

関孝和の楕円の研究について *

小林 龍彦 **

1, はじめに

日本数学史上、はじめて楕円の面積を求めることに成功したのは関孝和 (1640?-1708) である。その方法のすべては「解見題之法」と「求積」に著されている。また、これらの著書には楕円の周長を近似的に求める方法も明らかにされている。

関孝和が楕円の研究に取り組むことになった直接的きっかけは礒村吉徳 (?-宝永7: 1710 年) の『算法闕疑抄』(万治2: 1659 年刊) や村瀬義益 (?-?) の『算法勿憚改』(延宝元: 1673 年刊) の遺題に出題された楕円周および貫通体問題を解決することにあつた。それら遺題に対する関の解答書「闕疑抄一百問答術」(年紀不明) や「勿憚改答術」(年紀不明) を読むと、「解見題之法」と「求積」に登場する楕円、楕円欠の面積および斜円錐の体積、さらには楕円の求長式が縦横無尽に駆使されていることに気がつく。この事実は関孝和の楕円に関する研究の主要な部分は、彼の算学研究の初期に完成していた、ということを暗示している。

そこで本稿では、上記の史実を明確にするために、関孝和が楕円の研究に関心を寄せることとなった『算法闕疑抄』と『算法勿憚改』に載る楕円問題を紹介しながら、当時の和算家と関孝和の楕円に対する発想の違い、即ち関の数学的優位性を彼の文脈に沿いながら浮かび上がらせることにする。また、関孝和が円錐台の求積方法を研究する過程で双曲線、放物線などに囲まれた断面の殊に注目していることも看過できない事実であろう。一方、同時代の中国暦算書にも耶蘇会宣教師たちの手によって円錐曲線が紹介されており、これらからの影響を指摘する声が存在する。そこで関孝和の研究と中国暦算書に載る円錐曲線との関係も若干触れてみることにした。

なお、和算では今日の楕円を側円と呼ぶのが習わしである。楕円とする用語は中国暦算書である梅文鼎 (1633-1721) の『曆算全書』(1723 年刊、1726 年舶載) に用いられていたことから徐々に広がり、幕末に至って定着することになる。しかし、本稿では楕円として統一的に表記したことを予め断っておく。

2, 関孝和以前の楕円の研究

江戸時代初期の算書にはしばしば円や円弧以外に、木の葉形、飯櫃形、あるいはアルキメデスのスパイラルに類似した曲線図形が登場する。だがそれらは今日の平面・空間曲線とは異なっていることが多い。この時代の算書に載せられた術式に沿って和算家の思考過程を辿ってみると、多くの場合これらの曲線 (もしくは曲線体) は円と円弧 (もしくは球欠) を組合わせたものと見なして解決しようとしていたことが分かる。

、円錐曲線の一つである楕円も和算の初期に発見された。楕円の発見は当時の和算家の知

* On the Study of Ellipse by Takakazu Seki

**前橋工科大学工学部 共通教育

的営為の深淵さを伺い知る好例となるが、数学としての本質的な解決は、その他の平面曲線同様に、江戸時代末期の和算高揚期を待たなければならなかった。

さて、初期和算における楕円の登場は『算法闕疑抄』や『算法勿憚改』に遺題として提出されたことにその端を発している。関孝和の楕円の研究を紹介する前に、これらの和算書に登場する楕円とこれに対する和算家の考え方を一瞥しておく必要がある。

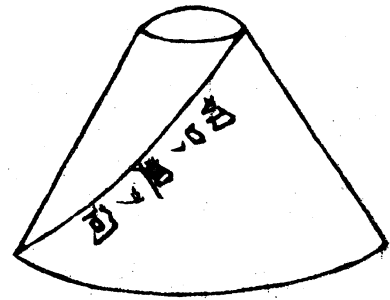
1) 礪村吉徳著『算法闕疑抄』(万治2:1659年刊)

遺題 第45問

今指渡し上にて百二十間、下にて二百五十間、高二十五間有る円台を相違に切申す時、切口の廻何程と問。

[題意]

今、上底の直径が120間、下底の直径が250間、高さ25間の円錐台がある。この円錐台を図1のように斜截したときの断面の周の長さを求めよ。



百十八間

図 1

礪村の『算法闕疑抄』の遺題において、上図のように円錐台の上底から下底まで1平面で斜截したときの切口の周長を問う問題が提出された。これが和算における楕円問題の濫觴である。見ての通り、問題文および術文を見る限り礪村はこれに特別な名称は与えていない。ただ、この時期の和算家の多くは、礪村を含めて円錐台の截断面を楕円とは認識せず、2つの円弧を組み合わせたものと認識していたようで、結果として楕円周へのアプローチも円の弧背の近似式、即ち弧矢弦術によって迫られることになる。発問者である礪村吉徳自身のこの曲線に対する見方は、貞享元(1684)年に刊行された『増補算法闕疑抄』によって理解できる。いま彼の考え方を同書に示された答から見ておこう。

上ニシテ半ノ切口

矢 八十一間0八厘
弦 九十七間0八厘 但倍数也
徑 三百七十一間六分七厘
弧 二百二十一間八分七厘

下ニシテ半ノ切口

矢 八十一間0八厘
弦 三百七十六間一分八厘 但倍数也
徑 二千四百三十四間六分四厘
弧 三百四十間0二分五厘

上下弧併合五百六十二間一分二厘は好之切口

又曰吟味之法にして者、上弧二百十三間八分、下弧三百三十三間二分、上下併合五百四十七間也

上記の答は礪村が、円錐台の対角線に沿って斜截したときの切口の周は、半径の異なる2つの円の弧背を接合したものである、と見倣していたことをはっきりと示している。そしてこの時の2つの円の弧背とは、上弧(s_1)は矢(h_1)81間08厘、弦(c_1)97間08厘とし、下弧(s_2)を矢(h_2)81間08厘、弦(c_2)376間1分8厘とす

るもので、これらを術によって得た後、更に弧矢弦術（弧背の近似式）から、

$$s_1^2 = c_1^2 + k \cdot h_1^2, \quad s_2^2 = c_2^2 + k \cdot h_2^2 \quad \dots \quad (*)$$

s_1 と s_2 を求めればよい、とするものである。著書『算法闕疑抄』の定義によれば、礪村は弧背率 k を6として用いるから、これより s_1 と s_2 を計算すれば、

$$s_1 = 221.0618, \quad s_2 = 340.1752354$$

となる。礪村の答と上記 s_1 と s_2 の値を比較すると、確認値の方が僅かに小さい。そこで、礪村の答の数値を用いて、弧背率 k を逆算してみると、上弧のときは6.05445、下弧では6.00773835を得る。このような確認計算から眺めるとき、礪村が『算法闕疑抄』の弧矢弦術で主張した値6を使わなかった背景には、円錐台の切口を円弧とすることに躊躇する考えがあったのかもしれない。

2) 野沢定長著『童介抄』(寛文4:1664年刊)

野沢定長(?-?)も『算法闕疑抄』の遺題に挑戦した。野沢はその解答集として寛文4年、『童介抄』を著した。『童介抄』に著された楕円の周に対する野沢の考えは、上径(a)=120間、下径(b)=250間、高さ(h)=25間とおき、この時の切口の周長を l とすれば、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2} + a\right)^2 + h^2 + \left\{\left(\frac{b-a}{2} + a\right) - \frac{b}{2}\right\} \times \frac{b}{2} \times 6$$

とする式で求まる、とするものであった。術文を直訳しただけでは野沢の考え方は具体的にならない。そこでこの式を手を加えてみると、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2\right] + \frac{6ab}{4} \quad \dots \quad (1)$$

とする簡素な l の2次式が得られる。ところで、図1のように円錐台を斜截したときの楕円の長径と短径は、

$$\text{長径} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2} \quad \text{短径} = \sqrt{ab}$$

と求められる。ここで楕円の長径を弦、短径/2を矢、 $l/2$ を半円の弧と看做して、これらを弧背の近似式(*)に代入すれば式(1)が得られる。

つまり、野沢は術文で複雑な求長式を誇示して見たものの、実際には円錐台の切口の周は円錐台の対角線つまり楕円の長径を弦、楕円の短径の半分を矢とする2つの円弧が合わされたもの、と考えていたのである。

3) 佐藤正興著『算法根源記』(寛文9:1669年刊)

万治2年の『算法闕疑抄』の刊行から10年後、佐藤正興(?-?)は『算法根源記』を著した。『算法根源記』は、『算法闕疑抄』『童介抄』の遺題に挑戦し、自ら新たな遺題150問を付して出版したものである。遺題150問という問題の質より量を優先した佐藤の出版姿勢は、後世の算者から、

然るに根源記に百五十問を設く。多くは造作の問のみ。故に点線相混じ、平立相入、是は数に迷て、理に闇く、実を察ずして、虚に走るにて御座候、半歟。

是、徂徠をして、口を開かしむる所ならん歟。根源記の後に、算書を著す者、皆根源記を祖述して、愈々巧に、愈奇也。

とする誹りが浴びせられることになり、儒者荻生徂徠を巻き込んだ『算法根源記』への批判は和算家の作問姿勢を再考させる契機となった。

さて、『算法闕疑抄』の遺題第45問について佐藤はどのように考えていたのだろうか。

図2は『算法根源記』に表された楕円の周長のための展開図である。佐藤のアイデアは、円錐台の切口の周を、図2の左図のような円錐の展開図における対角線と見なして、その長さを求める、と言うものであった。そのためにまず佐藤は、楕円の長軸に合わせて円錐台を直截した展開図を提示するが、この時の扇形の

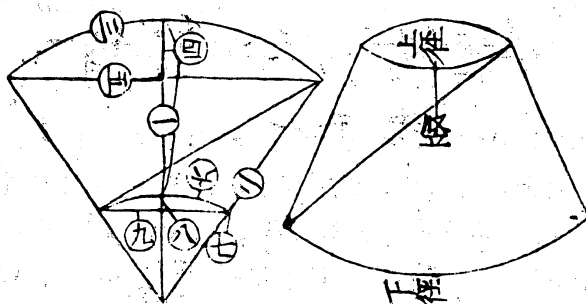


図 2

の大きさは不問にして計算を実行していく。すなわち扇の半径を“大円徑半ニ見立ル也”

(図2の記号丸二)とし、さらに“是ヲ大円徑ノ弧ト見立ル也”(記号丸三)として、これらの値を求めた後、弧矢徑術から“大円徑ノ矢”(記号丸四)、徑矢弦術により“大円徑ノ弦”など関係する線分の長さを求める。同様な方法で小円の弧(記号丸六)、同矢(記号丸八)、同弦(記号丸九)を得る。ここで、大矢 = h_1 、小矢 = h_2 、大弦 = c_1 、小弦 = c_2 、楕円の周長 = s とおけば、

$$(2s)^2 = 4\{(1-h_1)+h_2\}^2 - (c_1+c_2)^2$$

$$\text{ただし、} l^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + h^2$$

となる。

上記のような図および計算過程から、佐藤が楕円周を円錐台の展開図における直線と看做していたことはあきらかである。また、計算方法においても当時の和算家の思考範囲を脱するものではなかったが、問題解決に当たって展開図を採用したことはこの時代としては異例なことであったと言ってよからう。

4) 村瀬義益著『算法勿憚改』(延宝元：1673年刊)

礪村の弟子村瀬義益は延宝元(1673)年に『算法勿憚改』を著したが、その第3巻において遺題100問を提出した。このうちの第91問と95問が楕円に関わる問題となっている。特に第91問は円錐台を正3角柱で貫通させたときの残積を問う相貫体の問題となっている。相貫体問題の出現は和算初期のトピックスであると同時に、安嶋直円(1739-1798)以降に流行した穿去問題の先駆けとなった問題でもある。同問題の原文は次のようになっている。

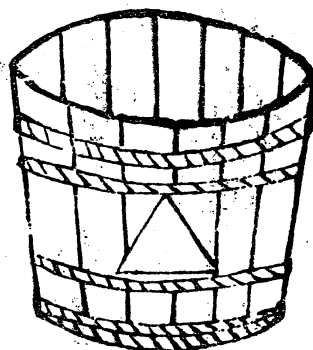
遺題91 水道の満桶、内のり口径三尺五寸、底徑三尺二寸、深三尺有。是に底より

五

寸上に方一尺二寸の三角樋を突通、この樋の坪を去、残坪問。

また、第95問では『算法闕疑抄』の遺題第91問を再出題している。つまり、村瀬が新規に作成した問題を掲載したのではない。そこでは、

遺題95 是も闕疑に好出すを、根源記には上皮をむき候ことく扇紙形に見立候へとも誤也。本末差なき時は丸かわは此ことくにて扇紙の見立に不合候。根源記の図にても雛形に不合候。



と述べて、4年前に出版された佐藤正興の『算法根源記』の展開図による解法では、円柱の場合には扇形の展開図は得られないから不都合である、よって佐藤の解法は誤っている、と非難したのである。村瀬義益の批判には『童介抄』の解法が含まれているようには思えないから、専ら『算法根源記』の解法について言及していると察せられる。また、この間に新たな解法が公表されることなかったのであろう。さて、肝心の村瀬はといえば、上記のような論評してみても、彼自身の解答は示されていないから、彼が円錐台の切口をどのように認識していたか分からない。ただ、礪村・村瀬の師弟関係からすれば、村瀬の脳裏には1)で示した『増補算法闕疑抄』の解答があったのではないだろうか。

3、関孝和の楕円の研究

『関孝和全集』を紐解くと、関孝和は算学研究のかなり早い時期から楕円について関心を持っていたことが分かる。彼の楕円への関心は、2章で見たように、当時の和算家たちにとって難問であった楕円の周長問題を解決することに起因している。尤も関孝和は諸算書に載る遺題を解決していく過程の1つとして楕円問題に挑戦するのであるが、問題解決における関孝和の発想は他の算者と比較して、極めて系統的かつ数学的であることは言うまでもない。

1)「闕疑抄一百問答術」(年紀不明)

題名から分かるとおり本書は礪村吉徳の『算法闕疑抄』の遺題100問に解答を与えたものである。よって、本写本の成立は『算法闕疑抄』が出版された1659年を下ることではない。ただ『全集』に登載された「闕疑抄一百問答術」が関孝和自身が著述したときの原型を留めているかどうか、つまり後世の和算家による加筆・修正が存在するのではないかという疑いについては今後の課題とし、本稿では『全集』の編集方針を踏まえて議論を進めていく。このことは次の「勿憚改答術」についても同じである。

「闕疑抄一百問答術」第45問が楕円問題となる。問題の主旨と関孝和以前の和算家の解法等はすでに紹介したから、ここでは同書に残された関孝和の術文を中心にして検討していく。第45問の楕円周の求長式を問題の数値条件と術文に沿って組み立てると次のようになる。

[問題] 円錐台の上径8寸、下径12寸、高さ9寸のとき、切口の周長を求めよ。

[答曰] 截面周 3尺6寸80282強

[術文]

$$\begin{array}{lll} \text{周}^2 & \cdots & \text{甲位} \\ 4 \cdot \text{長径}^2 = (\text{上径} + \text{下径})^2 + 4 \cdot \text{高}^2 = 724 & \cdots & \text{乙位} \\ 4 \cdot \text{短径}^2 = 4 \cdot \text{上径} \cdot \text{下径} = 384 & \cdots & \text{丙位} \end{array}$$

とにおいて、これらより、

$$\{\text{周}^2 - (\text{乙} + \text{丙})\} 51076 = 95492 \cdot \text{長径} \cdot \text{短径} \quad \cdots \quad (1)$$

を得る。上式を自乗すると

$$(51076 \text{周}^2 - 5692208)^2 = 9118722064 \cdot \text{長径}^2 \cdot \text{短径}^2 \quad \cdots \quad \text{左}_1$$

また、これを就分すれば、

$$\text{乙} \times \text{丙} \times 569920129 \quad \cdots \quad \text{左}_2 \quad (2)$$

となる。左₁を右辺に移項して消去すれば、周の4次式、

$$\begin{aligned} 2608757776 \text{周}^4 - 5781007231616 \text{周}^2 + \\ 3044231091731200 = 0 \end{aligned}$$

を得て、これを解けば答が求まる。ここまでの関孝和の術文である。さて、実際にこの4次式を解いてみると、

$$\begin{aligned} \text{周} = 36.80282378\cdots, -36.80282378\cdots, \\ 29.35220877\cdots, -29.35220877\cdots \end{aligned}$$

の4つの解を得るが、第1番目の値が関孝和が[答曰]として与えた数値と一致している。また、関の答は末尾を「強」として括っているが、この術語の概念は“5以下を棄てる”であるから、実際には小数点以下6桁までは正確に計算していたことも推測できる。

ところで関孝和はどのようにして上記式を作ったのであろうか。それを解き明かす若干の解説が術文の最後に挿入されている。それを手がかりに改めて関孝和の術式を考えてみよう。まず、(1)は挿入の解説文によって、

$$\begin{aligned} \{\text{周}^2 - (4 \cdot \text{長径}^2 + 4 \cdot \text{短径}^2)\} 4 \cdot 113^2 = \\ (4 \cdot 355^2 - 32 \cdot 113^2) \text{長径} \cdot \text{短径} \quad \cdots \quad (3) \end{aligned}$$

と書き換えられる。そこで(3)式の意味を探てみると、「解見題之法」に載る楕円周の近似式は、

$$\text{周}^2 = \text{長径} \cdot \text{短径} \cdot (355/113)^2 + 4(\text{長径} - \text{短径})^2$$

であるから(ただし、 $355^2/113^2 = \text{周幂法}$)、この近似式を展開すれば、

$$113^2 \cdot \text{周}^2 - (4 \cdot \text{長径}^2 + 4 \cdot \text{短径}^2) 113^2 = (355^2 - 8 \cdot 113^2) \text{長径} \cdot \text{短径} \quad \dots \quad (4)$$

となる。ところが、長径と短径は一番最初に4倍と自乗の形で与えられているから、そこで、(4) × 4をすると

$$4 \cdot 113^2 \cdot \text{周}^2 - (4 \cdot \text{長径}^2 + 4 \cdot \text{短径}^2) 4 \cdot 113^2 = (4 \cdot 355^2 - 4 \cdot 8 \cdot 113^2) \text{長径} \cdot \text{短径} \quad \dots \quad (5)$$

となり、(3) または数値式(1)と一致する。また、(5)式全体を自乗すると、右辺は、

$$(355^2 - 8 \cdot 113^2)^2 4 \cdot \text{長径}^2 \cdot 4 \cdot \text{短径}^2$$

を得て、左₁の右辺=左₂であることが分かる。これから術文の通り、最終式である周⁴に到達する。

このように術文を計算式へ変換することによって、「闕疑抄一百問答術」第45問の楕円の求長が「解見題之法」に載る近似式に依拠していることが明らかとなる。この第45問は『全集』の編者たちも校訂できなかった所であるが、結果は術式の数値等の正しいことが確認される。ただし、同問題の最後の解説文において、“三十三段徑率冪”とする箇所は“三十三段徑率冪”に訂正しなければならない。ところで、関孝和は周の4次式を実際に計算したのであろうか。このような疑問は、答曰として与えた数値の外にもう一つの正の解が存在することについて、関孝和が何も語っていないことから生じる。単に答の数値のみに拘るのであれば、楕円の近似式に条件の数値を代入して計算すれば、

$$\text{周} = 36.80282379231 \dots$$

$$(\text{ただし、}\pi = 355/113)$$

と簡単に答は得られる。この計算では楕円の長径と短径を求める方法さえ知っていればことは足りる。つまり、困難な計算を伴う4次方程式を組み立てる必要はないのである。残念ながら術文には上記のことを類推させる記述は何もない。

なお、以下の事柄は「闕疑抄一百問答術」第45問から見た関孝和研究における厳然たる史実として確認しておこう。それは、

1) 関孝和は『算法闕疑抄』第45問を解く段階において、楕円周の近似式を会得していた。

2) 円錐台を斜截したときの切口が楕円であることを認識していた。

3) 楕円の長径と短径を円錐台の上径、下径と高さを用いて求めることができた。

ということである。ただ、2)に関しては関孝和は「截面」と呼んでおり、「解見題之法」のように「側円」としていないことは注意を要しよう。

2) 「勿憚改答術」(年紀不明)

『全集』では「勿憚改答術」は関孝和の著作として第3番目に位置づけられる。題名の通り延宝元(1673)年に村瀬義益が著した『算法勿憚改』の遺題に解答を与えたものであ

る。『算法勿憚改』の遺題には既に見たとおり、楕円問題が2題提出されているが、関孝和はこれらについても果敢に挑戦し、見事に解決している。

さて、第91問は円錐台の中心を正3角柱で貫通させたときの残積を求める問題である。この問題における関の求積法の詳細は、拙著「関孝和の勿憚改答術における穿去題について」(『桐生史苑』、第21号、昭和57年)に譲るとして、本稿では貫通された円錐台の残積を求めるために用いられる楕円に関わる基本的求積式のみを紹介しておこう。それらは、

$$\text{斜円錐の体積} = \text{正高} \times \text{楕円の面積} \times 1/3$$

$$\text{楕円の欠積} = \text{仮弧積} \times \text{長径} \div \text{短径}$$

$$\text{楕円欠錐積} = \text{楕円の欠積} \times \text{正高} \times 1/3$$

とするものであるが、いずれも関孝和の一著とされる「求積」中の「円錐台論」で使用される公式である。当然ながら関孝和はこれらに証明を与えていない。

第95問は村瀬の『算法根源記』に対する批判を踏まえて、再び楕円の周長に臨んでいる。ここにおいて使用される求長式が前出のような近似式であることは明らかである。よって、要点のみを紹介しておこう。

〔問題〕 円錐台の上径3寸、下径16寸、高さ10寸の時、切口の周長を求めよ。

〔答曰〕 截面周3尺3寸64019微弱

〔術文〕 術文の筋道については「闕疑抄一百問答術」において詳論した。なお、術文に従って、式を組み立てれば

$$2608757776\text{周}^4 - 4972292321056\text{周}^2 + 2286025121094736 = 0$$

とする周の4次式を得る。これを解けば、

$$\begin{aligned} \text{周} &= 33. \underline{6401896}3\cdots, \quad -33. \underline{6401896}3\cdots, \\ &27. \underline{82692296}\cdots, \quad -27. \underline{82692296}\cdots \end{aligned}$$

を得る。また、末尾を「微弱」と括っているが、微弱は“9以上を収めて1とする”のであるから、下線部の9を収めて1として、これを前桁の8に加え9とすることを意味する。このことから「闕疑抄一百問答術」の第45問と同様に、本問でも小数点以下6桁まで正確に計算していたことも確実となる。

3)「解見題之法」(天和・貞享年間：1683－1685)

関流三題免許の1つをなす本書は、関孝和の平面及び立体図形における求積・求長法のエッセイを公表したものといえるが、本書で関孝和は楕円の面積をもとめる方法、およびその周長の近似式について明らかにしている。

①円柱を斜截したときの切口の面積を求める

方法

関孝和はこの問題において円柱を斜截したときの切口を“円を傾けたもの”或いは“円をそばだてたもの”と意味づけ、和算家として初めて楕円を側円と呼んだ。そして、面積のための式として、

$$\text{楕円の面積} = \text{長径} \times \text{短径} \times \pi / 4$$

と正しく与えた。加えて解術において図3における各要素を短径＝円径、長径＝斜弦、股＝円柱の高さ、中股＝仮高と求めて、これより、

$$\text{楕円の面積} = \text{円柱の体積} / \text{仮高}$$

と指示している。がしかし、これを以て直ちに楕円の面積の求積式に到達するのは難しい。この解術に比して「求積」では比例式から長径、短径が導かれることを鮮明にしておき、両著の術文における表現法に著しい乖離がある。解術において表現上の差がなに故に生じたのか、筆者には今のところ分からない。

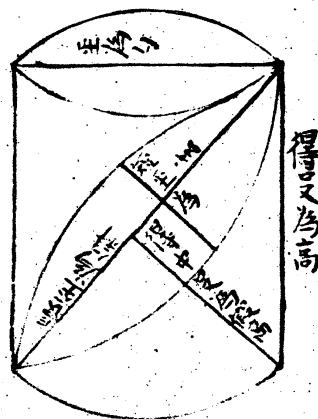


図 3

②楕円の周長をもとめる方法

本題は既に詳述した楕円の周長式の根源を明らかにするものである。冒頭、

$$\text{周}^2 = \text{円周法}^2 \times \text{長径} \times \text{短径} + 4 (\text{長径} - \text{短径})^2$$

とする近似式が示された後、この式の由来を次のように記す。“楕円を正視すれば円であり、又これを傾視すれば2直線と看做することができる”、故に上記の式をもって周長は求まる、という。よって得られた近似式は関孝和の説明に頗る妥当するものの、関孝和がこれを全てとして満足していたかどうかは不明である。ただこの解説から関孝和が円の射影として楕円を観ていたことははっきりと分かる。

4)「求積」(年紀不明)

「関流算法七部書」の1冊として伝わる本書は、平面と立体図形の求積法について極めて体系的に叙述したもので、関孝和の時代の算学水準の高さを窺い知るに十分な一著である。本稿の目的である楕円に関する記述は「平積」および「立積」の部に登場する。その「平積」の部では楕円の面積について論じられるが、先に指摘したようにここでは円柱に表れる各要素が楕円のそれらに見事に変換される。まずこのことを指摘しておこう。

「平積」

[問題] 長径3尺、短径1尺2寸の楕円の面積を求めよ。

[答曰] 積306寸69/226

[術曰] (略)

[解曰] ここでも著者は楕円が“是全円欹側、而所成也”ものであることを強調する。つづいて、「解見題之法」では不明晰であった求積法が簡潔に示される。それはまず、図3における円柱の直径、斜高をそれぞれ短径、長径とおいて、相似三角形の比例から、

$$\text{円柱の直径} \times \text{円柱高} / \text{斜高} = \text{側円柱の正高} \quad \dots (A)$$

を得る。また、

$$\text{円柱の体積} = \pi \times (\text{円柱の直径} / 2)^2 \times \text{円柱高} \quad \dots (B)$$

$$\text{斜円柱の体積} = \text{楕円の面積} \times \text{側円柱の正高} \quad \dots (C)$$

であるから、 $(B)=(C)$ となり、 (A) を用いて整理すれば

$$\begin{aligned}\text{楕円の面積} &= \pi \times \text{斜高} \times \text{円柱の直径} / 4 \\ &= \text{長径} \cdot \text{短径} \cdot \pi / 4\end{aligned}$$

このように「解見題之法」では表面化していなかった (A) の比例式が示されることによって、楕円の面積を求める道筋が具体的となっている。

「立積」の部の円錐台に関わる問題では、斜楕円錐(台)、斜楕円欠錐(台)および楕円欠の面積法が取り上げられる。いわば楕円錐(台)の体積論とでも表現でそんな内容と分量をもって詳細な求積法が展開されている。本稿ではこれらを1つ1つ取り上げる紙幅がないので別稿に譲るとするが、ここでも円錐台を斜截したときの切口は楕円であることを既知なものとして求積法を展開していることは言うまでもない。ただ、後述するように任意な斜截による断面が必ずしも楕円ではないことも認めていることは注目に値しよう。

また、楕円の求積を論ずるに当たって、その前提として円錐台の上径、下径と高さを用いて、楕円の長径、短径および斜円錐台の正高の求めなければならないが、それらに関しては「求積」では一切明らかにされておらず、本書を学習するものは独自にこれらを考究せねばならなかった。そのため、後世の和算家は「截積伝」なる伝書を著して、斜円錐台の求積法を図説し、これを後学への助けとした。斜円錐台の重要な求積式は「勿憚改答術」で紹介したので、ここでは基本となる式を列挙するだけに留めておく。

ア、長径を得る解

$$\text{長径}^2 = [(\text{上径} + \text{下径}) / 2]^2 + \text{高}^2$$

イ、短径を得る解

$$\begin{aligned}4 \cdot \text{上径} \cdot \text{下径} &= 4 \cdot \text{弦}^2 = 4 \cdot \text{短径}^2 \\ \therefore \text{短径}^2 &= \text{上径} \cdot \text{下径}\end{aligned}$$

ウ、正高を得る解

$$\text{正高} = \text{上径} \cdot \text{下径} \cdot \text{高} / \text{長径} (\text{下径} - \text{上径})$$

また、欠円錐台の求積法において「中心高」とする術語も登場するが、これについての論評を先行する研究書に譲る。

さらに、「求積」にはもう一つ注目すべき記述が存在する。それは円錐台を平面で任意に斜截することから生ずる異種な切口、即ち今日で言う円錐曲線の存在を認めていることである。「求積」の著者は、

「求積」の用語	円錐曲線
1, 圭面之円	双曲線
2, 圭	2等辺3角形もしくは正3角形
3, 側円	楕円
4, 圭面之円(上矢=下矢)	放物線

として、截り方によって上記のような断面が得られることを記している。「圭」という概念は和算では図形上、二等辺三角形を意味しており、「圭面之円」とは二等辺三角形のような対称な曲線で囲まれた面を持つ円、という意味に転化できる。しかし、「求積」では円錐台を平面で斜截する際、円錐台の上径と下径に生じる上矢と下矢の大小関係によって

截断面が異なることを明示している。これの要点を述べれば、一般に上矢<下矢の場合は1のような双曲線に囲まれた断面となり、4の場合は上矢=下矢であるから、明らかに截断面は放物線に囲まれたものとなる、とすることである。このこのように「圭面之円」という抽象的な用語を使用しながらも、上矢と下矢の関係から異なる断面が得られることを理解していたことは確実である。この事実は、同所において4の圭面之円の面積を、

$$\text{截面積} = \text{截面長} \times \text{潤} \times 2 / 3$$

と求めていることから確実視でよう。これが放物線に囲まれた面積を求める公式であることは言うまでもない。

ところで、「求積」の遺産の継承という点では、上記の円錐曲線に関わる議論は後の和算家には理解できなかったような節がある。全国の公的・私的に収蔵されている「截積伝」と題する写本等を調査したところ、斜円錐台の求積を解説することはあっても、「圭面之円」もしくは「圭面之円」の截面積について触れたものを筆者は未だに観ない。また、幕末の和算書の円錐曲線に関係した問題の多くが、関孝和以来の伝統用語として楕円周を「截面周」、双曲線に囲まれた面積を単に「截面積」などを使用していること眺めると、関の円錐曲線に関わる研究の不理解は長く継続していたものと思われる。

もう1つ「求積」の円錐曲線の記述に関連して触れておかなければならない事がある。それは明末清朝初期の中国において、耶蘇会宣教師たちの手によって著された暦算書に円錐曲線が登場していることとの関係である。この当時の中国暦算書として円錐曲線を扱ったものは管見では「測天約説」と「測量全義」の二著と思われる。これらに載る円錐曲線を要約して見れば次のようになる。

1)『崇禎暦書』中「測天約説」(崇禎4:1631年1月、第1次進呈)

「測天約説」では楕円について、長円形または瘦圈界、楕円と命名している。そして長円形は円径を一方向(ここでは短径方向)に対し一定の比率で短縮したものと定義し、また、円柱を斜截したときに得られる断面とも言う。また、これを卵形に類似した形とも言うが、卵形は両端の形に大小の差があるから、楕円とは異なると述べている。

2)『崇禎暦書』中「測量全義」(崇禎4:1631年8月、第2次進呈)

「測量全義」6巻において円錐曲線が論じられる。ここでは円錐を斜截したとき、その截断面として、

名 称	截 法
① 三角形	頂点より底面に垂直
② 円形	底面と平行
③ 圭竇形	母線と平行
④ 陶丘形	頂点を含まず底面に垂直
⑤ 楕円形	任意に斜截

の5種が得られることを認めている。これらのうち圭竇形が放物線、陶丘形が双曲線に相当する。これらの截断面が生じる要件として「測量全義」は上記のような簡略な説明しか与えていない。これに比して「求積」上矢と下矢の大小関係で異なる截断面が生じることを詳しく論じており、数学的議論としては「測量全義」を上回っている。また「測天約説」や「測量全義」などには楕円の面積や放物線で囲まれた面積を求める方法は一切出ていないことも指摘しておこう。

5, まとめ

ここではつぎのことを指摘して本稿の暫定的まとめとしておきたい。

『全集』における「闕疑抄一百問答術」と「勿憚改答術」は関孝和の学習時代の著作として位置づけられている。同様の議論は平山諦氏の著作にも見られる所である。しかし、少なくとも両著に見られる楕円問題からは、関孝和の研究時代の著作と位置づけられている「解見題之法」、あるいは「求積」に登場する楕円周の求長法および楕円と斜円錐台の求積法が全て駆使されている、という事実が鮮明になってくる。このような数学史的事実に立脚すれば、関孝和は算学研究の初期において高度な数学的理論武装をしていたと断じることが可能となるのである。こうした『全集』のような学習時代という評価が不当であるとする立場は、関孝和研究の新たな地平を模索させるものとなっている。

参考文献

- 1, 平山諦、下平和夫、広瀬秀雄：『関孝和全集』、大阪教育図書、昭和49年
- 2, 日本学士院編：『明治前日本数学史』、新訂版、第1巻、第2巻、昭和54年
- 3, 平山諦：『関孝和』、恒星社厚生閣、昭和56年
- 5, 平山諦、内藤淳編集：『松永良弼』、東京法令、昭和62年
- 6, 下平和夫：『和算の歴史』(上)、富士短大出版部、昭和40年
- 7, 小林龍彦、田中薫：関孝和の円錐曲線の研究について、『科学史研究』、第Ⅱ期第24巻、No.155、1985年
- 8, 小林龍彦、田中薫：関孝和の勿憚改答術における穿去題について、『桐生史苑』、第21号、1982年