

ファラデー共鳴の非線形動力学とカオス

東大. 理. 物理 梅木 誠

1. はじめに

1), 2)

容器に入った液体を鉛直加振した時に表面に定在波が励起される現象（ファラデー共鳴）において、近年、Ciliberto & Gollub^{3), 4)}は、円筒容器内の2つの定在波のモードが非線形相互作用によって、交互に、周期的あるいはカオス的に励起されることを調べた。加振振動数の比較的低い（5～20 Hz）鉛直加振の系では励起されるモードの数が少ないため、比較的簡単な常微分方程式系（力学系）でよく記述されることが考えられる。本論文では2つのサブハーモニックなモードの振幅の変調に対し、Miles⁵⁾による弱非線形理論とLagrange形式に基づいて、ハミルトン方程式に散逸の効果を取り入れた発展方程式を導き、カオス解が存在することを示す。⁷⁾

2. 理論解析

容器は柱状であり、液体は非粘性非圧縮で、流れは渦なしであると仮定し、自由表面と速度ポテンシャルを変数分離形

$$\begin{aligned}\eta(t, x) &= \sum_n \eta_n(t) \psi_n(x), \\ \phi(t, x, z) &= \sum_n \phi_n(t) \psi_n(x) H_n(z)\end{aligned}\quad (1)$$

で表す。ここで x, z は水平、鉛直座標とする。線形理論では各モードの振幅 $\eta_n(t)$ はMathieu方程式で記述され、特に、静止状態が不安定であるような加振振幅と加振振動数においては振幅が振動しながら指数関数的に無限に増大し、その振動の周期は加振の周期に等しい場合とその半分の場合がある。後者の方（サブハーモニック共鳴）が不安定であるパラメータ領域が広いと、実験ではよく調べられている。

運動学的な境界条件と等価なDirichletの変分原理をもちいると、水面波の運動は η_n を一般化座標とするLagrangeの運動方程式で表される。古典力学と同様に、散逸の効果は散逸関数 f で取り入れる。外力の振動を $a_0 \cos 2\omega t$ とし、固有振動数の近い2つのサブハーモニックなモードが励起される場合を考える。半径 R の円筒容器においては固有関数は

$$\psi_{mn}^{(c,s)}(r, \theta) = \frac{1}{N_{mn}} J_m(\kappa_{mn} r) \times (\cos m\theta, \sin m\theta) \quad (2)$$

で表され、モード $(m, n)_c, (m, n)_s$ と呼ばれる。ここで N_{mn} は規格化定数、 $J_m(x)$ は m 次のBessel関数、 $\kappa_{mn} = j_{mn}/R$ は水平方向の波数、 j_{mn} は $J_m(x)$ の n 番目の零点である。対応する固有振動数は、

$$\omega_{mn} = (\kappa_{mn} g \tanh \kappa_{mn} d (1 + \lambda^2 \kappa_{mn}^2))^{1/2} \quad (3)$$

で与えられる。ただし g は重力加速度、 d は液体の静止状態での深さ、 $\lambda = (\gamma / \rho g)^{1/2}$ は表面張力波の長さ、 γ は表面張力、 ρ は液体の密度である。円筒容器の場合、固有振動数の等しい縮退したモード $(m, n)_c$ と $(m, n)_s$ ($m \neq 0$)が存在する。

n 番目のモードの振幅は

$$\eta_n(t) = p_n(\tau) \cos \omega t + q_n(\tau) \sin \omega t + A_n(\tau) \cos 2\omega t + B_n(\tau) \sin 2\omega t + C_n(\tau) \quad (4)$$

と表される。ここで p_n, q_n は $O(\varepsilon)$ 、 A_n, B_n, C_n は $O(\varepsilon^2)$ 、 $\tau = \varepsilon^2 \omega t$ はゆっくりと変化する時間変数である。 p_n, q_n は、励起されるモード $n=1, 2$ 以外では0であり、 A_n, B_n, C_n は励起されるモードと相互作用するモードに対してのみ0でない。

式(4)をLagrange関数に代入し、時間平均を取り、 $O(\varepsilon^4)$ の項まで残し、 L と p_n, q_n に適当な規格化をすると平均化Lagrange関数が得られる。

$$L = \frac{1}{2} \sum_n (\dot{p}_n \dot{q}_n - p_n \dot{q}_n) + H(p_n, q_n), \quad (\cdot) = \frac{d}{d\tau}(\cdot), \quad (5)$$

ここで H は p_n, q_n を一般運動量、座標とするHamilton関数となる。 H は2自由度の場合、

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \{ \beta_n r_n^2 + A_0 (p_n^2 - q_n^2) \} + \frac{1}{4} (A r_1^4 + B r_2^4 + 2 C r_1^2 r_2^2 + 2 D M^2) \quad (6)$$

と表される。但し、 $r_n^2 = p_n^2 + q_n^2$ 、 $M = p_1 q_2 - p_2 q_1$ 、 $\beta_n = (\omega^2 - \omega_n^2) / (\omega^2 \varepsilon^2)$ 、 $\omega_1 < \omega_2$ 、 $A_0 = a_0 / (a \varepsilon^2)$ 、 $a = (\kappa_1 \tanh \kappa_1 d)^{-1}$ であり、展開パラメータ ε は $\varepsilon^2 = (\omega_2^2 - \omega_1^2) / \omega^2$ とする。また A 、 B 、 C 、 D はモードの組と容器形状、深さ、加振振動数で決まる定数である。よって2つのサブハーモニックなモードの発展方程式は

$$(\dot{p}_n, \dot{q}_n) = (-\partial/\partial q_n, \partial/\partial p_n) H - \alpha(p_n, q_n) \quad n=1, 2 \quad (7)$$

で表される。ここで線形減衰項は運動エネルギーに比例する散逸関数を考慮することから導かれる。

円筒容器の場合、完全縮退したモードを区別して考えると4自由度となるが、モード $i = (m, n)$ の角運動量に対応する量

$$M_i = p_{ic} q_{is} - q_{ic} p_{is}$$

が散逸を考慮した場合、時間とともに指数関数的に減衰することがわかる。このことを用いて完全縮退したモードはひとつにまとめられ、自由度を半分に減減することができる。Ciliberto & Gollub は、 $(4, 3)$ と $(7, 2)$ のモードの競合を見つけている。

3. 解の分岐とカオス解の出現

運動方程式は

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\alpha p_1 + (-\beta_1 + A_0 - A r_1^2 - C r_2^2) q_1 + D M p_2 \\ \dot{q}_1 &= -\alpha q_1 + (\beta_1 + A_0 + A r_1^2 + C r_2^2) p_1 + D M q_2 \\ \dot{p}_2 &= -\alpha p_2 + (-\beta_2 + A_0 - B r_2^2 - C r_1^2) q_2 - D M p_1 \\ \dot{q}_2 &= -\alpha q_2 + (\beta_2 + A_0 + B r_2^2 + C r_1^2) p_2 - D M q_1 \end{aligned} \quad (8)$$

となる。簡単のため $(A, B, C, D) = (-6, -4, -3, -6)$ の場合を考える。式(8)の固定点は

$$\begin{aligned} (p_1, q_1, p_2, q_2) &= (0, 0, 0, 0) \quad \text{静止状態 (Q)} \\ (p_1^*, q_1^*, 0, 0) &\quad \text{モード1の純粋状態 (1)} \\ (0, 0, p_2^*, q_2^*) &\quad \text{モード2の純粋状態 (2)} \\ (p_1^*, q_1^*, p_2^*, q_2^*) &\quad \text{モード1、2の混合状態} \end{aligned}$$

があり、(1)、(2)はそれぞれ2種類存在し(添字 m と p で区別する)、さらに混合状態は $p_1 : q_1 = p_2 : q_2$ である場合 (Ma) とそうでない場合 (Mb) がある。Ciliberto & Gollub の実験に対応する⁷⁾筆者らの解析結果に基づき、加振振動数と加振振幅に対する固定点の安定性のダイアグラムを図1に、これらの解の分岐を図2に示す。周期軌道が周期倍分岐を起こして、カオス的な解が現れることが数値的に確かめられた。また、周期解はMbからのHopf分岐に由来している。Hopf分岐はカオス解が現れるための必要条件であり、Hopf分岐は混合状態からしか起こり得ない。さらに、カオス解が出現するには周期解が周期倍分岐を起こす必要がある。また図2において2本の安定性境界線の交点の右側 ($\beta_1 > 0.5$) にしかMbが存在しないことがわかる。このことが、Ciliberto & Gollub の実験においてカオス的な周期競合が $\beta_1 > 0.5$ のパラメータ領域にのみ見つかる理由であると思われる。なお式(8)は変換 $(p_1, q_1, p_2, q_2) \rightarrow (-p_1, -q_1, p_2, q_2)$ 、 $(p_1, q_1, -p_2, -q_2)$ 、 $(-p_1, -q_1, -p_2, -q_2)$ に対して不変であるため、あるアトラクターに対して対称な異なる4つが存在するか、それらの2つまたはすべてが融合し同じものになるかのいずれかである。計算結果によると、対称な2つのアトラクターがひとつに融合することがある。(gluing bifurcationと呼ばれる⁶⁾) 図3は4つが融合したアトラクターを示す。なお、 A_0 が図1の点eを越えなくてもある程度大きくなると、カオス解のアトラクターが1pのbasinと重なり、原点の近くに初期値をとって数値計算すると、しばらくの間ストレンジ・アトラクターをさまよったあとで1pに近づく現象がみられた。

#) normal form の理論を用いたMeron & Procaccia⁶⁾によるCiliberto & Gollubの実験の解析では、非線形項の係数が6個独立に存在し、正準形式に帰着されないことがMilesにより指摘されている。また、その係数はfree parameters として与えられている。

4. ホモクリニック軌道とメルニコフ関数

ハミルトニアン (6) は変数の正準変換

$$p_1 = (2P_1)^{1/2} \cos(Q_1 + Q_2), \quad q_1 = (2P_1)^{1/2} \sin(Q_1 + Q_2) \\ p_2 = \{2(P_2 - P_1)\}^{1/2} \cos Q_2, \quad q_2 = \{2(P_2 - P_1)\}^{1/2} \sin Q_2$$

に対して、

$$H = H_0 + H_1,$$

$$H_0 = \beta_1 P_1 + \beta_2 (P_2 - P_1) + A P_1^2 + B (P_2 - P_1)^2 + 2 P_1 (P_2 - P_1) (C + D \sin^2 Q_1)$$

$$H_1 = -A_0 \{P_1 \cos 2(Q_1 + Q_2) + (P_2 - P_1) \cos 2Q_2\}$$

となり、外力と散逸のない ($A_0 = \alpha = 0$) 場合、 H と P_2 が保存し、ホモクリニック軌道

$$P_1 = -2c (d \cosh 2\sqrt{c}t + b)^{-1},$$

$$x = A + B - 2C, \quad y = 2D - x, \quad z = 2(C - B)P_2 + \beta_1 - \beta_2, \quad w = -DP_2 - z,$$

$$b = xw + yz, \quad c = zw, \quad d = xw - yz$$

が存在する。これに対して外力がある場合のメルニコフ関数は

$$Mf_{\text{cons}}(P_2, Q_{20}) = 2A_0(I_1 + I_2 + I_3) \sin 2Q_{20}$$

と表され、さらに散逸の加わった場合は

$$Mf(P_2, Q_{20}) = Mf_{\text{cons}} + 2\alpha(I_4 + I_5)$$

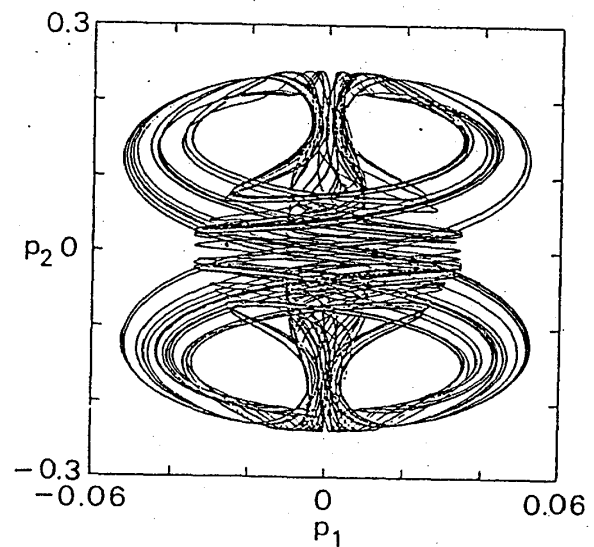
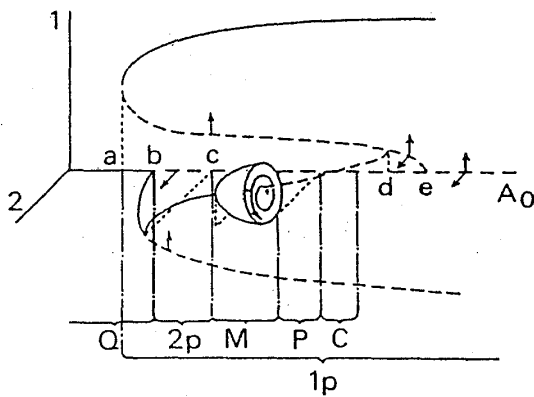
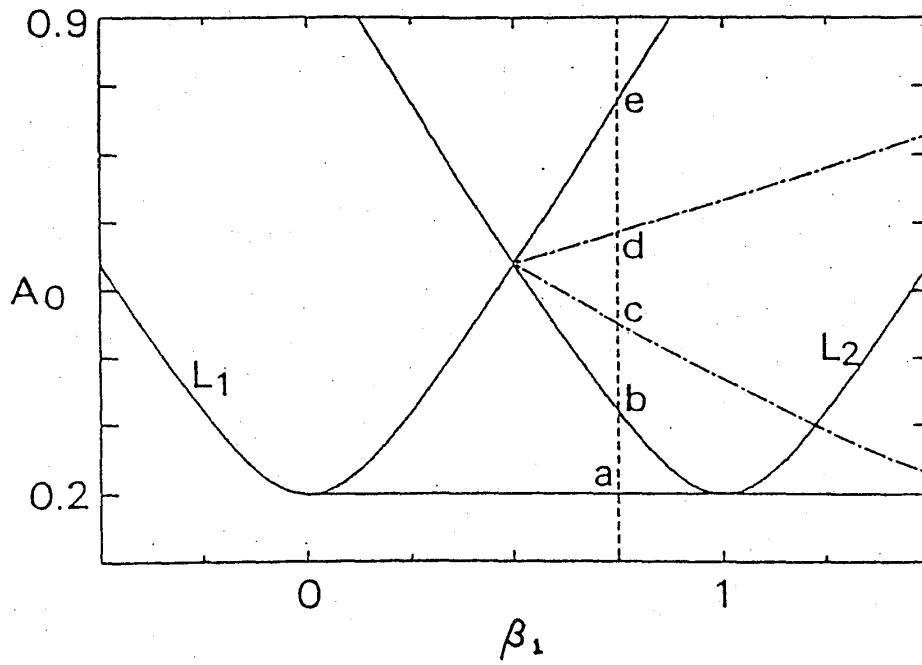
となる。ここで、 I_n ($n=1, \dots, 5$) はホモクリニック解を用いて表される、 A_0, α に依らないある積分である。よって Mf は α が十分小さい場合に一位の零点を持つことがわかる。このことから散逸のない、あるいは外力に比べて十分小さい場合に、横断的なホモクリニック軌道により Smale horseshoe が生成されることが数学的に証明される⁹⁾。数値計算によると、 $\alpha = 0$ の場合にはカオス的であっても、 $\alpha \neq 0$ では安定な固定点が生成され、ある α の範囲でしかストレンジ・アトラクターが存在しない事がわかった。

5. おわりに

実験で観察されるファラデー共鳴のカオス的なモード競合を記述する力学系を、正準形式を用いて導き、解の分岐について考察した。実験との定量的な一致を得るためには、より高次の非線形項が必要であると思われる。また、カオス的な運動が現れるには、2つのモードの固有振動数が少しずれていること(縮退の破れ)が必要である。(水平加振の場合では縮退した2つのモードでカオスが現れる。)このことは、保存系において可積分から非可積分に変わることと密接な関係がある。

参考文献

- 1) M. Faraday: Phil. Trans. R. Soc. Lond. 121(1831), 319-340.
- 2) T. B. Benjamin & F. Ursell: Proc. R. Soc. Lond. A225 (1954), 505-515.
- 3) S. Ciliberto & J. P. Gollub: J. Fluid Mech. 158(1985), 381-398.
- 4) F. Simonelli & J. P. Gollub: (1988), submitted to J. Fluid Mech.
- 5) J. W. Miles: J. Fluid Mech. 149(1984), 1-14; 149(1984), 15-31; 146(1984), 285-302.
- 6) E. Meron & I. Procaccia: Phys. Rev. A, 34(1986), 3221-3237; Phys. Rev. A. 35(1987), 4008-4011.
- 7) M. Umeki and T. Kambe: J. Phys. Soc. Jpn, 58(1989), 140-154.
- 8) J. W. Miles: preprint(1988)
- 9) P. Holmes: J. Fluid Mech. 162(1986), 365-388.



- (上) 図1 安定性ダイアグラム ($\alpha=0.2$): 実線 L_1 、 L_2 はそれぞれ $A_0 = (\alpha^2 + \beta_1^2)^{1/2}$ 、 $A_0 = (\alpha^2 + \beta_2^2)^{1/2}$ 。2本の一点鎖線のはさむ領域にMbが存在する。
- (中) 図2 図1の破線に対応する分岐図; 下の記号は安定な状態を示す。(Q: 静止状態、1p: モード1の定在波、2p: モード2の定在波、Mb: 1と2の混合状態の定在波、P: モード1と2の周期的な競合、C: モード1と2のカオス的な競合)
- (下) 図3 ストレンジ・アトラクターの (p_1, p_2) 平面への射影; $\alpha=0.2$ 、 $A_0=0.49$ 、 $\beta_1=0.75$ 、初期値 $(0.01, 0, 0.01, 0)$ 、きざみ幅0.02、ステップ数50万で後半の25万ステップのみ図示。