

ブラウン運動と乱流中に導遊する 大きい粒子の運動

東大 エ 桑原 真二

§ 1. まえがき

今日まで、乱流の構造に関する理論は、多くの研究者により、色々の立場から構成されてきた。E. Hopf の理論は統計力学的立場に立つものであり、粒子系の Liouville 方程式を連続無限自由度の力学系に一般化したものである。乱流を統計力学的に考察する場合、各点 x の流速 $u(x)$ (又、そのフーリエ成分 $u(k)$) が偶然量と考えられ、しながって位相空間は $u(x)$ 又は $u(k)$ 函数空間となる。

統計力学的対象において、偶然性の要因は運動方程式 ~~の中~~ 中の偶然力と初期条件以外には考えられない。決定論的 Navier-Stokes 方程式にもとづく乱流を問題にする場合には、それ故、偶然性の要因は初期条件以外にはない。

一方、我々が乱流について観測できる量は限られたものである。ということは、全位相空間ではなしに、もっと小さい部分空間に着目していることになる。この事情は古典統計力学において Liouville 方程式ではなしに、Boltzmann

方程式や Fokker-Planck 方程式を論ずることに終止して
 いる。

この論文では乱流中に浮遊する粒子の運動から、乱流につ
 いて如何なる情報がえられるかを論ずる。粒子の運動によ
 って我々は乱流の情報の一部をとらえているから、位相空間
 のある部分空間に着目しているといえよう。

§2. レイノルズ方程式と渦粘性

流体の方程式は

$$C(x) \equiv \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (2.1)$$

$$N_\alpha(x) \equiv \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho_{\alpha\beta} - \rho v_\alpha v_\beta) = 0 \quad (2.2)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = -p \delta_{\alpha\beta} + \mu \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \quad (2.3)$$

と書かれる。ここで $v_\alpha(t, x)$ は流速、 $p(t, x)$ は圧力、

$\rho_{\alpha\beta}(t, x)$ は応力テンソル、 ρ は密度である。諸量を平均
 流(一つ)と乱流(〜)に分解し

$$\left. \begin{aligned} v_\alpha &= \bar{v}_\alpha + \tilde{v}_\alpha, & p &= \bar{p} + \tilde{p} \\ \langle \tilde{v}_\alpha \rangle &= 0, & \langle \tilde{p} \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

とおく。ここで $\langle \rangle$ は統計平均 ensemble mean とあらわ
 す。

平均法についての方程式をつくると

$$\langle C(x) \rangle \equiv \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (2.5)$$

$$\langle v_\alpha(x) \rangle \equiv \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P_{\alpha\beta} - \rho \bar{v}_\alpha \bar{v}_\beta) = 0 \quad (2.6)$$

$$P_{\alpha\beta} = \bar{p}_{\alpha\beta} + p_{\alpha\beta}^R \quad (2.7)$$

$$\bar{p}_{\alpha\beta} = -\bar{p} \delta_{\alpha\beta} + \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \quad (2.8)$$

$$p_{\alpha\beta}^R = -\rho \langle \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta \rangle \quad (2.9)$$

となる。(2.6)はレイノルズ方程式、(2.9)はレイノルズ応力とよばれる。(2.5) ~ (2.9)方程式系は(2.9)に $\tilde{v}_\alpha$, $\tilde{v}_\beta$ がはいっているのと同じ形をしていないが

$$p_{\alpha\beta}^R = \mu_e \left(\frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \quad (2.10)$$

とおき、 μ_e がわかったものと考え、(2.5) ~ (2.9)はといったものとなる。(2.10)の μ_e は渦粘性とよばれる。

この論文では、渦粘性が、他の平均量と如何に関係しているかを論ずる。

§3. ブラウン運動

ブラウン運動の理論は、次の仮定にもとづいている。

I. ブラウン粒子の大きさ(半径 a の球とす)は平均自由行程 λ にくらべて大きい:

$$a \gg \lambda \quad (3.1)$$

したがって、粒子の運動には分子粘性の効果がある。

II. ブラウン粒子の運動は熱運動と平衡状態にある。

III. ブラウン粒子同士の衝突は少く、その抗数は熱運動のゆらぎの効果にほとんど等しく。

バツグブラウントの流体は止っているとし、ブラウン粒子系は連続体とみ直す。まず仮定 II から

$$p_b = n_B n T \quad (3.2)$$

がえられる。 p_b はブラウン粒子系の分圧であり、ブラウン粒子を通さない半透膜における滲透圧として観測される。

n はブラウン粒子の数密度、 T は溶媒の粒子系の温度、 n_B はボルツマン定数である。

粒子数保存法則から、連続の方程式：

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \mathbf{w}) = 0 \quad (3.3)$$

となる。ここで $\mathbf{w}$ はブラウン粒子系の連続体としての流速である。更にブラウン粒子系の運動方程式を、仮定 I より

$$m n \frac{D \mathbf{w}}{D t} = - \operatorname{grad} p_b + m n \mathbf{K} - m n \gamma \mathbf{w} \quad (3.4)$$

となる。ここで m はブラウン粒子の質量、 $\mathbf{K}$ は外力（体積力）、 γ は粒子の移動度で、Stokesの抵抗法則が成立している場合は

$$\gamma = 6 \pi \mu a \quad (3.5)$$

となる。

さて、(3.4) はブラウン運動を平均化してえらゆきもので、何々のブラウン粒子に対する方程式では偶然力の項があり、圧力項はない。平均化によって偶然力は圧力項に変形してわけてある。平均化された運動においては、速い運動はなくなっているから、(3.4) では慣性項と粘性項にくらべて小さいとみなし、完全に無視することができる。このような省略を行った (3.4) と (3.2)、(3.3) からブラウン粒子の拡散の方程式：

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k_B T}{m \gamma} \Delta n - \frac{1}{\gamma} k \cdot \text{grad } n \quad (3.6)$$

となる。これから拡散率 D は

$$D = \frac{k_B T}{m \gamma} \quad (3.7)$$

であることがわかる。これがアインシュタインの関係式に外ならない。

§4. 乱流中に浮遊する大きい粒子の運動

乱れた管流を考えよう。管壁附近のうすい領域と管の中心領域の2つの領域に分けて考察する。管壁近くの領域では分子粘性応力が、中心領域ではレイノルズ応力がそれぞれ支配

的である。前者では平均流速の急激に変化する境界層の厚さ δ が、後者では管の直径 d が特徴的長さと考えられる。

これらの長さに対して波数

$$k_\delta = 2\pi/\delta \quad k_d = 2\pi/d \quad (4.1)$$

を対応させる。

乱れた管流では、等方性も、一様性も一般に仮定しがたくなり、したがってエネルギー・スペクトルの概念も正確には成り立たない。しかし、中心領域では、一様性、等方性が大抵成立しているのみをすることができよう。等方性が十分に成立しない場合にも、エネルギー・スペクトルを

$$E(k) dk = \frac{1}{4\pi k^2} \iiint_{k \leq |k| \leq k+dk} \langle v(k)^* v(k) \rangle dk \quad (4.2)$$

と定義しておく。

ブラウン運動は熱動揺 thermal agitation と分子粘性による減衰のもとで起こるものであった。乱流中に浮遊する粒子の運動も、ブラウン運動と非常によく似た対応関係がある。すなわち、このような粒子の運動は、乱流動揺 turbulent agitation と、渦粘性による減衰効果を受ける。ただし、このような条件にあてはまる粒子はある程度 "大きい" 粒子でなければならない。というのは、乱流においては大きい運動 (小さい波数) と小さい運動 (大きい波数) とは力学的

平衡にあるからである。

乱れた管流では、圧力勾配によって壁附近の領域で強い渦が発生し、その渦は偶然的に、あまりにも大きい *ordered motion* によって中心領域にはこぼれる。近似的に一様性、等方性をもつ中心領域でのエネルギー・スペクトルは、左の附近にエネルギー供給があり、しむがって極大をもつと予想される。左より小さい方は散逸の効果が大きく、力学的平衡にあると考えられる。又、左の大きい領域は、散逸効果がきく、エネルギーが速に変えられるから、供給されたエネルギー殆どは大きい方へ流れて行くものと考えられる。

左 < 右 では、一種の力学的平衡にあると考えれば、乱流温度という概念が与えられる。一番小さい波数は k_d と考えられるから、波数空間に k_d を一辺とする立方格子をつくり、 $|k| < k_d$ では、各格子点に対応する波には統計的に、均等にエネルギーが分配されると考えられ、各自由度あたりの平均エネルギーを k_B で割れば乱流温度が与えられる。更に

$$k_a = \pi/a \quad (4.3)$$

を球の半径 a に対応する波数とすれば

$$k_d \ll k_a \ll k_s \quad (4.4)$$

の条件が成立せば、球の運動は乱流温度で平衡状態になつて

いふと考へるゝことが出来る。

丁度分子粘性の場合に、分子がさうな運動のやりとりの
 になつてあつたやうに、滑粘性では、小さな渦が、大きな運動
 (平均流) に対してさうな運動の運動量のになつてになつ
 てゐるということができる。そして、小さな渦、大きな運
 動の境目は最大エネルギー・スペクトルに対応する波数と考
 へるのが適当であらう。そこで今考へてゐる管法ではなと
 なる。しなかつて $k_a < k_0$ ならば、この球の運動は滑粘性
 の効果そうけるであらう。

さうな考察から、ブラウン運動の基本的仮定 I ~ III
 は次のように修正して、ブラウン運動の理論を乱流中に浮遊
 する粒子の運動に適用するゝことができる。

I. 粒子の半径 a に対応する波数 k_a はエネルギー・スペ
 クトルの極大値に対応する波数 k_m にくらべて小さい:

$$k_a \ll k_m \quad (\equiv k_0) \quad (4.5)$$

しなかつて、粒子の運動は滑粘性の効果そうける。

II. $k < k_m (=k_0)$ の k の範囲で乱流は力学的平衡にあり、
 $k_d \ll k_a \ll k_m$ に対応する粒子の運動は又その乱流と力
 学的平衡にある。

III. 粒子同士の衝突は少く、その拡散は乱流のゆらぎの効果
 によるとする。

上の仮定のもとで、ブラウン運動の場合^④と全く同じ議論によって、乱流拡散率 D_t , 渦粘性率 μ_t , 乱流温度 T_t の間にアインシュタインの関係式が成立つ。仮定Ⅲにより粒子の運動エネルギー $\frac{1}{2} m \langle c^2 \rangle$ (c は粒子速度) と乱流温度の間に

$$\frac{1}{2} m \langle c^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T_t \quad (4.6)$$

がなり立つ。したがってアインシュタインの関係式は

$$D_t = \frac{\langle c^2 \rangle}{18 \pi \mu_t a} \quad (4.7)$$

となる。

乱流拡散率は1個の粒子の運動から

$$\langle x^2 \rangle = 2 D_t t \quad (4.8)$$

によってもとまる。すなわち、 $t=0$ に原点にある粒子が t 後において移動した1次元距離 x の2乗平均と t の関係プロットすればその比例係数から D_t が求まる。粒子の運動から D_t と $\langle c^2 \rangle$ を観測し、流体の平均速度勾配と粘性応力の測定から、 μ_t を知れば、(4.7) を用いて a を求めることができる。

乱れた管流において、中心領域 I では μ_e が、境界領域 II では μ が支配的であり、境界 $y = a - \delta$ で、流速と粘性応力が連続という境界条件によって、流体の方程式をとくと、I, II 各領域の流速 u_I, u_{II} は

$$\begin{aligned}
 u_I &= \frac{C}{4} \left(\frac{a^2}{\mu} + \frac{b^2}{\mu^*} - \frac{r^2}{\mu_e} \right) \quad 0 \leq r \leq b \equiv a \left[\frac{\mu^*}{3} \left(\frac{Q}{8\pi a^4 C} - \frac{1}{\mu} \right) \right]^{1/4} \\
 u_{II} &= \frac{C}{4\mu} (a^2 - r^2) \\
 \frac{1}{\mu^*} &= \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_e}
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。ここで、 Q は流量、 C は平均圧力勾配である。^厚もしも、乱流が非常に強く（レイノルズ数大）、境界層の厚さが管径にくらいで非常にうすければ（4.9）の $b \equiv a$ とおけば

$$\frac{1}{\mu_e} \doteq \frac{4}{3\mu} - \frac{Q}{8\pi a^4 C} \quad (4.10)$$

となり、圧力勾配 C と流量 Q から、渦粘性がわかる。

結論として、乱流中に浮遊する粒子の半径 a が

$$\frac{2\pi}{k_m} \ll a \ll d$$

の条件を満足すれば、アインシュタインの関係式：

$$D_t = \frac{\langle v^2 \rangle}{8\pi \mu_t a}$$

が成立つ。ここで k_m は乱流のエネルギー・スペクトルの最大の波数、 d は乱流領域の寸法、 $\langle v^2 \rangle$ は粒子の速度の2乗平均、 D_t 、 μ_t は乱流拡散率、渦粘性率である。

参考文献:

- 1) E. Hopf: J. Rational Mech. and Anal. 1, 87 (1952).
- 2) A. Einstein: Ann. der Phys. 17, 549 (1905).