

量子等質球面について

戸松玲治 (Reiji Tomatsu)

東京大学大学院数理科学研究科

(Graduate School of Mathematical Sciences,

University of Tokyo)

1. 量子群 $SU_q(2)$ と量子等質球面 $\mathbb{T} \backslash SU_q(2)$

1.1. $SU_q(2)$ の定義. 次の関係式をみたす元 x, u, v, y で生成される C^* -環を $A = C(SU_q(2))$ と書き, 「非可換空間」である量子群 $SU_q(2)$ 上の「連続関数環」と理解することにします [Wo1].

$$ux = qxu, \quad vx = qxv, \quad yu = quy, \quad yv = qvy, \quad uv = vu,$$

$$xy - q^{-1}uv = yx - quv = 1, \quad x^* = y, \quad u^* = -q^{-1}v.$$

ここで変形パラメータ q は非零絶対値 1 以下の実数とします. 量子群の元のかげ算, 単位元, そして逆元をとる操作を関数環でとらえる時には, それぞれ余積 δ , 余単位 ε , そして対合射 κ と呼ばれ, $SU_q(2)$ の場合は次で定義されます.

$$\begin{pmatrix} \delta(x) & \delta(u) \\ \delta(v) & \delta(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \otimes 1 & u \otimes 1 \\ v \otimes 1 & y \otimes 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \otimes x & 1 \otimes u \\ 1 \otimes v & 1 \otimes y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon(x) & \varepsilon(u) \\ \varepsilon(v) & \varepsilon(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \kappa(x) & \kappa(u) \\ \kappa(v) & \kappa(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -qu \\ -q^{-1}v & x \end{pmatrix}.$$

$\delta: A \rightarrow A \otimes A$ や $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{C}$ は $*$ -準同型ですが, $\kappa: A \rightarrow A$ は閉作用素で $\kappa(ab) = \kappa(b)\kappa(a)$ と $\kappa(\kappa(a)^*)^* = a$ を満たしています. また, Haar 測度にあたる Haar 状態 $h: C(SU_q(2)) \rightarrow \mathbb{C}$ が存在します. それは, $(\text{id} \otimes h)(\delta(a)) = (h \otimes \text{id})(\delta(a)) = h(a)1$ を満たします. この状態で $C(SU_q(2))$ を GNS 表現して得られる von Neumann 環を $L^\infty(SU_q(2))$ と書きます. 余積は正則な $*$ -準同型として拡張されます. さて, z を一次元トーラス群 $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ の標準的な座標関数としましょう. このとき, $C(SU_q(2))$ の関係式は $x = z, u = v = 0, y = \bar{z}$ としても整合していますから, $*$ -準同型 $\pi_{\mathbb{T}}: C(SU_q(2)) \rightarrow C(\mathbb{T})$ がとれます. これが全射であることは明らかです. さて $\mathbb{T}$ は群なので, $C(\mathbb{T})$ も余積, 余単位, 対合射を持っていますが, $\pi_{\mathbb{T}}$ はそれらを保っていることが重要です. このような状況から, $\mathbb{T}$ が $SU_q(2)$ の部分群であると理解するのが適当でしょう.

1.2. $\mathbb{T} \backslash SU_q(2)$ の定義. この時, 商空間 $\mathbb{T} \backslash SU_q(2)$ を定義できます. すなわち, $(\text{ev}_z \circ \pi_{\mathbb{T}} \otimes \text{id}) \circ \delta$ は $C(SU_q(2))$ への $z \in \mathbb{T}$ の作用となり, その固定点環を $C(\mathbb{T} \backslash SU_q(2))$ と書きます. $\mathbb{T} \backslash SU_q(2)$ をここでは, 量子等質球面と呼ぶことにします. また $L^\infty(SU_q(2))$ の中で弱閉包をとったものは $L^\infty(\mathbb{T} \backslash SU_q(2))$ と書きます. $C(\mathbb{T} \backslash SU_q(2))$ は Podleś が発見した量子球面系の一つです. 今, $C(\mathbb{T} \backslash SU_q(2)) \subset C(SU_q(2))$ は部分環ですが, ここに余積 δ を作用しても大域的に不変になります, つまり, $\delta(C(\mathbb{T} \backslash SU_q(2))) \subset C(\mathbb{T} \backslash SU_q(2)) \otimes C(SU_q(2))$ が成り立ちます. この状況は量子群 $SU_q(2)$ が量子等質球面 $\mathbb{T} \backslash SU_q(2)$ に右移動作用を起こしているとみることができます. この作用を $\alpha: C(\mathbb{T} \backslash SU_q(2)) \rightarrow C(\mathbb{T} \backslash SU_q(2)) \otimes C(SU_q(2))$ と書くこ

とにします. von Neumann 環の話にした方が調べやすいので改めて $\alpha: L^\infty(\mathbb{T} \setminus SU_q(2)) \rightarrow L^\infty(\mathbb{T} \setminus SU_q(2)) \otimes L^\infty(SU_q(2))$ とし, 今回はこの α の性質を調べることを目標とします.

まず $L^\infty(SU_q(2))$ が $L^\infty(\mathbb{T}) \otimes B(\ell_2)$ であることを見ましょう. $L^\infty(\mathbb{T}) \otimes B(\ell_2)$ の元 x', v', u', y' を次のようにおきます.

$$\begin{aligned} x' &= z \otimes \sum_{k \geq 0} \sqrt{1 - q^{2k+2}} e_{k+1, k}, & u' &= z \otimes \sum_{k \geq 0} -q^k e_{k, k} \\ v' &= \bar{z} \otimes \sum_{k \geq 0} q^{k+1} e_{k, k}, & y' &= \bar{z} \otimes \sum_{k \geq 0} \sqrt{1 - q^{2k+2}} e_{k, k+1}. \end{aligned}$$

すると, これらが $C(SU_q(2))$ の関係式をみたすことから $C(SU_q(2))$ から $*$ -準同型がきます. Haar 状態にあたる状態は, $h = h_{\mathbb{T}} \otimes \text{Tr}_\rho$, $\rho = \sum_{k \geq 0} (1 - q^2) q^{2k} e_{k, k}$ で与えられます. ここで $h_{\mathbb{T}}$ は $C(\mathbb{T})$ の Haar 状態です. Haar 状態の忠実性は, 先の $*$ -準同型が単射であることを導きます. x' たちは $L^\infty(\mathbb{T}) \otimes B(\ell_2)$ を生成しますから, 同型 $L^\infty(SU_q(2)) \cong L^\infty(\mathbb{T}) \otimes B(\ell_2)$ を手に入れました. さらに, この同型は $\mathbb{T}$ による左作用を $L^\infty(\mathbb{T})$ 上の回転作用に移し替えます. これにより次が分かります.

Lemma 1.1. $L^\infty(\mathbb{T} \setminus SU_q(2)) \cong B(\ell_2)$.

$L^\infty(\mathbb{T} \setminus SU_q(2))$ の生成元として, $\xi_{-1} = \sqrt{1 + q^2} x v$, $\xi_0 = 1 + (q^{-1} + q) u v$, $\xi_1 = \sqrt{1 + q^2} u y$ がとれます. これを $B(\ell_2)$ で成分表示してみると, 次が得られます.

$$\begin{aligned} \xi_{-1} &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r e_{r+1, r}, & \xi_0 &= \sum_{r=0}^{\infty} (b_r + 1) e_{r, r}, \\ \xi_1 &= \sum_{r=0}^{\infty} -q^{-1} a_r e_{r, r+1}, \end{aligned}$$

ここで, a_r と b_r は次で与えられます.

$$a_r = \sqrt{(1 + q^2)} q^{r+1} \sqrt{1 - q^{2r+2}}, \quad b_r = -(1 + q^2) q^{2r}.$$

2. $L^\infty(\mathbb{T} \setminus SU_q(2))$ の作用込みの行列環近似について

さて, 群が $B(\ell_2)$ に作用するときには, ユニタリで挟んだ形でかけます. 今回もこのような形で書くために, 行列環で $B(\ell_2)$ を近似してみます. 重要な点は, 環を作用込みで近似していくということです. $SU_q(2)$ の既約表現は, $1/2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ でパラメトライズされ, 各 $\nu \in 1/2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $2\nu + 1$ 次元の表現空間 H_ν が対応しています. この既約表現を $V_\nu \in B(H_\nu) \otimes C(SU_q(2))$ とかきましましょう. すると $SU_q(2)$ は行列環 $B(H_\nu)$ に $\text{Ad } V_\nu$ で作用しています. 今, 埋め込み $H_\nu \subset \ell_2$ を H_ν の最低ウェイトベクトルを 0 番目において, 順々に 2ν までおくことで定めます. すると, これに添った非単位的埋め込み $B(H_\nu) \subset B(\ell_2)$ を手に入れます. もともとユニタリであった V_ν は, 今は等距離作用素です. このとき, 次がなりたちます.

Proposition 2.1. 任意の $x \in B(\ell_2)$ に対して, $\alpha(x) = \text{s-lim}_{\nu \rightarrow \infty} V_\nu(x \otimes 1)V_\nu^*$.

この V_ν がユニタリに強収束していればうまい話ですが、実際にはそうなっていません。実際に、 $[V_\nu]_{r,s}$ の項の中に $y^{(2\nu-r-s)}$ が入っています。これはだいたい片側シフトのアジョイントであり、とくに全部 0 に収束しています。そこで、この収束を食い止めるために、シフトを何個かかけることを考えます。 S を片側シフトとしましょう。このとき、次の作用素を定義します (本当に強収束していることはそれほど明らかなことではないです)。

$$U_k = s\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} V_\nu(1 \otimes S^{2\nu-k}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

U_k は次のような性質をもつ作用素です。

Lemma 2.2. $\{U_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は等距離作用素の族で、像空間は増大している、すなわち、 $\dots \subset \text{ran } U_{-1} \subset \text{ran } U_0 \subset \text{ran } U_1 \subset \dots$ 。さらに、 $s\text{-}\lim_{k \rightarrow -\infty} U_k U_k^* = 0$, $s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \text{ran } U_k U_k^* = 1$ がなりたつ。

射影 $e_k = U_k U_k^*$ を定め、作用素 w_k を次で与えます。

$$w_k = \begin{cases} (e_k - e_{k-1})U_k(1 \otimes S^{*(-2k-1)}), & k < 0, \\ (e_k - e_{k-1})U_k(1 \otimes S^{*2k}), & k \geq 0. \end{cases}$$

ここで、 $2k$ や $2k+1$ が現れたのは、全単射 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を一つ作る必要があったからです。全単射ができればこのようなものでなくてもかまいません。最終的に、 $W = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k$ と定めます。各 w_k の始空間と終空間が直行しているので、この和は強位相で収束します。 W が求めたい一つの作用素です。

Proposition 2.3. $W \in B(\ell_2) \otimes L^\infty(SU_q(2))$ はユニタリで、任意の $x \in B(\ell_2)$ に対して $\alpha(x) = W(x \otimes 1)W^*$ を満たす。

このような W は $L^\infty(SU_q(2))$ のユニタリ分の抽出の自由度を持っています。すなわち、 W' も上の関係式を満たせば、ユニタリ $u \in L^\infty(SU_q(2))$ が存在して、 $W' = W(1 \otimes u)$ となります。

3. 2-コサイクル Ω

さて、 α は作用なので、 $(\alpha \otimes \text{id}) \circ \alpha = (\text{id} \otimes \delta) \circ \alpha$ を満たすことから、 $[W_{23}^* W_{12}^* (\text{id} \otimes \delta)(W), x \otimes 1 \otimes 1] = 0$ が任意の $x \in B(\ell_2)$ について成り立ちます。よって、次のようなユニタリ $\Omega \in L^\infty(SU_q(2)) \otimes L^\infty(SU_q(2))$ をとれます。

$$1 \otimes \Omega = W_{23}^* W_{12}^* (\text{id} \otimes \delta)(W).$$

すると、 Ω は次の 2-コサイクル関係式をみたします。

$$(\Omega \otimes 1)(\delta \otimes \text{id})(\Omega) = (1 \otimes \Omega)(\text{id} \otimes \delta)(\Omega).$$

$SU_q(2)$ の既約表現は有限次元であるという結果から、 Ω は決してコバウンダリではありません。このコサイクルで余積をねじったものを δ_Ω と書きます。つまり $x \in L^\infty(SU_q(2))$ に対して、 $\delta_\Omega(x) = \Omega \delta(x) \Omega^*$ とします。するとこれは $(\delta_\Omega \otimes \text{id}) \circ \delta_\Omega = (\text{id} \otimes \delta_\Omega) \circ \delta_\Omega$ を満たすので、新しい余積となります。これで、「量子半群」 $(L^\infty(SU_q(2)), \delta_\Omega)$ が構成されました。しかしながら、まだあまり面白いことは分かっていません。

Problem 3.1. $(L^\infty(SU_q(2)), \delta_\Omega)$ の面白い性質を見つけよ。

この性質が、ある程度解明できると、次のような場面には効果的かもしれません。今、 $SU_q(2)$ が von Neumann 環 N に作用 α を引き起こしていて、さらに $L^\infty(\mathbb{T} \setminus SU_q(2))$ と同型な部分環 Q を大域的に不変にしておき、 $L^\infty(\mathbb{T} \setminus SU_q(2))$ 上の作用と同じになっているとしましょう。 Q が I 型因子環なので、 $N = Q \otimes Q' \cap N$ と分解します。ここで、先ほどのユニタリ W を使って、 $\beta: Q' \cap N \rightarrow Q' \cap N \otimes L^\infty(SU_q(2))$ を $1 \otimes \beta(x) = W_{1,3}^* \alpha(1 \otimes x) \otimes 1 W_{1,3}$ と定めましょう。すると β は $(\beta \otimes \text{id}) \circ \beta = (\text{id} \otimes \delta_\Omega) \circ \beta$ を満たすので、相対可環子環 $Q' \cap N$ に量子半群 $(L^\infty(SU_q(2)), \delta_\Omega)$ の作用が得られたことになります。

REFERENCES

- [Po1] P. Podleś, *Quantum spheres*, Lett. Math. Phys. **14** (1987), no. 3, 193–202.
- [Wo1] S. L. Woronowicz, *Twisted SU(2) group An example of a noncommutative differential calculus*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **23** (1987), no. 1, 117–181.