

衝撃力を受ける構造物の塑性変形

——干渉問題および剛塑性解析の有効性について——

野 中 泰 二 郎

LARGE PLASTIC DEFORMATION OF STRUCTURES DUE TO IMPACT

——On an Interaction Problem and the Validity of Rigid-Plastic Analysis——

By *Taijiro* NONAKA

Abstract

In relation to the validity of rigid-plastic analysis for the dynamic behavior of structures under impact loading, a study is made on the maximum elastic strain energy which can be stored in a structure without violating von Mises yield criterion. Curves are drawn for the permanent deflection of fully clamped beams due to an impulsive load, based on the results of a rigid-plastic analysis which takes account of the plastic interaction between bending, shearing and extension.

Application of the interaction analysis is discussed. It is turned out that the analysis and the results for the clamped beam is also valid for a supported beam, provided the fully plastic moment of the corresponding clamped beam is halved.

は じ め に

動的荷重を受ける構造物の弾塑性応答は甚だ複雑で通常、少なくとも、数値積分によらない厳密な解析は不可能に近い。しかし、構造物の塑性的挙動が支配的であるような大変形状を調べるとき、その弾性的性質を無視して剛塑性の仮定を設ければ、解析は頗る簡略化される。実際、梁、板、円環、骨組などの構造物が衝撃的な荷重を受けたときの動的挙動に関して、材料の完全剛塑性の性質を仮定して幾多の問題が解かれている。

弾性変形を無視し得るための条件は、塑性変形によって費やされるエネルギーが、構造物の蓄え得る最大弾性歪エネルギーに比べて充分大きいことであると考えられている。その基準となる最大弾性歪エネルギーは、線材あるいは板の要素が曲げのみを受けるときには、簡単に、全塑性モーメントと曲げ剛性で表わされる^{1)*-3)}。より一般的な応力状態、すなわち、構造要素が曲げの他に、軸方向変形や剪断変形を伴う場合には、最大弾性歪エネルギーは線材理論あるいは平面応力状態の条件に基づいて、塑性条件を犯さない応力状態での歪エネルギーの最大値として求められるべきである。筆者は、このような条件で最大弾性歪エネルギーを求め、既に結果を記したところであるが⁴⁾、その根拠を明らかにするのが本稿の目的の一つである。

最大弾性歪エネルギー

まず、von Mises の降伏条件を用いて完全弾塑性体の最大歪エネルギーを求める。歪エネルギー U は、エネルギー密度 W の体積積分として

*片括弧を伴う数字は末尾の文献番号を示す。

$$U = \int_V W dV \dots\dots\dots (1)$$

のごとく表わされる。

(i) 線材の場合

捩れの生じない線材の理論では、零でない応力成分は1つの垂直応力と1つの剪断応力である。いま、それらをそれぞれ σ, τ と書き、弾性係数として Young 係数 E および Poisson 比 ν を用いれば、 W は

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma^2 + 2(1+\nu)\tau^2] \dots\dots\dots (2)$$

となる。von Mises の降伏条件を犯さない条件は、

$$\frac{\sigma^2}{3} + \tau^2 \leq k^2 \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 k は単純剪断の降伏応力度である。(3) の条件のもとに U を最大ならしめるわけであるが、 U を最大ならしめるにはエネルギー密度 W を最大ならしめれば良く、 W が最大となるのは、明らかに (3) の等式が成り立つときであるから、結局、この問題は

$$f \equiv \frac{\sigma^2}{3} + \tau^2 - k^2 = 0 \dots\dots\dots (4)$$

なる条件のもとで、 W を最大ならしめる問題に帰着される。従って、Lagrange の未定係数 λ を用いて、

$$2E \frac{\partial W}{\partial \sigma} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 2 \left(1 + \frac{\lambda}{3}\right) \sigma = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$2E \frac{\partial W}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau} = 2[2(1+\nu) + \lambda] \tau = 0 \dots\dots\dots (6)$$

および (4) 式を連立に解けば、

$$1^\circ \quad \sigma = 0, \quad \tau^2 = k^2$$

または

$$2^\circ \quad \sigma^2 = 3k^2, \quad \tau = 0$$

を得る。 1° は単純剪断の場合で、(2) 式から $W = (1+\nu)k^2/E$ 、 2° は単純引張りまたは圧縮の場合で、 $W = 3k^2/(2E)$ 。Poisson 比 ν が $0 \leq \nu \leq 1/2$ なる範囲にあることを考えると、線材理論では、エネルギー密度の最大値 W_{max} は軸方向応力のみで降伏する場合に生じ、

$$W_{max} = \frac{3k^2}{2E} \dots\dots\dots (7)$$

である。

(ii) 平面応力状態の場合

平面応力状態における零でない応力成分は2つの垂直応力と1つの剪断応力である。それらをそれぞれ σ_1, σ_2, τ とすれば、弾性歪エネルギー密度 W は

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 + 2(1+\nu)\tau^2] \dots\dots\dots (8)$$

と表わされる。応力成分に対する von Mises の条件は、

$$\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) + \tau^2 \leq k^2 \dots\dots\dots (9)$$

線材の場合と同様にして、 W を、従って U を、極大ならしめるための必要条件は、

$$6(\sigma_1 - \nu\sigma_2) + \lambda(2\sigma_1 - \sigma_2) = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$6(\sigma_2 - \nu\sigma_1) + \lambda(2\sigma_2 - \sigma_1) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$[2(1+\nu) + \lambda]\tau = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + 3\tau^2 = 3k^2 \dots\dots\dots (13)$$

を同時に満足することである。(10), (11) 式から

$$[6(1-\nu) + \lambda](\sigma_1 + \sigma_2) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$[2(1+\nu) + \lambda](\sigma_1 - \sigma_2) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

(12) ~ (15) 式を満足するものとしてはつぎの3種がある。

$$1^\circ \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \tau = \pm k; \quad W = \frac{1+\nu}{E} k^2$$

$$2^\circ \quad \sigma_1 = -\sigma_2, \quad \sigma_1^2 + \tau^2 = k^2; \quad W = \frac{1+\nu}{E} k^2$$

$$3^\circ \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \pm \sqrt{3} k, \quad \tau = 0; \quad W = \frac{3(1-\nu)}{E} k^2$$

Poisson 比のとり得る値を考えると、結局、3° の場合、すなわち、2軸一様引張り（または圧縮）のときに W は最大で

$$W_{max} = \frac{3(1-\nu)k^2}{E} \dots\dots\dots (16)$$

(7) 式と (16) 式を比較すると、線材および平面応力状態の場合で W_{max} の値には大差なく、 $\nu = 1/2$ すなわち非圧縮性材料の場合は、両者が全く一致する。従って、エネルギー条件に対しては、例えば (7) 式を用いることができ、単純引張りあるいは単純圧縮における降伏応力度を σ_0 とすれば、 $3k^2 = \sigma_0^2$ 故、(7) 式は

$$W_{max} = \frac{\sigma_0^2}{2E} \dots\dots\dots (17)$$

とも書ける。

線材として扱い得る場合には、その断面積を A 、線材要素の長さを ds 、また $N_0 \equiv A\sigma_0$ とすれば、最大弾性歪エネルギー U_{max} は

$$U_{max} = \int_V W_{max} dV = \int_s \frac{N_0^2}{2EA} ds \dots\dots\dots (18)$$

と書ける。

衝撃力を受ける固定梁

いま、Fig. 1 (a) のように、集中質量 m_0 の付加した、一様断面を有する、長さ $2l$ の固定梁に力積 I が衝撃的に作用して付加質量が初速度 I/m_0 をもって運動したす場合を考える。この梁には、曲げと剪断のほ

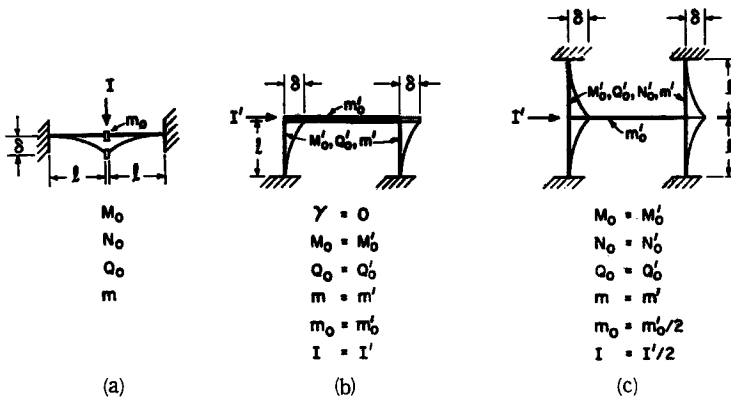


Fig. 1 Clamped Beam and Some Applications.

かに、有限撓みに伴って引張力が生じるから、いわゆる干渉問題であって、梁の蓄え得る最大弾性歪エネルギーは (18) 式から、 $N_0^2 l / (EA)$ で与えられる。塑性変形によって消費されるエネルギーは、初期運動のエネルギー $I^2 / (2m_0)$ と弾性振動に伴うエネルギーの差に等しいから、エネルギー条件によれば、弾性変形を無視して剛塑性の仮定を適用し得るためには、不等式

$$\frac{I^2}{2m_0} \gg \frac{N_0^2 l}{EA} \dots\dots\dots (19)$$

が満足されなければならない。

既に、条件 (19) を仮定し、放物円筒型の塑性条件

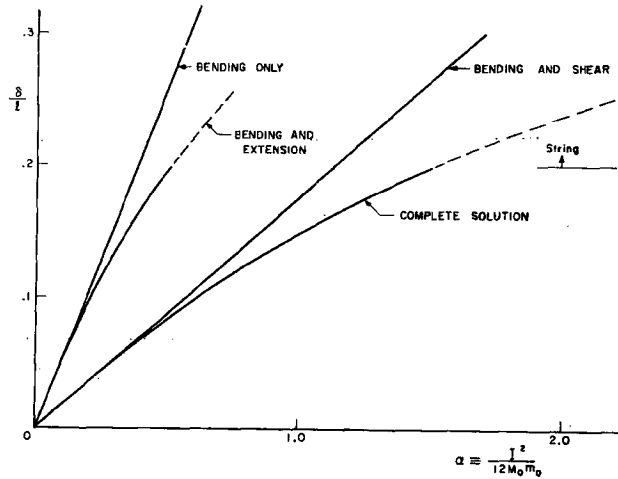


Fig. 2 (a) $\beta \equiv \frac{m_0}{m_l} = 0.1$, $\gamma \equiv \frac{N_0 l}{4M_0} = 5$

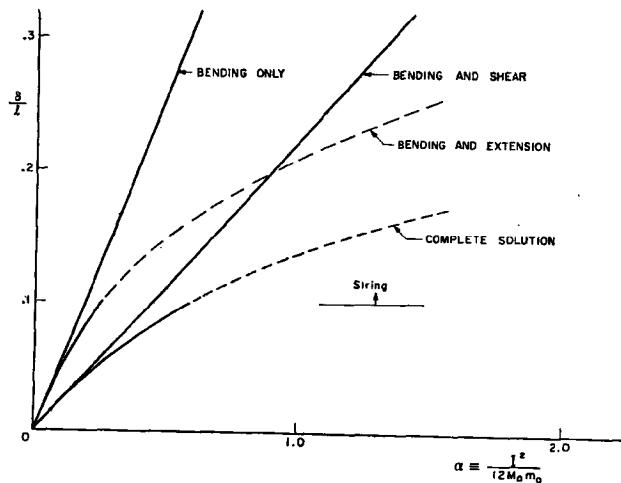


Fig. 2 (b) $\beta \equiv \frac{m_0}{m_l} = 0.1$, $\gamma \equiv \frac{N_0 l}{4M_0} = 10$

$$\left[\left| \frac{M}{M_0} \right| + \left(\frac{N}{N_0} \right)^2 - 1 \right] \left(\left| \frac{Q}{Q_0} \right| - 1 \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

を用いて上の干渉問題の剛塑性解析を示したが⁴⁾、その解析結果に基づき、助変数の値を

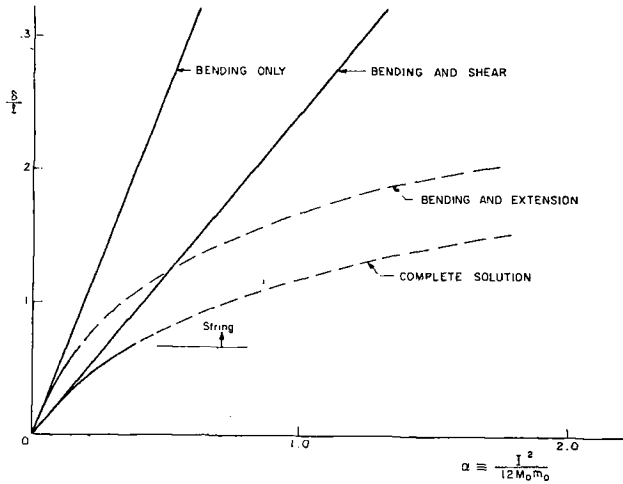


Fig. 2 (c) $\beta \equiv \frac{m_0}{ml} = 0.1$, $\gamma \equiv \frac{N_0 l}{4 M_0} = 15$

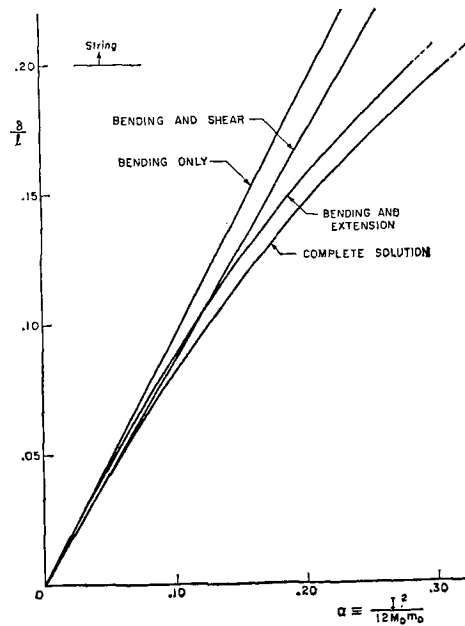
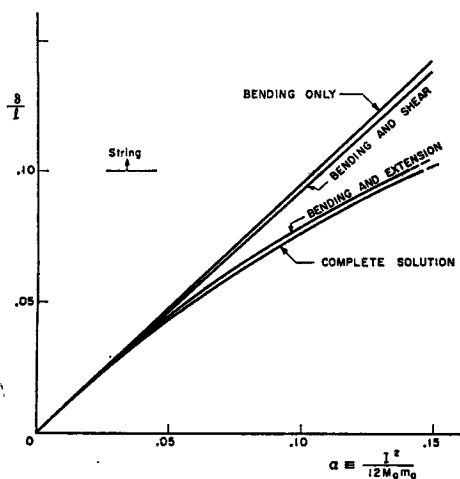
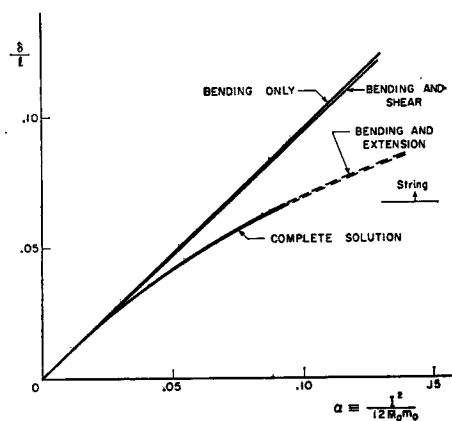
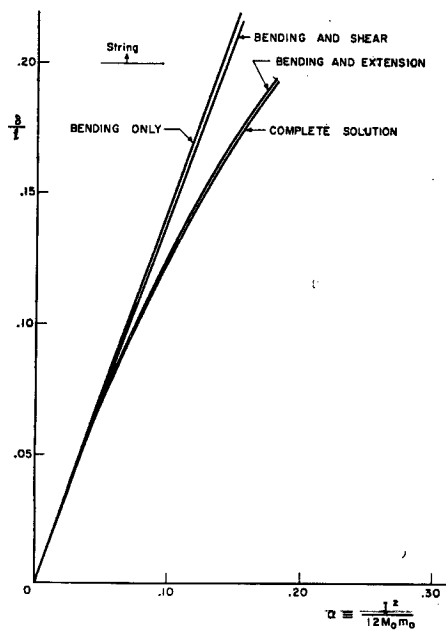
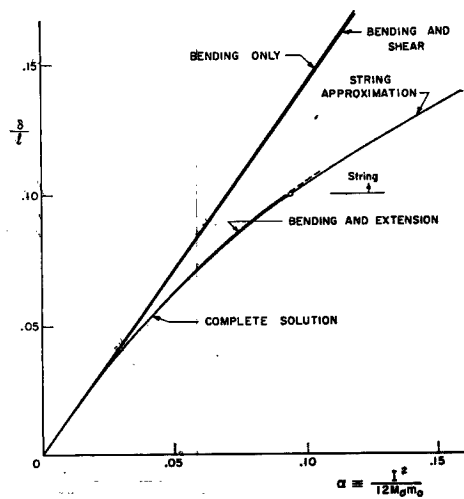


Fig. 2 (d) $\beta \equiv \frac{m_0}{ml} = 1$, $\gamma \equiv \frac{N_0 l}{4 M_0} = 5$

Fig. 2 (e) $\beta \equiv \frac{m_0}{ml} = 1$, $\gamma \equiv \frac{N_0 l}{4M_0} = 10$ Fig. 2 (f) $\beta \equiv \frac{m_0}{ml} = 1$, $\gamma \equiv \frac{N_0 l}{4M_0} = 15$ Fig. 2 (g) $\beta \equiv \frac{m_0}{ml} = 10$, $\gamma \equiv \frac{N_0 l}{4M_0} = 5$ Fig. 2 (h) $\beta \equiv \frac{m_0}{ml} = 10$, $\gamma \equiv \frac{N_0 l}{4M_0} = 10$

$$\beta \equiv \frac{m_0}{ml} : 0.1, 1.0, 10$$

$$\gamma \equiv \frac{N_0 l}{4M_0} : 5, 10, 15$$

のようにして、おのおのの組み合わせに対して最終撓みを力積の関数として求め、Fig. 2 (a)~(i) に図示した。ここに、 M, N, Q はそれぞれ曲げモーメント、引張力および剪断力、 M_0, N_0, Q_0 はそれぞれ純曲げ、純引張り、純剪断の状態における M, N, Q の降伏値、 m は梁単位長さ当りの質量、 δ は付加質量に隣る梁中央の最終撓みである。図中 Bending only とあるのは、曲げ変形のみを考えたもの、Bending and shear は曲げ変形と剪断変形を考慮したもの、Complete solution は曲げ、剪断および伸びによる変形を考慮したもの、String approximation とあるのは梁全体に引張力だけが存在するような大きな変形が生ずるとき、曲率変化がないものと近似して求めたことを示す。いずれも、長方形断面などの compact section を対象としたものであり、従って、Tresca

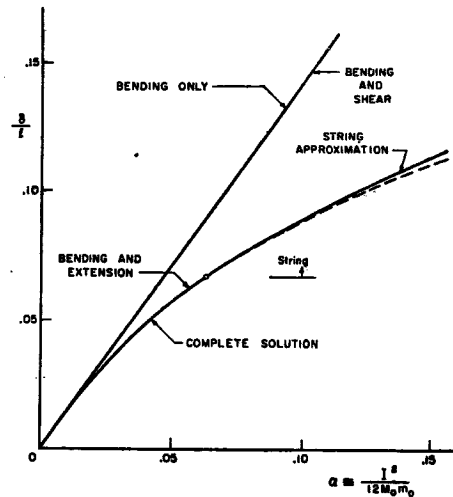


Fig. 2 (i) $\beta \equiv \frac{m_0}{ml} = 10$, $\gamma \equiv \frac{N_0 l}{4M_0} = 15$

の塑性条件によれば、 $\nu \equiv 6M_0/(Q_0 l) = 3/\gamma$ なる関係がある。図から、撓み δ が剪断および軸方向変形によって減少するようすが明瞭である。軸力の影響は、変形が、従って力積が、大きくなるほど大きく、剪断変形の影響は、 $\gamma \equiv N_0 l/(4M_0)$ が、従って材長と梁成との比が、大きくなるほど、また質量比 $\beta \equiv m_0/(ml)$ が大きくなるほど、小さくなる。曲げのみを考慮したものは曲げと軸方向変形を考慮した曲線の原点における接線であり、曲げと剪断変形を考慮したものは完全解の曲線の原点における接線である。

固定梁解析結果の応用

骨組架構に対する上記解の応用例を Fig. 1 (b), (c) に示す。(b) の門型骨組における梁は柱に比べて剛と見做せるものであって、この柱の横方向変位量が固定梁の撓みに対応する。ただし、梁剪断力によって生ずる左右柱の軸力の差および梁の鉛直方向慣性力の影響を無視している。(c) は多層多梁間骨組の一部が衝撃力を受けて変形する場合にも適用されることを意味する。図には、また、対応する諸量の関係が示され、従って、固定梁解析結果にそれらを代入することによって、直ちに骨組の変形量が求まる。

衝撃力を受ける支持梁

Fig. 3 (a) に示すように、梁両端がピンの場合（以下支持梁と呼ぶ）を考える。支点において、水平方向の変位が拘束される場合、やはり、曲げ、剪断、伸びの相互干渉問題であり、条件 (19) のもとに梁の完全剛塑性的性質を仮定し、塑性条件として (20) 式を用いる。梁の耐え得る最大剪断力は Q_0 であるから、剪断耐力が曲げ耐力に比べて小さく、もし、 $M_0 > Q_0 l$ 、すなわち、 $\nu \equiv 3M_0/(Q_0 l) > 3$ であれば、曲げ変形は、従って軸方向変形も、生じないで、剪断すべり運動だけが生じ、固定梁の $\nu \equiv 6M_0/(Q_0 l) > 3$ のときの運動と一致する。このときの、梁に加わる有効荷重分布 q 、剪断力分布 Q 、曲げモーメント分布 M および軸力分布 N は Fig. 3 (b) のごとくである。梁の全長にわたって $|Q| = Q_0$ であるが、中央以外に剪断すべりが生ずるとすれば、梁軸上のどこかで $|Q| > Q_0$ となって塑性条件を犯すことになり、剪断変形は付加質量の両側のみで生ずることがわかる。 ν の値が 3 より幾分小さいと、Fig. 3 (c) に示すように、付加質量の両側で塑

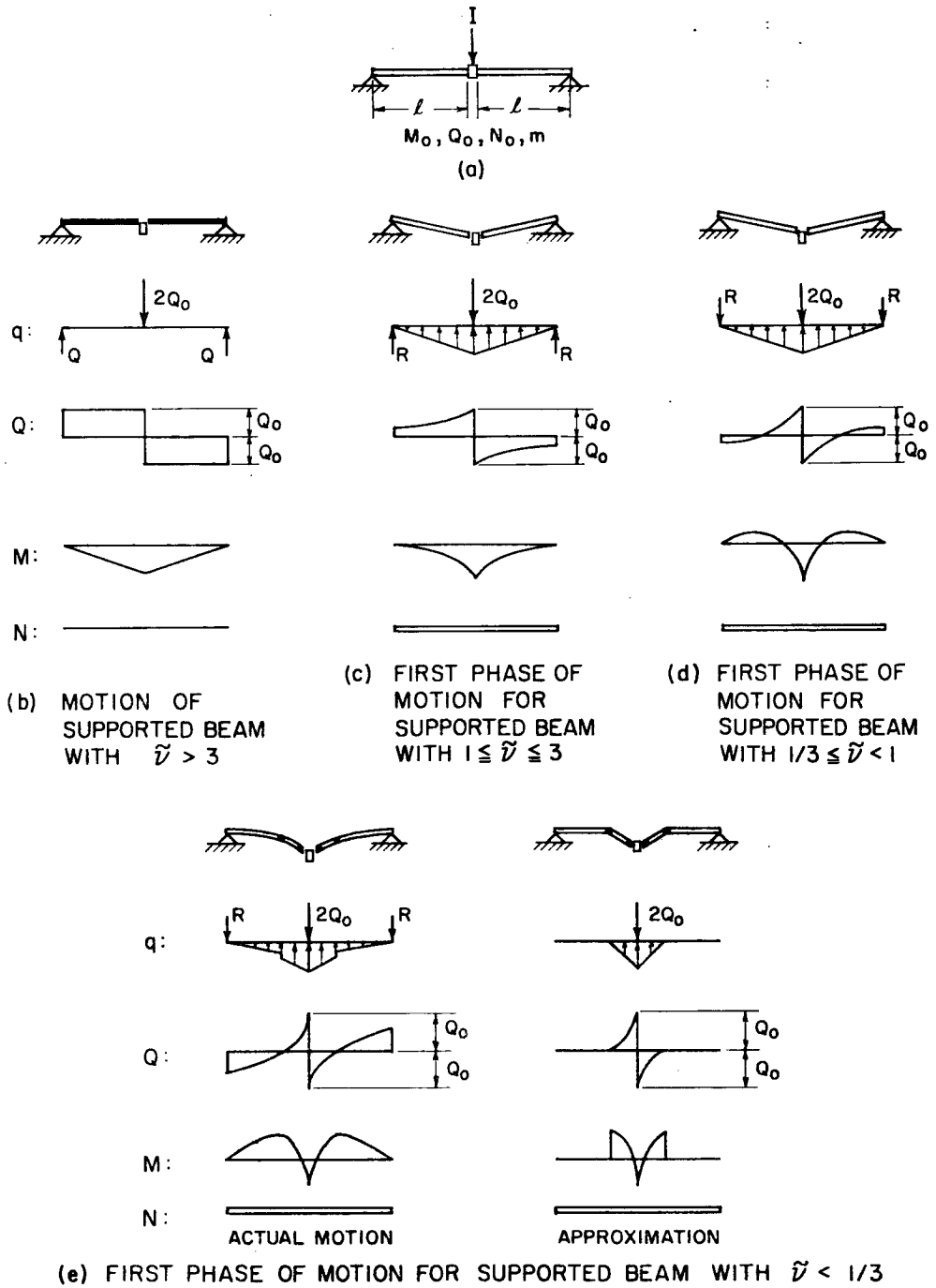


Fig. 3 Supported Beam.

性条件 (20) 式が満足され、そこで剪断、曲げおよび伸び変形が生じ、Fig. 1 (a) の固定梁における $1 \leq \nu \leq 3$ の場合と全く同様、時間の経過とともに、剪断すべりが先ず消失し、撓みが増大して次第に軸力が支配的になる。支持梁に対する塑性流法則は固定梁の場合の $4M_0$ を $2M_0$ に置き換えたもので表わされ⁵⁾、対応する運動モードの固定梁では塑性ヒンジが4個あるのに比較して、支持梁では塑性ヒンジが2個発生するから、支持梁に対する運動方程式は固定梁に対する運動方程式の $2M_0$ を M_0 に置換したものになる。 $\nu=1$ のとき、反力 R は零となり固定梁の $\nu=1$ の場合に対応する。 $\nu < 1$ のとき、反力 R の方向が変り、Fig. 3 (d) に示すような状態で運動が始まるが、運動方程式は (c) の場合と同じものに帰着する。 $\nu=1/3$ のとき、中央以外に、支点と付加質量の間で曲げモーメントの絶対値が全塑性モーメントに達し、 $\nu < 1/3$ のときには Fig. 3 (e) に示すように、中央以外にこの部分でも変形が生ずることになる。この型の運動の場合、梁外側剛体部分の回転角は内側剛体部分の回転角に比べて小さいから、これを無視すれば、 $\nu < 1$ の固定梁に生ずる運動と同一で、やがて剪断すべりが止まり、中央剛体部分の長さが増して、変形が中央部分のみで生ずる型の運動に移る。これら運動の各段階において運動方程式は、やはり固定梁の運動方程式における $2M_0$ を M_0 に置換したものになるから、結局、運動モードに関する支持梁と固定梁の対応関係：

支 持 梁	固 定 梁
$\nu < 1/3$	$\nu < 1$
$1/3 \leq \nu \leq 3$	$1 \leq \nu \leq 3$
$3 < \nu$	$3 < \nu$

に従い、先の固定梁解析結果⁴⁾ において、 $2M_0$ を M_0 に置き換えることにより、直ちに支持梁に対する解が得られる。こうして、付加質量に隣る梁中央部最終撓み δ は次式から求められる。

$\delta/l \leq 1/7$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{l} + \frac{\gamma^2}{3} \left(\frac{\delta}{l} \right)^3 &= \bar{\alpha} \beta \left[\frac{\nu - \beta}{2(\nu + \beta)} + \frac{2 + \beta}{2(1 + \beta)} + \ln \frac{1 + \beta}{\nu + \beta} \right] & \left(\nu < \frac{1}{3} \right) \\ \frac{\delta}{l} + \frac{\gamma^2}{3} \left(\frac{\delta}{l} \right)^3 &= \frac{3}{2\bar{\alpha}} \left(\frac{\bar{\alpha}\nu - \tau_s}{\nu} \right)^2 + \frac{3\bar{a}_1}{\nu} \operatorname{cn}^2(K - \bar{a}_2\tau_s) & \left(\frac{1}{3} \leq \nu \leq 3 \right) \\ \delta &= 0 & (3 < \nu) \end{aligned}$$

$\delta/l > 1/7$ のとき、

$$\left(\frac{\delta}{l} \right)^2 = \begin{cases} \frac{1}{\gamma^2} \left[(1 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3\gamma} + \frac{\bar{\alpha}\beta}{2} \left\{ \frac{\nu - \beta}{2(\nu + \beta)} + \frac{2 + \beta}{2(1 + \beta)} + \ln \frac{1 + \beta}{\nu + \beta} \right\} \right]^2 - 1 & \left(\nu < \frac{1}{3} \right) \\ \frac{1}{\gamma^2} \left[(1 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3\gamma} + \frac{3}{4\bar{\alpha}} \left(\frac{\bar{\alpha}\nu - \tau_s}{\nu} \right)^2 + \frac{3\bar{a}_1}{2\nu} \operatorname{cn}^2(K - \bar{a}_2\tau_s) \right]^2 - 1 & \left(\frac{1}{3} \leq \nu \leq 3 \right) \end{cases}$$

ここに、

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{I^2}{6M_0 m_0}, \quad \beta \equiv \frac{m_0}{ml}, \quad \gamma \equiv \frac{N_0 l}{2M_0}, \quad \nu \equiv \frac{3M_0}{Q_0 l}$$

$$\bar{a}_1 \equiv \left[\frac{3(3 - \nu)}{\nu \gamma^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{a}_2 \equiv \left(\frac{\beta \gamma}{2\bar{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3 - \nu}{3\nu} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$K \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}}}$$

また、 τ_s は

$$\tau_s + 2\bar{\alpha}\nu\bar{a}_1\bar{a}_2\operatorname{sn}(K - \bar{a}_2\tau_s) \cdot \operatorname{cn}(K - \bar{a}_2\tau_s) \cdot \operatorname{dn}(K - \bar{a}_2\tau_s) = \bar{\alpha}\nu$$

から求められるものである。

Fig. 2 (a)~(i) の横座標 α を $\bar{\alpha}$ に, また γ を $\bar{\gamma}$ に置換すれば, それらの図はそのまま, compact section の支持梁に対する結果を表わす。

骨組架構に対する支持梁解析結果の応用例は, **Fig. 1** の各固定端をピンと置き換えて得られること明白である。

謝 辞

本研究の一部は, 筆者が米国留学中, National Science Foundation の研究費によって行なったものである。ここに記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) E. H. Lee and P. S. Symonds, "Large Plastic Deformations of Beams Under Transverse Impact," Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 74, 1952, pp. 308—314.
- 2) J. A. Seiler, B. A. Cotter and P. S. Symonds, "Impulsive Loading of Elastic-Plastic Beams," Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 78, 1956, pp. 515—521.
- 3) A. L. Florence, "Circular Plate Under a Uniformly Distributed Impulse", International Journal of Solids and Structures, Vol. 2, 1966, pp. 37—47.
- 4) T. Nonaka, "Some Interaction Effects in a Problem of Plastic Beam Dynamics, Part 1: Interaction Analysis of a Rigid, Perfectly Plastic Beam", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 89, 1967, pp. 623—630.
- 5) P. S. Symonds and T. J. Mentel, "Impulsive Loading of Plastic Beams With Axial Constraints," Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 6, 1958, pp. 186—202.