$(1.18) \quad F(s; x|q, t) = F(x; s|q, t), \quad F(x; s|q, q/t) = F(x; s|q, t)$$

§ 2. 楕円 Ruijsenaars 作用素の形式的同時固有函数

§ 2.1. 楕円 Ruijsenaars 作用素についての註釈

差積 $\Delta(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ の p 変形 $\Delta(x; p)$ を次のように定義する.

$$(2.1) \quad \Delta(x; p) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} x_i \theta(x_j/x_i; p), \quad \Delta(x; p)|_{p=0} = \Delta(x).$$

p を形式的パラメータ (不定元) と見なし, アフィンルート系の零ルート δ と底 p を $p = e(-\delta)$ で関連付けると, アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$ の Weyl 分母は $x^{\Lambda_0} \Delta(x; p)(p; p)_\infty^n$ と表される. ここで, $\Lambda_0 \in P^{\text{aff}}$ は, 0 番の基本アフィンウェイトである.

以下, 0 番の単純アフィンルート $\alpha_0 = \delta - \varepsilon_1 + \varepsilon_n$ を表し, 形式冪級数環

$$(2.2) \quad \mathbb{C}[[e(-\alpha_0), e(-\alpha_1), \dots, e(-\alpha_{n-1})]] = \mathbb{C}[[px_1/x_n, x_2/x_1, \dots, x_n/x_{n-1}]],$$

を, $\mathbb{C}[[x^{-Q_+^{\text{aff}}}] = \mathbb{C}[[e(-Q_+^{\text{aff}})]]$ で表せば, 差積の p 変形 $\Delta(x; p)$ は $x^p \mathbb{C}[[x^{-Q_+^{\text{aff}}}]$ に属す.

差積の p 変形の記号 $\Delta(x; p)$ を用いると楯岡 Ruijsenaars q 差分作用素

$$(2.3) \quad \mathcal{D}_x^{(r)}(p) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}; |I|=r} t^{(r)} \prod_{i \in I, j \notin I} \frac{\theta(tx_i/x_j; p)}{\theta(x_i/x_j; p)} \prod_{i \in I} T_{q, x_i} \quad (r = 1, \dots, n)$$

は, 三角の場合と同様に, 次のような表示することができる.

$$(2.4) \quad \mathcal{D}_x^{(r)}(p) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}; |I|=r} \frac{T_{i, x}^I \Delta(x; p)}{\Delta(x; p)} T_{q, x}^I \quad (r = 1, \dots, n)$$

§ 2.2. Macdonald 多項式の p 変形

以下ではまず, 対称 Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$ を係数とする p の形式冪級数の枠組みで, 同時固有函数の問題を考察する.

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_x^{(r)}(p) \mathcal{P}(x; p) &= \varepsilon^{(r)}(p) \mathcal{P}(x; p) \quad (r = 1, \dots, n), \\ \mathcal{P}(x; p) &= \sum_{k=0}^{\infty} p^k \mathcal{P}_k(x) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}[[p]], \quad \varepsilon^{(r)}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \varepsilon_k^{(r)} \in \mathbb{C}[[p]] \end{aligned}$$

定理 2.1. パラメータ $t \in \mathbb{C}^*$ は一般とする. このとき, 任意の支配的整ウェイト $\lambda \in P_+$ に対して, 同時固有函数方程式の初期問題

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_x^{(r)}(p) \mathcal{P}_\lambda(x; p) &= \varepsilon_\lambda^{(r)}(p) \mathcal{P}_\lambda(x; p) \quad (r = 1, \dots, n), \\ \mathcal{P}_\lambda(x; 0) &= P_\lambda(x), \quad \varepsilon_\lambda^{(r)}(0) = e_r(t^\rho q^\lambda) \quad (r = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

は $\mathcal{P}_\lambda(x; p) \in \mathcal{R}[[p]]$, $\varepsilon_\lambda^{(r)}(p) \in \mathbb{C}[[p]]$ ($r = 1, \dots, n$) なる形式解をもつ. このとき, 形式的固有値 $\varepsilon_\lambda^{(r)}(p)$ は一意に定まり, 形式的同時固有函数 $\mathcal{P}_\lambda(x; p)$ は, 定数係数の形式冪級数 $\gamma(p) \in \mathbb{C}[[p]]$, $\gamma(0) = 1$ を乗ずる自由度を除いて一意に定まる.

より詳しく述べると, 上記の形式的同時固有函数 $\mathcal{P}_\lambda(x; p)$ は次の形の p 展開をもつことが分かる.

$$(2.7) \quad \mathcal{P}_\lambda(x; p) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \mathcal{P}_{\lambda, k}(x); \quad \mathcal{P}_{\lambda, k}(x) = \sum_{\mu \in P_+; \mu \leq \lambda + k\phi} \mathcal{P}_{\lambda, k, \mu} m_\mu(x) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}.$$

ここで, $\phi = \varepsilon_1 - \varepsilon_n$ は $\mathfrak{gl}_n$ の最高ルートを表す. 三角の場合とほぼ同様に, 上記の定理が成立する根拠は, q 差分作用素 $\mathcal{D}_x^{(r)}(p)$ の p 展開の各係数が $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$ を保ち, $\mathcal{D}_x^{(r)}(p)$ が アフィン・ルート系の意味で, 支配的順序に関する三角性を有することと, 固有値の初項 $\varepsilon_\lambda^{(r)}(0) = e_r(t^\rho q^\lambda)$ が P_+ を分離すること — である.

§ 2.3. Macdonald 関数の p 変形 : Ruijsenaars 関数

次に, 一般の複素パラメータ $\lambda \in P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ の場合の領域 $|x_1| \gg |x_2| \gg \cdots \gg |x_n|$ での漸近自由な同時固有関数の p 変形を考察する. この場合は, 次の $\mathbb{C}$ 代数 $\mathcal{R}$ を係数環として p の冪級数を考える.

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \mathcal{R} &= \sum_{\mu \in P} x^\mu \mathbb{K}[[x^{-Q_+}]] = \sum_{\mu \in P} x^\mu \mathbb{K}[[x_2/x_1, \dots, x_n/x_{n-1}]], \\ \mathbb{K} &= \mathbb{C}(s^{-Q_+}) = \mathbb{C}(s_2/s_1, \dots, s_n/s_{n-1}) \end{aligned}$$

この枠組みで, 形式冪級数

$$(2.9) \quad \begin{aligned} f(x; s; p) &= \sum_{k=0}^{\infty} p^k f_k(x; s) \in \mathcal{R}[[p]], \\ \varepsilon^{(r)}(s; p) &= \sum_{k=0}^{\infty} p^k \varepsilon_k^{(r)}(s) \in \mathbb{K}[[p]] \quad (r = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

であって, 一般の複素パラメータ $\lambda \in P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ に対して, $s = t^\rho q^\lambda$ の下で

$$(2.10) \quad \mathcal{D}_x^{(r)}(p) x^\lambda f(x; s; p) = \varepsilon^{(r)}(s; p) x^\lambda f(x; s; p) \quad (r = 1, \dots, n),$$

を満たすものを構成できる.

定理 2.2. 同時固有関数方程式の初期値問題

$$(2.11) \quad f(x; s; 0) = p(x; s), \quad \varepsilon^{(r)}(s; 0) = e_r(s) \quad (r = 1, \dots, n)$$

は, $f(x; s; p) \in \mathcal{R}[[p]]$, $\varepsilon^{(r)}(s; p) \in \mathbb{K}[[p]]$ ($r = 1, \dots, n$) なる形式解をもつ. 形式的固有値 $\varepsilon^{(r)}(s; p)$ は一意に定まり, 形式的同時固有関数 $x^\lambda f(x; s; p) \in x^\lambda \mathcal{R}[[p]]$ は, 定数係数の形式冪級数 $\gamma(s; p) \in \mathbb{K}[[p]]$, $\gamma(s; 0) = 1$, を乗ずる自由度を除いて一意に定まる.

更に, 形式冪級数 $f(x; s; p)$ は次の形の p 展開をもつ:

$$(2.12) \quad f(x; s; p) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k f_k(x; s), \quad f_k(x; s) = \sum_{\mu \in P; \mu \leq k\phi} f_{k,\mu}(s) x^\mu \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

このような $x^\lambda f(x; s; p)$ を領域 $|x_1| \gg |x_2| \gg \cdots \gg |x_n| \gg |px_1|$ の **Ruijsenaars 函数** と呼ぶ. 支配的整ウエイト $\lambda \in P_+$ の場合には, $s = t^\rho q^\lambda$ の下で $x^\lambda f(x; s; p)$ は, 前項で述べた $\mathcal{P}_\lambda(x; p)$ に一致し, $x = (x_1, \dots, x_n)$ に関して対称な冪級数となる.

註釈. (1) ここまで, n 変数, A 型の楕円 Ruijsenaars 差分作用素の可換族 $\mathcal{D}_x^{(r)}(p)$ ($r = 1, \dots, n$) に対して, 形式的同時固有函数として, $\lambda \in P_+$ の場合の $\mathcal{P}_\lambda(x; p)$ (Macdonald 多項式の p 変形) と, 一般の複素の $\lambda \in P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ の場合の $x^\lambda f(x; s; p)$ (漸近的自由な同時固有函数の p 変形) の存在を議論してきた (本質的に一意的). $n = 2$ の場合には, 適当な規格化の下で, 形式的固有函数 $\mathcal{P}_\lambda(x; p)$, $x^\lambda f(x; s; p)$ と形式的固有値の収束 (十分小さい領域での) を示すことができる. 収束の問題については, 一般の n 変数の場合も含めて, 次の機会に報告したい.

(2) ここで構成した形式的同時固有函数 $x^\lambda f(x; s; p)$ もまた, 三角の場合の $x^\lambda p(x; s)$ と同様, t と q/t の対称性, x と s に関する対称性, 正則性等について, 何らかの形で著しい性質を継承しているものと期待している.

§ 3. 非定常型 Ruijsenaars 函数との関係

ここまで議論してきた形式的同時固有函数 $x^\lambda f(x; s; p) = x^\lambda f(x, p|s|q, t)$ は, 定常型 **Ruijsenaars 函数** と呼ぶべきものである.

これに対して, 本稿の共著者の白石は, 最近の論文 [8] に於いて, Nekrasov 型のインスタントン分配函数の明示公式で定義される非定常型 **Ruijsenaars 函数** を定義し, この「函数」(形式冪級数) に関する幾つかの結果と共に, 種々の予想を定式化した. この分配函数は, n 個の分割の組 $\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}) \in \mathcal{P}^n$ 全体にわたる形式的な無限和

$$(3.1) \quad f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x, p|s, \kappa|q, t) = \sum_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathcal{P}} \prod_{i, j=1}^n \frac{N_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}^{(j-i|n)}(ts_j/s_i; q, \kappa)}{N_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}^{(j-i|n)}(s_j/s_i; q, \kappa)} \prod_{j=1}^n \prod_{i \geq 1} (px_{j+i}/tx_{j+i-1})^{\lambda_i^{(j)}}$$

である. この表示に現れる $N_{\lambda, \mu}^{(k|n)}(u; q, \kappa)$ ($k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) は **K** 理論的 **Nekrasov 因子** と呼ばれるもので, 分割の組 (λ, μ) に対して

$$(3.2) \quad N_{\lambda, \mu}^{(k|n)}(u; q, \kappa) = \prod_{\substack{j \geq i \geq 1 \\ j-i \equiv k \pmod{n}}} (uq^{-\mu_i + \lambda_{j+1}} \kappa^{-i+j}; q)_{\lambda_j - \lambda_{j+1}} \cdot \prod_{\substack{j \geq i \geq 1 \\ j-i \equiv -k-1 \pmod{n}}} (uq^{\lambda_i - \mu_j} \kappa^{i-j-1}; q)_{\mu_j - \mu_{j+1}}$$

で定義される. この形式冪級数 $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x, p|s, \kappa|q, t)$ は, 本稿で議論した Macdonald 関数 $x^\lambda p(x; s)$ の組合せ論的表示 (Macdonald 多項式のタブロー表示) の拡張と見做すこともできる.

この $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x, p|s, \kappa|q, t)$ には, 定常型の $f(x, p|s|q, t)$ に比較すると, 新しい付加的なパラメータ κ が含まれている. この κ が, 楕円曲線を指定する底 $p = e(\tau)$ で τ をシフトするときの差分間隔の乗法的記法に相当する. 上記の非定常型 Ruijsenaars 関数は, パラメータ κ について $\kappa = 1$ で真性特異点を持つが, $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x, p|s, \kappa|q, t)$ の x 変数に関する定数項を $\alpha(p|s, \kappa|q, t)$ で表し, 比 $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x, p|s, \kappa|q, t)/\alpha(p|s, \kappa|q, t)$ を取ると, $\kappa = 1$ での特異点が正則化され, その $\kappa = 1$ での値が, 本稿で議論した 定常型 Ruijsenaars 関数を再現する — というのが [8] の基本予想である. 明示的書くと,

$$(3.3) \quad f(x; s; p; q, t) = \frac{f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(p^{\rho/n}x, p^{1/n}|s, \kappa|q, q/t)}{\alpha(p^{1/n}|s, \kappa|q, q/t)} \Big|_{\kappa=1}.$$

因子 $p^{\rho/n}, p^{1/n}$ は, アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$ を実現する方法 (principal か homogeneous か) の違いから生じるものである.

定常型の形式的固有関数の p 展開を実際に計算し, 上記の明示公式から計算される係数を比較すると, 一定の時間内に計算可能な範囲では, 確かにこの予想が成立していることが確認できる.

定常型及び非定常型の Ruijsenaars 関数に関しては,

- (1) 基本予想の証明
- (2) $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x, p|s, \kappa|q, t)$ が満たすべき, 非定常型 Ruijsenaars 方程式とはどのようなものか.
- (3) 非定常型の Ruijsenaars 関数は, 双スペクトル問題に関して自己双対的か.
- (4) 形式冪級数 $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x, p|s, \kappa|q, t)$ の収束と, 正則性については何が言えるか.
- (5) 定常型 Ruijsenaars 関数についても, 非定常型の場合と同様の明示公式を構成できるか.

等々の, 未解決の, 興味深い課題が山積している — というのが現状である. この問題に関わる研究の進展についても, 今後, 漸進的に報告出来ればと考えている.¹

文献

- [1] Cherendnik, I., Whittaker limits of difference spherical functions. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2009**, 3793–3842.

¹報告集の原稿作成の時点 (2020 年 8 月) の状況については, [2], [3] を参照して下さい.

- [2] Langmann, E., Noumi, M. and Shiraishi, J., Basic properties of non-stationary Ruijsenaars functions. arXiv:2006.07171, 29 pages.
- [3] Langmann, E., Noumi, M. and Shiraishi, J., Perturbative eigenfunctions for the elliptic Ruijsenaars difference operators. (in preparation)
- [4] Macdonald, I.G., *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second Edition. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1995, x+475pp.
- [5] van Meer, M. and Stokman, J., Double affine Hecke algebras and bispectral quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2010**, 969–1040.
- [6] Noumi, M. and Shiraishi, J., A direct approach to the bispectral problem for the Ruijsenaars–Macdonald q -difference operators. arXiv:1206.5364, 44 pages.
- [7] Ruijsenaars, S.N.M., Complete integrability of relativistic Calogero-Moser system and elliptic function identities. *Comm. Math. Phys.*, **110** (1987), 181–213.
- [8] Shiraishi, J., Affine screened vertex operators, affine Laumon spaces and conjectures concerning non-stationary Ruijsenaars functions. *J. Integrable Syst.*, **4** (2019), xyz010, 30pp. (arXiv:1903.07495, 26 pages.)