

対称群の分岐則と p -core towers

千葉大学大学院 理学研究院 入江 佑樹

Yuki Irie

Graduate School of Science,
Chiba University

ρ を対称群 $\text{Sym}(n)$ の既約表現とし, より小さな対称群 $\text{Sym}(m) (m \leq n)$ へ ρ を制限していく. 素数 p に対して, 制限 $\rho|_{\text{Sym}(m)}$ の既約成分に次数が p と素なものが現れる最大の m の下界を与える.

1 はじめに

対称群の既約表現をより小さな対称群に制限していったとき, いつ次数が p と素な既約成分が現れるか? この問は, ゲームと表現の間の関係の研究において生まれたものである [1]. 元々, ゲームと表現の間に何か関係があるであろうことは, 佐藤幹夫によって 1960 年代頃に予想され, 川中宣明らによって様々な研究がされてきた ([2, 5] を参照). 実は, 本稿で紹介する上述の問に対する部分的な結果から, ゲームに関するある定理を得ることができる.

対称群の既約表現の次数が p と素であることの Macdonald による特徴付けからはじめよう. 以下, 素数 p を固定する. λ を n の分割とし, λ と λ に対応する Young 図形を同一視する. $\text{Sym}(n)$ を n 次の対称群とし, ρ^λ で λ に対応する $\text{Sym}(n)$ の (通常) 既約表現を表す. $\mathbb{N}$ を非負整数全体とし, $L \in \mathbb{N}$ に対して $w_L(\lambda)$ で λ の p^L -weight を表す. すなわち, $w_L(\lambda)$ は λ の hook で長さが p^L で割り切れるものの個数である. そして

$$\tau_L(\lambda) = w_L(\lambda) - pw_{L+1}(\lambda)$$

とおく ($\tau_L(\lambda)$ の p -core tower を使った組合せ的な意味付けを 3 節で与える).

定理 1.1 (Macdonald [3]). λ を n の分割とする. 既約表現 ρ^λ の次数が p と素である必要十分条件は, 全ての $L \in \mathbb{N}$ に対して $\tau_L(\lambda) = n_L$ が成立することである. ただし, n_L は n

を p 進法で表したときの L 桁目である.

例 1.2. λ を 5 の分割 (5) として $p=2$ としよう. このとき λ の hook 長の (多重) 集合は $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ となる. よって $w_L(\lambda), \tau_L(\lambda), |\lambda|_L (= 5_L)$ はそれぞれ次のようになる:

L	0	1	2	3	...
$w_L(\lambda)$	5	2	1	0	...
$\tau_L(\lambda)$	1	0	1	0	...
$ \lambda _L$	1	0	1	0	...

よって $\tau_L(\lambda) = |\lambda|_L (L \in \mathbb{N})$ のため, Macdonald の特徴付け (定理 1.1) から ρ^λ の次数は 2 と素, すなわち, 奇数である. 実際 ρ^λ の次数は 1 である. 一般に $n \in \mathbb{N}$ に対して $\tau_L((n)) = n_L$ が成立する.

例 1.3. λ を 9 の分割 (4, 3, 2) として $p=2$ としよう. このとき λ の hook 長の多重集合は $\{1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6\}$ となる.

6	5	3	1
4	3	1	
2	1		

図 1 (4, 3, 2) の Young 図形の hook 長.

$w_L(\lambda), \tau_L(\lambda), |\lambda|_L$ はそれぞれ次のようになる:

L	0	1	2	3	4	...
$w_L(\lambda)$	9	3	1	0	0	...
$\tau_L(\lambda)$	3	1	1	0	0	...
$ \lambda _L$	1	0	0	1	0	...

よって Macdonald の特徴付けから ρ^λ の次数は 2 と素でない. すなわち偶数であることがわかる. 実際に hook 長公式で次数を求めると $\deg \rho^\lambda = 9! / (2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) = 168$ となり偶数である.

冒頭で述べた問に対する部分的な結果を述べる. 例 1.3 のように ρ^λ の次数が p で割り切れたとしよう. このとき ρ^λ をより小さな対称群 $\text{Sym}(m) (m < n)$ に制限していけば, どこかで次数が p と素な既約成分が現れるだろう. 実は, $\tau_L(\lambda)$ を $\tau_L(\lambda)$ を p で割っ

た余りとし

$$\bar{\tau}(\lambda) = \sum_{L \in \mathbb{N}} \tau_L(\lambda) p^L$$

とすると次の結果が成立する:

定理 1.4 ([1]). λ を n の分割とする. 既約表現 ρ^λ の $\text{Sym}(\bar{\tau}(\lambda))$ への制限は, 既約成分に次数が p と素なものを持つ.

定理 1.4 の証明の概略を 4 節で与える. この定理の例を挙げよう.

例 1.5. 例 1.3 を再び考えよう.

$$\bar{\tau}(\lambda) = (3 \bmod 2)2^0 + (1 \bmod 2)2^1 + (1 \bmod 2)2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$$

のため, 定理 1.4 から ρ^λ を $\text{Sym}(7)$ への制限は奇数次数の既約成分を持つ. 実際, 例えば $\mu = (3, 2, 2)$ とすると $\deg \mu = 7! / (2^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = 21$ と奇数次数になっている.

5	4	1
3	2	
2	1	

図2 $(3, 2, 2)$ の Young 図形の hook 長.

なお ρ^λ の次数が p と素なとき, 定理 1.4 は ρ^λ 自身の次数が p と素なことを主張している. このことを確かめるには, ρ^λ の次数が p と素なとき, $\bar{\tau}(\lambda) = |\lambda|$ を示せば良い.

$$\sum_{L \in \mathbb{N}} \tau_L(\lambda) p^L = w_0(\lambda) - p w_1(\lambda) + (w_1(\lambda) - p w_2(\lambda))p + \cdots = w_0(\lambda) = |\lambda| \quad (1.1)$$

のため, $\tau_L(\lambda) = |\lambda|_L$ ($L \in \mathbb{N}$) と $\tau_L(\lambda) < p$ ($L \in \mathbb{N}$) は同値である. これは $\bar{\tau}(\lambda) = |\lambda|$ と同値のため, ρ^λ の次数が p と素なときは $\rho|_{\text{Sym}(\bar{\tau}(\lambda))} = \rho|_{\text{Sym}(|\lambda|)} = \rho$ となることが示せた. 例えば, 例 1.5 の μ に対して $w_L(\mu), \tau_L(\mu)$ を求めると次のようになる:

L	0	1	2	3	4	...
$w_L(\mu)$	7	3	1	0	0	...
$\tau_L(\mu)$	1	1	1	0	0	...

ここから $\bar{\tau}(\mu) = 1 + 2 + 4 = 7 = |\mu|$ が確かめられる.

補足：ゲームとの関係

最初に述べたように、定理 1.4 からゲームに関するある結果を証明できる。具体的には p -飽和マヤゲーム (あるいは p -飽和 Sato-Welter ゲーム) と呼ばれるゲームの Sprague-Grundy 関数が $\overline{\tau}$ になることが証明できる。以下、 p -飽和マヤゲーム、Sprague-Grundy 関数、そして 定理 1.4 の応用について簡単に見てみよう。

まずマヤゲームとは、Young 図形を使った二人対戦のゲームである。二人のプレイヤーは交互に Young 図形の hook を抜いていく (図 3 を参照)。交互に hook を抜いていき、最後の hook を抜いた方が勝ちというルールである。そして p -飽和マヤゲームは、(ある p に関する条件を満たす) 複数の hook を一度に抜いても良いとしたゲームである。

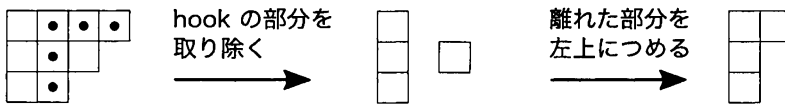


図 3 hook の抜き方.

次に Sprague-Grundy 関数とは、ゲームの必勝戦略を与える関数のことである。マヤゲームと p -飽和マヤゲームは、ともに不偏ゲーム^{*1} と呼ばれるゲームのクラスに含まれる。不偏ゲームは Sprague-Grundy 関数という局面全体を定義域とする非負整数値関数を使って解析できる。例えば Sprague-Grundy 関数を使って、ゲームの必勝戦略を与えることができる。Sprague-Grundy 関数は再帰的に定義されており、原理的にはどの局面についても値を求めることができるが、現実的には (計算量が多過ぎるため) 求めることができない場合がほとんどである。マヤゲームは Sprague-Grundy 関数を明示的に書き下すことができる極めて貴重な例となっている。

最後に定理 1.4 の p -飽和マヤゲームへの応用について大まかに紹介する。分割 λ を p -飽和マヤゲームの局面と思い、 sg でこのゲームの Sprague-Grundy 関数を表そう。示したいことは $\text{sg}(\lambda) = \overline{\tau}(\lambda)$ となることである。まず $\overline{\tau}(\lambda) = |\lambda|$ (すなわち、 p^λ の次数が p と素) の場合は、 $\text{sg}(\lambda) = \overline{\tau}(\lambda)$ であることが比較的簡単に証明できる。よって問題となるのは $\overline{\tau}(\lambda) \neq |\lambda|$ の場合である。定理 1.4 はここで活躍し、この定理を使うと $\overline{\tau}(\lambda) \neq |\lambda|$ の

^{*1} 不偏ゲームは、頂点集合を局面全体、局面から局面に移動できるときに辺で結ぶことで、有向グラフとして表せる。「不偏」という言葉は、二人のプレイヤーのできることが同じことを表す。マヤゲームはどちらのプレイヤーもできることは hook を抜くことのため、不偏ゲームである。しかし、例えば将棋は、自分の駒は動かしても相手の駒は動かさないため、不偏ゲームではない (パルチザンゲームと呼ばれる)。

場合を $\tau(\lambda) = |\lambda|$ の場合に帰着でき、全ての λ に対して $\text{sg}(\lambda) = |\lambda|$ が証明できる。

2 記号

$\Omega = \{0, 1, \dots, p-1\}$ とする. $n \in \mathbb{N}$ と $L \in \mathbb{N}$ に対して, n_L で n を p 進法で表したときの L 桁目を表す. すなわち

$$n = \sum_{L \in \mathbb{N}} n_L p^L \quad (n_L \in \Omega).$$

n と数列 $(n_0, n_1, \dots) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ を同一視する. 例えば $\tau(\lambda) (= \sum \tau_L(\lambda) p^L)$ の p 進法での L 桁目は $\tau_L(\lambda)$ のため, $\tau(\lambda)$ と $(\tau_0(\lambda), \tau_1(\lambda), \dots)$ が同一視される. $n_{\geq L}$ で n を p^L で割った商を表す. すなわち $n_{\geq L} = (n_L, n_{L+1}, \dots)$ である. また $n_{<L}$ で n を p^L で割った余りを表す. $n_{<L}$ と $(n_0, \dots, n_{L-1}) \in \Omega^L$ も同一視する.

3 p -core tower

本節では, p -core tower を使って $\tau_L(\lambda)$ の基本的性質をみていこう. なお, 本節の詳細は例えば [4] にある.

3.1 局面

p -core の話をする際に, 局面というものを考えるとわかりやすくなるため, まず局面を導入しよう. $\mathbb{N}$ の有限部分集合 $X = \{x^1, x^2, \dots, x^m\} (x^1 > x^2 > \dots > x^m)$ を局面と呼ぼう. 局面 X に対応する分割 $\lambda(X)$ を $(x^1 - (m-1), x^2 - (m-2), \dots, x^m)$ と定義する (X は分割 $\lambda(X)$ の β -set と呼ばれる). 例えば $X = \{6, 4, 2\}$ のとき $\lambda(X) = (6-2, 4-1, 2-0) = (4, 3, 2)$ である. このとき X は $\lambda(X)$ の一番左の列の hook 長になっている (図 1 参照). 局面と分割のこの対応は 1 対 1 ではない. 実際 $X^{[1]} = \{x+1 : x \in X\} \cup \{0\}$ とすると $\lambda(X^{[1]}) = \lambda(X)$ である. 一般に $n > 1$ に対して $X^{[n]} = X^{[n-1]}$ と定義しよう.

局面を考えると何が良いのだろうか. 局面は hook を抜く操作が見やすい点が良い. 図 4 にあるように, 分割 $\lambda(X)$ の長さ h の hook を抜くと, 局面 X ではある $x \in X$ が $x-h \notin X$ に置き換わる. 次節では, このことを使って p -core が一意的に決まることを示す.

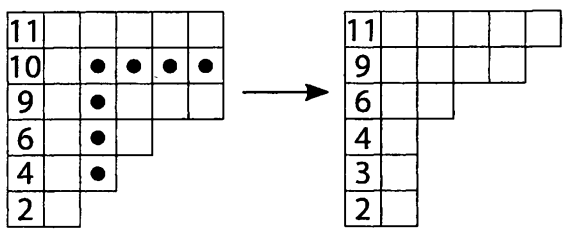


図4 長さ7のhookを抜くと,10が3に変わる.

3.2 p -core

分割 λ の p -core $\bar{\lambda}$ とは, λ から p -hook (長さが p で割り切れる hook) を次々と抜けるかぎり抜いて得られる分割を指す. λ の p -core は p -hook を持たないため, p で割った余りに相当するといえる.

p -core が一意的に定まることは, 局面を使って考えるとわかりやすい. ここでは $p = 3$ として $\lambda = (6, 4, 4, 3, 2)$ の場合で考えよう. 対応する局面として $X = \{10, 7, 6, 4, 2\}$ を取り, 図5の左のように X の位置に珠を並べる (このような図は 3-abacus と呼ばれる). 上で注意したように, 長さ h の hook を抜くことは $x \in X$ を $x - h \notin X$ に置き換えることに相当する. 特に 3-hook を抜くことは図5で珠を上に移動させることに相当する. よって, 3-core は全ての珠をできるだけ上に移動して得られる 図5の右だとわかる. すなわち $\bar{\lambda} = (3, 1)$ である. 以上のことから 3-core は一意的に定まることが見てとれる. 図5の右の局面を X の 3-core と呼び, $\bar{X}$ で表す. もちろん, 一般の場合も X の p -core を定義でき, これを $\bar{X}$ で表す.

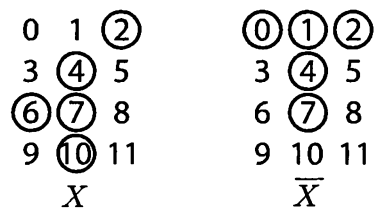


図5 3-core を求めるには, 全ての珠をできるだけ上に移動すれば良い.

上の観察をもとに次の記号を導入しよう. $r \in \Omega^1$ に対して,

$$X_r = \{x_{\geq 1} : x \in X, x_{<1} = r\}$$

としよう. X_r によって X は下 1 桁で分割される. 例えば, $p=3$ で上の X の場合で考えよう. ここではわかりやすさのため 3 進法を使うことにすると $X = \{20, 11, 21, 101, 2\}$ である. このとき $X_{(0)} = \{2\}, X_{(1)} = \{1, 2, 10\}, X_{(2)} = \{0\}$ である.

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \textcircled{2} \\ 10 & \textcircled{11} & 12 \\ \textcircled{20} & \textcircled{21} & 22 \\ 100 & \textcircled{10} & 102 \end{array}$$

図 6 $X_{(0)}, X_{(1)}, X_{(2)}$.

p -hook を抜くことは p -abacus 上で珠を上に移動することに対応していたため, X の p -hook 全体と $X_{(0)}, \dots, X_{(p-1)}$ の hook 全体は 1 対 1 の対応があることがわかる. 例えば X で 20 を 101 を 1 にすることは, $X_{(1)}$ で 10 を 0 にすることに対応する. よって

$$w_1(X) = \sum_{r \in \Omega^1} |\lambda(X_r)| = \sum_{r \in \Omega^1} w_0(X_r).$$

一般に $L \in \mathbb{N}$ に対して

$$w_{L+1}(X) = \sum_{r \in \Omega^1} w_L(X_r)$$

が成立する. 以上のことは

$$w(X) = (w_0(X), w_1(X), \dots) \quad (3.1)$$

とおくと

$$w_{\geq 1}(X) = \sum_{r \in \Omega^1} w(X_r) \quad (3.2)$$

と表せる. ただし $w_{\geq 1}(X) = (w_1(X), w_2(X), \dots)$ である. 例えば上で見た $p=3, X = \{10, 7, 6, 4, 2\}$ の場合, 次になっている:

$$\begin{aligned} w(X) &= (19, 5, 1, 0, \dots), \\ w(X_{(0)}) &= (2, 0, 0, \dots), \\ w(X_{(1)}) &= (3, 1, 0, \dots), \\ w(X_{(2)}) &= (0, 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

3.3 p -core tower

p -core tower を定義し, $\tau_L(\lambda)$ の組合せ的な意味を与えよう.

まず X_r を一般化する. $L \in \mathbb{N}$ と $R \in \Omega^L$ に対して

$$X_R = \{x_{\geq L} : x \in X, x_{<L} = R\}$$

としよう. X_R は X を p 進法で割った下 L 桁で分割している. このとき (3.2) は次のように一般化できる:

$$w_{\geq L}(X) = \sum_{R \in \Omega^L} w(X_R). \quad (3.3)$$

それでは p -core tower の話に入ろう. p -core tower とは, X_R たちを段々に並べて, それらの p -core をとったものである (図 7).

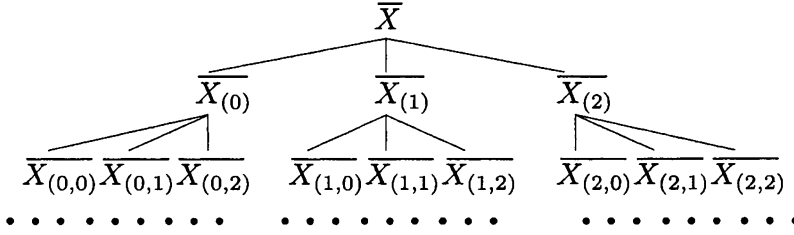


図 7 X の p -core tower.

$\tau_L(X)$ を p -core tower の L 段目にある局面に対応する分割の大きさの総和と定義する. すなわち,

$$\tau_L(X) = \sum_{R \in \Omega^L} |\lambda(\overline{X_R})|.$$

このとき, $w_L(X) = w_L(\lambda(X))$ とすると

$$\tau_L(X) = w_L(X) - pw_{L+1}(X) \quad (3.4)$$

である. 言い換えると $\tau_L(X)$ は, はじめに定義した $\tau_L(\lambda(X))$ に等しい. (3.4) を確かめよう. まず $L = 0$ の場合である

$$\tau_0(X) = |\lambda(\overline{X})| = w_0(X) - pw_1(X) = |\lambda(X)| - pw_1(X) \quad (3.5)$$

を示そう. p -core を得るには, p -abacus 上で珠を全て上に移動すれば良いのであった. よって, p -core を得るまでに取り除かれる Young 図形の箱の数は

$$p(|\lambda(X_{(0)})| + \cdots + |\lambda(X_{(p-1)})|) = p(w_0(X_{(0)}) + \cdots + w_0(X_{(p-1)})) = pw_1(X)$$

である (最後の等号で (3.3) を使った). よって

$$|\lambda(\overline{X})| = |\lambda(X)| - pw_1(X)$$

のため, (3.5) が成立する. 一般の場合を示そう. $|\lambda(\overline{X}_R)| = \tau_0(X_R)$ より

$$\tau_L(X) = \sum_{R \in \Omega^L} \tau_0(X_R).$$

ここで $L = 0$ の場合から $\tau_0(X_R) = w_0(X_R) - pw_1(X_R)$ が成り立つので, (3.3) を使うと

$$\tau_L(X) = \sum_{R \in \Omega^L} w_0(X_R) - pw_1(X_R) = w_L(X) - pw_{L+1}(X)$$

を得る. 以上で (3.4) が証明できた. なお (3.3) の類似として

$$\tau_{\geq L}(X) = \sum_{R \in \Omega^L} \tau(X_R) \quad (3.6)$$

も成立する. ただし, $\tau(X) = (\tau_0(X), \tau_1(X), \dots)$ と $\tau_{\geq L}(X) = (\tau_L(X), \tau_{L+1}(X), \dots)$ である.

次節に移る前に, 定理 1.4 の証明について少し考えよう. 1 節でみたように, 次の三つは同値である:

- (1) $\rho^{\lambda(X)}$ の次数は p と素.
- (2) $\tau(X) = \overline{\tau}(X)$ (すなわち, $L \in \mathbb{N}$ に対して $\tau_L(X) = \overline{\tau}_L(X)$).
- (3) $\overline{\tau}(X) = |\lambda(X)|$.

よって定理 1.4 は次のように言い換えられる: 任意の局面 X に対して, ある局面 Y で

$$\lambda(Y) \subseteq \lambda(X) \quad \text{かつ} \quad \tau(Y) = \overline{\tau}(Y) = \overline{\tau}(X) \quad (3.7)$$

となるものが存在する. この主張は $\tau(X) = \overline{\tau}(X)$ のときは明らかのため, $\tau(X) \neq \overline{\tau}(X)$ としよう. このとき (3.7) を満たす Y が存在することを示すには, 次を示せば良い:

(A) 局面 X が $\tau(X) \neq \overline{\tau}(X)$ を満たすとき, 局面 Y で次を満たすものが存在する:

$$\lambda(Y) \subsetneq \lambda(X) \quad \text{かつ} \quad \overline{\tau}(Y) \geq \overline{\tau}(X). \quad (3.8)$$

上の主張 A を仮定して, (3.7) を満たす局面が存在することを示そう. まず, 局面 Z で $\lambda(Z) \subseteq \lambda(X)$ かつ $\tau(Z) = \bar{\tau}(Z) \geq \bar{\tau}(X)$ となるものがあることを示す. 主張 A から (3.8) を満たす Y が存在する. もし, $\tau(Y) = \bar{\tau}(Y)$ ならば Z として Y をとれば良い. $\tau(Y) \neq \bar{\tau}(Y)$ としよう. 主張 A を Y に適用すれば $\lambda(Y') \subseteq \lambda(Y)$ かつ $\bar{\tau}(Y') \geq \bar{\tau}(Y)$ となる局面 Y' が存在することがわかる. この手続きは有限回でとまるため, どこかで $\tau(Z) = \bar{\tau}(Z) \geq \bar{\tau}(X)$ となる局面 Z が見つかる. もし $\bar{\tau}(Z) = \bar{\tau}(X)$ ならば Z が (3.7) を満たしている. $\bar{\tau}(Z) > \bar{\tau}(X)$ としよう. $\rho^{\lambda(Z)}$ の次数は p と素で $\bar{\tau}(Z) = |\lambda(Z)|$ のため, $\rho^{\lambda(Z)}$ を一つ下の対称群 $\text{Sym}(|\bar{\tau}(Z)| - 1)$ に制限した既約成分にも次数が p と素なものがある. よって $\rho^{\lambda(Z)}$ の $\text{Sym}(\bar{\tau}(X))$ への制限も既約成分に次数が p と素なものがある. これは定理 1.4 が成立することを意味するので, もちろん, (3.7) を満たす局面があることも従う. 次節では主張 A の証明の概略を与える.

4 定理の証明

前節の最後でみたように, 定理 1.4 を示すには主張 A を示せば良い. 本節では p^H -option というものを導入して, 主張 A の証明の概略を与える.

4.1 p^H -option

主張 A の証明の鍵となるのが p^H -option である. 主張 A は X の適切な p^H -option を考えていくことによって証明する. 局面 Y が X の p^H -option であることを非常に大まかにいうと, Y は X から長さ p^H の hook を除いて得られる局面で, かつ, 大きな L に対して p^L -hook の個数が多いようなものである.

p^H -option を定義するために, まず全順序を定義する. $(\alpha_L)_{L \in \mathbb{N}}$ と $(\beta_L)_{L \in \mathbb{N}}$ を非負整数からなる数列で, 十分大きな L に対しては $\alpha_L = \beta_L = 0$ となるものとする. この二つの数列は相異なるとして, $\alpha_L \neq \beta_L$ となる最大の L を N とする. このとき, もし $\alpha_N < \beta_N$ ならば

$$(\alpha_L)_{L \in \mathbb{N}} < (\beta_L)_{L \in \mathbb{N}} \quad (4.1)$$

と書くことにしよう. 例えば, $\tau(\{x\}) < \tau(\{y\})$ であることと $x < y$ であることは同値である (例 1.2 で見たように $\tau(\{x\}) = (x_0, x_1, \dots)$ のためである). また二つの局面 X と Y に対して, $w(X) < w(Y)$ であることと $\tau(X) < \tau(Y)$ であることが同値であることも証明できる.

次に order を定義しよう. 局面 X は $\lambda(X) = (0)$ のとき **終局面**, そうでないとき **非終局面** と呼ぶことにしよう. 局面 X の (*p*-adic) **order** を次で定義する:

$$\text{ord}(X) = \begin{cases} \min \{L \in \mathbb{N} : \tau_L(X) \neq 0\} & \text{if } X \text{ は非終局面,} \\ \infty & \text{if } X \text{ は終局面.} \end{cases} \quad (4.2)$$

例えば, $\{x\}$ の order は x の通常の *p*-adic order (*p* で何回割り切れるか) になる.

また, 正整数 h に対して $(xx-h)(X)$ で X に含まれる x を X に含まれない $x-h$ で置き換えて得られる局面を表そう (分割でいえば, 長さ h の hook を抜いたものである). 例えば, $X = \{2, 3, 4\}$ のとき $(41)(X) = \{1, 2, 3\}$ である.

定義 4.1. H と M を $H \leq M$ となる非負整数とする. X を order M の局面とし, $Y = (xx-p^H)(X)$ としよう. 局面 Y は次を満たすとき X の p^H -option と呼ぶ:

$$(O1) \quad \tau_L(Y) \equiv \tau_L(X) - 1 \pmod{p} \quad (H \leq L \leq M).$$

$$(O2) \quad \tau_{\geq M+1}(Y) \geq \tau_{\geq M+1}(X).$$

p^H -option は τ でみると, p^H を引いたようなものになっている. 図 8 に $H = 0$ の場合の様子を示す.

L	0	...	$M-1$	M	$M+1$	...
$\tau_L(X)$	0	...	0	$\tau_M(X)$	$\tau_{M+1}(X)$	...
$\tau_L(Y)$	$p-1$	...	$p-1$	$\tau_M(X) - 1$	$\tau_{M+1}(Y)$	...

図 8 X の p^0 -option Y の様子. p^0 -option は 1 を引いたようなものになっている. ただし, 厳密には $\tau_0(Y)$ から $\tau_{M-1}(Y)$ は $p-1$ と $\text{mod } p$ で等しく, $\tau_M(Y)$ は $\tau_M(X) - 1$ と $\text{mod } p$ で等しい.

p^H -option の例をみよう.

例 4.2. $p = 3, X = \{1, 4, 7\}; Y = (10)(X) = \{0, 4, 7\}, Z = (43)(X) = \{1, 3, 7\}$ としよう. このとき Y は X の 3^0 -option であるが, Z はそうでない. 実際

$$\begin{aligned} \tau(X) &= (4, 2, 0, \dots), \\ \tau(Y) &= (0, 0, 1, \dots), \\ \tau(Z) &= (9, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

より $\tau_{\geq 1}(Y) = (0, 1, \dots) > (2, 0, \dots) = \tau_{\geq 1}(X)$ のため, Y は (O2) を満たし, (O1) を満たすこともすぐに確認できる. 一方, $\tau_{\geq 1}(Z) = (0, 0, \dots) < (2, 0, \dots) = \tau_{\geq 1}(X)$ のため, Z は (O2) を満たさない. Y と Z ではどのような違いがあるのだろうか. 図 9 に示すように, Z は珠が真ん中の列に集中してしまったのに対して, Y は珠が各列に均等に分かれていることがわかる. このように, p^H -option は珠を均等に分けるような動かし方になっている. このことは表 1 のようにまとめることができる.

0	①	2	0	①	2	0	①	2
3	4	⑤	3	4	⑤	3	④	5
6	⑦	8	6	⑦	8	6	⑦	8
X			Y			Z		

図 9 X, Y, Z の 3-abacus.

表 1 X, Y, Z の珠の分布.

$ X_{(0)} $	$ X_{(1)} $	$ X_{(2)} $	$ Y_{(0)} $	$ Y_{(1)} $	$ Y_{(2)} $	$ Z_{(0)} $	$ Z_{(1)} $	$ Z_{(2)} $
0	2	1	1	1	1	0	3	0

上の例において, $\tau(Y) = (0, 0, 1, \dots) > (2, 2, 0, \dots) = \tau(X)$ より, Y は (3.8) を満たすことに注意しよう. 主張 A は X から適切な p^H -option を次々ととっていくことによって証明できる. 残念ながら p^H -option は常に存在するとは限らない (具体例は例 4.5 で与える). 以下の節では主張 A を示すため, p^H -option を持つ十分条件を二つ与える.

4.2 p^* -option

まず一つ目の十分条件を与えよう. X を非終局面とする. 実は $H = \text{ord}(X)$ のときは, 常に X は p^H -option を持つ. そこで X の $p^{\text{ord}(X)}$ -option を p^* -option と呼ぶことにしよう.

定理 4.3 ([1]). 全ての非終局面 X は p^* -option を持つ.

定理 4.3 は, 例 4.2 で見たように p^* -option が珠を均等に動かす方法であることから, そのような方法が存在することを示すことで証明できる. この p^* -option を使うだけで,

大抵の場合は (3.8) を満たす Y を見つけれられる (例えば, 例 4.2 の場合がそうであった). しかし, 次の例のようにうまくいかない場合がある.

例 4.4. $p = 3$ として $X = \{1, 5, 8\}, Y = (1\ 0)(X) = \{0, 5, 8\}, Z = (5\ 4)(Y) = \{0, 4, 8\}$ としよう. このとき

$$\begin{aligned}\tau(X) &= (5, 2, 0, \dots), \\ \tau(Y) &= (4, 2, 0, \dots), \\ \tau(Z) &= (0, 3, 0, \dots)\end{aligned}$$

となるので Y は X の 3^* -option で, Z は Y の 3^* -option である. しかし, $\bar{\tau}(Y), \bar{\tau}(Z) < \bar{\tau}(X)$ のため, どちらも (3.8) を満たさない. この先 3^* -option をとっても, $\bar{\tau}$ の値は小さくなる一方である. 実際, 例えば $W = (4\ 1)(Z) = \{0, 1, 8\}$ とすると

$$\tau(W) = (0, 2, 0, \dots)$$

となるので W は Z の 3^* -option であるが $\bar{\tau}(W) < \bar{\tau}(X)$ となってしまうている. よって, この方法では (3.8) を満たす局面を見つけることはできない.

4.3 p^0 -option

前節の例 4.4 のように p^* -option を考えるだけでは, (3.8) を満たす Y が見つからない場合がある. そこで必要になるのが p^0 -option である. 例 4.4 の場合, 実は Z は 3^0 -option $V = \{0, 4, 8\}$ を持ち,

$$\tau(V) = (2, 2, 0, \dots)$$

のため, V が (3.8) を満たす. p^* -option のように, 全ての局面が p^0 -option を持つのなら話は簡単であるが, p^0 -option を持たない場合がある. p^0 -option を持つ十分条件を与えるため, p^0 -option を持つものと持たないものを次の例で比較しよう.

例 4.5. $p = 3$ として, $X = \{3, 4, 5, 9, 10, 38\}$ と $\tilde{X} = \{1, 2, 3, 9, 13, 41\}$ を考えよう. なお, それぞれを 3 進法で表すと $X = \{10, 11, 12, 100, 101, 1102\}$ と $\tilde{X} = \{1, 2, 10, 100, 111, 1112\}$ となっている. このとき

$$\tau(X) = \tau(\tilde{X}) = (0, 0, 3, 1, 0, \dots)$$

であるが, $\tilde{X}$ は 3^0 -option を持ち, X は 3^0 -option を持たない. $\tilde{X}$ が 3^0 -option を持つこと

から確かめよう. $\tilde{Y} = (1\ 0)(\tilde{X})$ とすると

$$\tau(\tilde{Y}) = (2, 2, 2, 1, 0, \dots)$$

のため $\tilde{Y}$ は $\tilde{X}$ の 3^0 -option である. 次に X は 3^0 -option を持たないことを見てみよう. X の 3^0 -option となり得るのは, $(3\ 2)(X), (9\ 8)(X), (38\ 37)(X)$ のいずれかである. Y をこれらのいずれかとすると

$$\tau(Y) = (5, 1, 2, 1, 0, \dots) \text{ または } (2, 2, 5, 0, 0, \dots)$$

となる. よって $\tilde{X}$ は 3^0 -option を持たない.

X と $\tilde{X}$ の違いはどこにあるのだろうか. このことをみるために, $r \in \Omega^1$ と $R \in \Omega^0 \cup \Omega^1 \cup \Omega^2$ に対して $|X_{(r,R)}|$ と $|\tilde{X}_{(r,R)}|$ を計算してみよう (ここで, 例えば $X_{(0,(0,1))}$ は $X_{(0,0,1)}$ のことである). 結果を表 4.5 にまとめる. 表 4.5 において X の各行は同じ数字が並んでいるのに対して, $\tilde{X}$ では例えば $(0,0)$ の行で異なる数字が並んでいることに注目しよう. 一般に $\tilde{X}$ のように異なる数字が並ぶ行があるときは, p^0 -option があることが証明できる.

表 2 $|X_{(r,R)}|$ と $|\tilde{X}_{(r,R)}|$.

R	$ X_{(0,R)} $	$ X_{(1,R)} $	$ X_{(2,R)} $	R	$ \tilde{X}_{(0,R)} $	$ \tilde{X}_{(1,R)} $	$ \tilde{X}_{(2,R)} $
$()$	2	2	2	$()$	2	2	2
(0)	1	1	1	(0)	1	1	1
(1)	1	1	1	(1)	1	1	1
(2)	0	0	0	(2)	0	0	0
$(0,0)$	0	0	0	$(0,0)$	0	1	1
$(0,1)$	1	1	1	$(0,1)$	1	0	0
$(0,2)$	0	0	0	$(0,2)$	0	0	0
$(1,0)$	1	1	1	$(1,0)$	1	0	0
$(1,1)$	0	0	0	$(1,1)$	0	1	1
$(1,2)$	0	0	0	$(1,2)$	0	0	0
$(2,0)$	0	0	0	$(2,0)$	0	0	0
$(2,1)$	0	0	0	$(2,1)$	0	0	0
$(2,2)$	0	0	0	$(2,2)$	0	0	0

上記のことを記述するために記号を導入しよう. X と X' を局面とし, N を非負整数とする. 全ての $R \in \Omega^N$ に対して $|X_R| = |X'_R|$ のとき

$$X \equiv X' \pmod{p^N} \quad (4.3)$$

と書くことにしよう. このとき, 次は同値である:

- (1) $X \equiv X' \pmod{p^N}$.
- (2) $|X| = |X'|$ かつ全ての $U \in \Omega^0 \cup \Omega^1 \cup \dots \cup \Omega^{N-1}$ に対して X_U と X'_U の p -core が等しい.
- (3) 全単射 $\Phi: X \rightarrow X'$ で $x \equiv \Phi(x) \pmod{p^N} (x \in X)$ となるものが存在する.

例えば $\{x\} \equiv \{x'\} \pmod{p^N}$ であることと $x \equiv x' \pmod{p^N}$ であることは同値である. また, X, X' として例 4.5 のものをとると次が成立する:

$$\begin{aligned} X_{(0)} \equiv X_{(1)} \equiv X_{(2)} \pmod{3} \quad \text{かつ} \quad X_{(0)} \equiv X_{(1)} \equiv X_{(2)} \pmod{3^2}, \\ \tilde{X}_{(0)} \equiv \tilde{X}_{(1)} \equiv \tilde{X}_{(2)} \pmod{3} \quad \text{かつ} \quad \tilde{X}_{(0)} \not\equiv \tilde{X}_{(1)} \equiv \tilde{X}_{(2)} \pmod{3^2}. \end{aligned}$$

定理 4.6 ([1]). X を order M の非終局面で, $|X| \equiv 0 \pmod{p^M}$ となるものとする^{*2}. もし

(P0) ある $s, r \in \Omega^1$ に対して $X_s \not\equiv X_r \pmod{p^M}$

なれば X は p^0 -option を持つ.

4.4 証明の概略

最後に主張 A の証明の概略を述べる.

X を局面とし, $X^0 = X$ とおき, X^i を X^{i-1} の p^* -option としよう. 例 4.2 のように, これだけで (3.8) を満たす Y が見つかる場合もある. また, 例 4.4 のように見つからない場合は, この例の Z のような X^n において p^* -option ではなく, p^0 -option を考えれば良い. 証明が難しいのは, この最後の X^n が p^0 -option を持つようにとれることを示す点である. このことは次のように証明できる. X^n が条件 (P0) を満たす場合は明らかのため, X^n が条件 (P0) を満たさないとする. このとき, X^n よりも前のある $X^h (h < n)$ が X^{h+1} とは異

^{*2} $|X| \equiv 0 \pmod{p^M}$ という条件がついているが, $X^{[n]}$ を考えることで常に $|X^{[n]}| \equiv 0 \pmod{p^M}$ とできるため, いつでも定理 4.6 を使うことができる.

なる別の p^* -option $\tilde{X}^{h+1}$ を持つことを示す. そして, $\tilde{X}^{h+1}$ から p^* -option をとっていった $\tilde{X}^n$ については, X^n が (P0) を満たさないことから, (P0) を満たすことが示せる. このようにして主張 A が証明できる.

参考文献

- [1] Yuki Irie. p -Saturation of Welter's game and the irreducible representations of symmetric groups. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 2017. <https://doi.org/10.1007/s10801-017-0799-6>.
- [2] 川中宣明. フック構造をもつゲームとアルゴリズム. 数学, Vol. 63, No. 4, pp. 421–441, 2011.
- [3] Ian G. Macdonald. On the Degrees of the Irreducible Representations of Symmetric Groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, Vol. 3, No. 2, pp. 189–192, January 1971.
- [4] Jørn B. Olsson. *Combinatorics and Representations of Finite Groups*. Vorlesungen aus dem FB Mathematik der Univ. Essen, Heft 20, 1993.
- [5] 佐藤幹夫 (梅田亨 記). 佐藤幹夫講義録 (1984/85). 数理解析レクチャーノート刊行会, 1989.