

あるバナッハ代数とヤコビの多項式

東北大理 猪狩 博

§ 1. 序

始めに Gegenbauer 多項式 のよく知られてゐるいくつかの
事柄を述べる (例えは [3], [4], [10] など参照).

degree λ の Gegenbauer 多項式は

$$(1-2xt+x^2)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\lambda}(x) x^k, \quad -1 < x < 1, \quad -1 \leq t \leq 1$$

とし、これを定義する. $C_k^{\lambda}(x)$ はまた

$$(1) \quad C_k^{\lambda}(x) = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2}) \Gamma(2\lambda + k)}{\Gamma(\lambda + k + \frac{1}{2}) \Gamma(2\lambda)} \cdot \frac{(-1)^k}{2^k k!} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}} \cdot \frac{d^k}{dx^k} (1-x^2)^{\lambda + k - \frac{1}{2}}$$

と表わされ、これと直交関係

$$(2) \quad \int_{-1}^1 C_k^{\lambda}(x) C_l^{\lambda}(x) (1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} dx = \frac{\pi \Gamma(2\lambda + k)}{2^{2\lambda - 1} k! (k + \lambda) \Gamma^*(\lambda)} \delta_{kl}$$

をもち、 δ_{kl} は Kronecker の記号である. 関係式 (2)

によつて $C_k^{\lambda}(x)$ を定義してゐることは、すなわち、 $\{C_k^{\lambda}\}$ は、

$1, t, t^2, \dots$ を内積 $\int_{-1}^1 f(t) g(t) (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt$ に関して
Gram-Schmidt の方法で直交化したものをとる, 適当な定数
倍をして (2) が成り立つようにしておく.

以下 $\lambda = (n-2)/2$, $n = 3, 4, \dots$ とする. 今, $\varphi(t)$ を
区間 $[-1, 1]$ 上の関数とすれば, $\varphi(\xi \cdot \eta)$ は $\mathbb{R}^n$ の単位球面 S^{n-1}
上の関数となる, ここに $\eta = (0, \dots, 0, 1) \in S^{n-1}$ である. 従
て $d\xi$ を S^{n-1} 上の正規化したルベーグ測度とすれば

$$\int_{S^{n-1}} \varphi(\xi \cdot \eta) d\xi = c_\lambda \int_{-1}^1 \varphi(t) (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt$$

が成り立つ, ここに $c_\lambda = 2^{2\lambda-1} \lambda \Gamma^2(\lambda) / \pi \Gamma(2\lambda)$ である. ま
た $SO(n)$ を $\mathbb{R}^n$ の回転群, du をその上の正規化したハール
測度とすれば S^{n-1} 上の関数 f に対して

$$\int_{S^{n-1}} f(\xi) d\xi = \int_{SO(n)} f(u\xi_0) du, \quad \xi_0 \in S^{n-1}$$

である. $SO(n-1)$ は η を変えたりする $SO(n)$ の部分群と
みることができる. $SO(n)$ 上の関数 F は, すべての u, v_1, v_2
 $\in SO(n-1)$ に対して $F(v_1 u v_2) = F(u)$, $u \in SO(n)$ が成りた
つとき帯球関数であるといわれる. そのときは $[-1, 1]$ 上の
関数 φ がとれて $F(u) = \varphi(u \cdot \eta)$ とかける, 並に明らかであ
る. 従, て

$$(3) \quad \int_{SO(n)} F(u) du = c_\lambda \int_{-1}^1 \varphi(t) (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt.$$

さて, H_n^k を n 変数 k 次同次調和多项式の作る空間とすると,
 $Y_n^k(u^{-1}\xi) = Y_n^k(\xi)$ for all $\xi \in S^{n-1}$, $u \in SO(n-1)$ なる元は定数
 倍を除いて唯一存在する, として $Y_n^k(\xi) = C_k^\lambda(\xi \cdot D) / C_k^\lambda(1)$
 である: とかす。 $T_n^k \in T_n^k(u) F(v) = F(u^{-1}v)$, u, v
 $\in SO(n)$ によって定義され H_n^k 上の表現とすると, $\{T_n^k\}_{k=0}^\infty$
 は完備既約ユニタリ表現となる。特に帯球関数 $F(u) =$
 $\varphi(u \cdot D) \in T_n^k = (t_{ij}^{n,k})$ をフーリエ展開すると

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k c_k^\lambda \frac{C_k^\lambda(t)}{C_k^\lambda(1)}, \quad c_k^\lambda = C_\lambda \int_{-1}^1 \varphi(t) \frac{C_k^\lambda(t)}{C_k^\lambda(1)} (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt$$

となる, $t_{ij}^{n,k}(u) = Y_n^k(u \cdot D)$, $c_{ij}^{n,k} = 0$ (i, j) $\neq (0, 0)$ かつ $i \neq j$
 あり, $d_k = \dim H_n^k = \Gamma(k+n-2)(2k+n-2) / \Gamma(n-1)\Gamma(k+1)$
 である。

$[-1, 1]$ 上の関数 φ , ψ に対して積 $\varphi * \psi$ を

$$(4) \quad (\varphi * \psi)(u \cdot D) = \int_{SO(n)} \varphi(v \cdot D) \psi(uv^{-1} \cdot D) dv,$$

$$\|\varphi\| = C_\lambda \int_{-1}^1 |\varphi(t)| (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt$$

とすとき

$$(5) \quad \|\varphi * \psi\| \leq \|\varphi\| \|\psi\|$$

は明らかである, 更に

$$(6) \quad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k a_k \frac{C_k^\lambda(t)}{C_k^\lambda(1)}, \quad \psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k b_k \frac{C_k^\lambda(t)}{C_k^\lambda(1)}$$

とすれば

$$(\varphi * \psi)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k a_k e_k \frac{C_k^\lambda(t)}{C_k^\lambda(1)}$$

がえられる。 $L^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})} = \{ \varphi : \|\varphi\| < \infty \}$ とおくと上のことから次の定理が容易に示される。

定理1 ([7])。 $L^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}$ は可換、単純、正則、単位元のバナー代数であり、その極大イデアルの空間 $\mathcal{M}$ は $\{0, 1, 2, \dots\}$ と同型である。 $\varphi \in L^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}$ に対してその Fourier-Gelfand 変換は、 $\hat{\varphi}(k) = a_k$, $k \in \mathcal{M}$ で与えられる、すなわち a_k は (6) で与えられたものである。

今では $\lambda = (n-2)/2$, $n = 3, 4, \dots$ としたけれども上の定理は $\lambda \geq 0$ に対して成り立つ ($\lambda = 0$ のときは $L'(0, \pi)$ の関数の cosine 級数展開に他ならない) ことがわかってゐる。定理1から Gegenbauer 多項式展開に対して群代数で生じたような問題が自然に起こるが、 $\lambda \geq 1/2$ あるいは $\lambda > 0$ に対して、それは $L'(-\pi, \pi)$ の場合よりむしろ単純多形で殆んどすべて解決されている。また級数論的問題は $L^p(-\pi, \pi)$ の関数の Fourier 展開の問題に殆んどすべて帰着させることが出来る、この方面に関しては, Askey, Askey-Wainger,

Hirschman 氏との研究がある。また其係数関数もある意味で定義できる ([9] 参照)。

§ 2. $\text{degree}(\alpha, \beta)$ のヤコビ多項式は

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(t) = (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^{k+\alpha} (1+t)^{k+\beta}], \alpha, \beta > -1$$

により定義される。ヤコビ多項式は測度 $(1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt$ に就いて通常の直交系である。Gegenbauer 多項式のと類似の結果が成り立つことが知られている。しかし特別の (α, β) には convolution の定義が単純にはおこなわれる計算は煩雑である。

$$L = L^{(\alpha, \beta)} \quad \varepsilon$$

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_{(\alpha, \beta)} = c \int_{-1}^1 |\varphi(t)| (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt < \infty$$

ある関数 φ 全体の集合とする、 $c = 1/c = c_{(\alpha, \beta)} = \Gamma(\alpha + \beta + 2) / 2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)$ である。 $\varphi \in L$ に対してそのフーリエ展開を $R_k(t) = R_k^{(\alpha, \beta)}(t) = P_k^{(\alpha, \beta)}(t) / P_k^{(\alpha, \beta)}(1)$ とおいて

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k a_k R_k(t)$$

により定義する、 $c = 1/c = a_k = c \int_{-1}^1 \varphi(t) R_k(t) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt$,
 $d_k = (2k + \alpha + \beta + 1) \Gamma(k + \alpha + \beta + 1) \Gamma(\beta + 1) \Gamma(k + \alpha + 1) [\Gamma(k + \beta + 1)$

$\Gamma(\alpha + \beta + 2) \Gamma(k+1) \Gamma(\alpha+1)]^{-1}$ である.

$\varphi(t) = \sum d_k e_k R_k(t)$ とするとき $\varphi * \varphi$ を形式的に

$\sum d_k a_k e_k R_k(t)$ によって定義する. [1] によって次の定理は明かである.

定理 2. $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ とするとき $L = L^{(\alpha, \beta)}$ は定理 1 と同様の性質をもつ.

今 μ を $[-1, 1]$ 上の有界な測度とする. μ の Fourier 係数

$$\mu_k = \int_{-1}^1 R_k(t) d\mu(t)$$

によつて定義する. μ_k が 0 と 1 としか値をとさざるとき μ は中等であるといわれる.

定理 3. $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, μ を $[-1, 1]$ 上の有界な測度とする. もし $\alpha > \beta$ ならば, μ が中等である必要十分条件は $\mu_k = 0, 1$ で十分大なる k に対して定数値をとることである. $\alpha = \beta > -1/2$ ならば, 必要十分条件は, $\mu_k = 0, 1$ で十分大なる k に対して周期 2 をもつことである.

系 4. $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $\alpha > -1/2$ ならば E が Sidon 集合で

あるための必要十分条件は E が有限集合であることである。

定理 3, 系 4 は, $L^{(-1/2, -1/2)}$ は通常の cosine 展開に対応するから, $\alpha = \beta = -1/2$ のときは成り立たない。作用素数 $\alpha = \beta = -1/2$ のときは「解析的」によって特徴づけられるが, $\alpha = \beta > -1/2$ (より一般にしてもよい) のときは通常の微分可能性である。

次に $L^{(\alpha, \beta)}$ の dual を考えよう。 $R_m(t) R_n(t) \in R_k(t)$ で展開すると,

$$R_m(t) R_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k, m, n) d_k R_k(t)$$

と書く。 [6] にあ, $\alpha \geq \beta \geq -1$, $\alpha + \beta + 1 \geq 0$ ならば

$g(k, m, n) \geq 0$ であるから $1 = \sum_{k=0}^{\infty} |g(k, m, n) d_k|$ と書く。

$A = A^{(\alpha, \beta)}$ と複素数列 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ と

$$\|a\| = \|a\|_{(\alpha, \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$$

のものの全体とする。 $a = \{a_k\}$, $l = \{l_k\}$ に対して

$$a * l = \left\{ \sum_{m, n=0}^{\infty} g(k, m, n) d_k a_m l_n \right\}_{k=0}^{\infty}$$

と定義すると A は可換, 単位元をもつバナッハ代数となる。

定理 5. $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha + \beta + 1 \geq 0$, $\alpha \geq -1/2$ とすれば,
 A の極大イテッルの空間 M は閉区間 $[-1, 1]$ と homeomorphic
 で $a = \{a_m\} \in A$ の Fourier-Gelfand 変換は p のべき項の
 展開

$$\hat{a}(M_x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m R_m(x)$$

で与えられ, $x = x(M_x)$ は x に対応する極大イテッルである.
 証明は [8] にある.

定理 6. $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $\alpha > -1/2$ とするとき $[-1, 1]$ の閉
 集合 E が Helson 集合であるための必要十分条件は E が有限
 集合であることである.

証明. E が有限集合なら Helson 集合であることは明らかで
 ある. 今無限 Helson 集合があるとする. 部分集合を考えて
 それに唯一つの集積点 x_∞ をもち可付番であるとしてよい. 従
 って $\{x_1, x_2, \dots, x_\infty\}$ とする. 定義から $\{a_m\} \in A$ が存在
 して

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m R_m(x_n) = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n=1, 2, \dots, \infty.$$

最初に $x_\infty = 1$ とする. $4(1-x_{n+1}) < 1-x_n$ とする.

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (-1)^n [R_m(x_n) - R_m(x_\infty)] = \frac{1}{n}$$

$$よ'' \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^N (-1)^n [R_m(x_n) - R_m(x_{\infty})] = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n},$$

とすると $R_m(x_n) - R_m(x_{\infty}) = O(m^2(1-x_n))$, $R_m(x_n) = O(m^{-(\alpha+\frac{1}{2})}(1-x_n)^{-(\alpha+\frac{1}{2})/2})$ であるから $k = k_m$ と $1-x_{k+1} < m^{-2} \leq 1-x_k$ となるから n とすると,

$$\sum_{k+1}^N |R_m(x_n) - R_m(x_{\infty})| = O(1), \quad \sum_0^k |R_m(x_n)| = O(1)$$

となる、これ一行の式の右辺 $\rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$) となることは矛盾である。
 $x_{\infty} = -1$ のときも同様である。

最後に $\{x_n\}$ が $-1, 1$ と距離を ϵ だけとることを考えよう。このときは 定数 $C > 0$ が存在して

$$\sup_m \left| \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n R_m^{(\alpha, \beta)}(x_n) \right| > C \sum_{n=1}^{\infty} |\ell_n|$$

となることが dual の論法と測度 $\sum \ell_n \delta_{x_n}$ を考えれば出る。
 $R_m(x_n) = O(m^{-\alpha-1/2})$ であるから $N > 0$ が存在して

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n R_m(x_n) \right| < \frac{C}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\ell_n|, \quad m > N$$

一方 non-zero 行列 $\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n R_m(x_n) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N$ であることがとれる。矛盾。

定理 7. $\alpha \geq \beta \geq -1/2, \alpha \geq 1/2$ ならば各点 $\{x_j\}, -1 <$

$p < 1$ の非 S 集合である。

証明は $\mathbb{R}^3$ に対して Schwartz の方法を用いる。

文 献

- [1] R. Askey and S. Wainger, A convolution structure for Jacobi series, Math. Res. Cent. tech. rep., 1967.
- [2] R. Askey and S. Wainger, A dual convolution structure for Jacobi polynomials, Orth. Expansion and their Conti. Analog., 1968.
- [3] S. Bochner, Positive zonal functions on spheres, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. 40 (1954) 1141-47.
- [4] R. R. Coifman and G. Weiss, Representations of compact groups and spherical harmonics, Enseig. Math.
- [5] C. Dunkl, Operators and harmonic analysis on the sphere, Trans. A. M. S., 125 (1967), 250-263.
- [6] G. Gasper, Linearization of the product of Jacobi polynomials, I, II to appear.
- [7] I. I. Hirschman, Jr, Harmonic analysis and ultraspherical polynomials, Proc. Conf. on Harmonic Analysis, Cornell 1956.

- [8] S. Igari and Y. Uno, Banach algebra related to the Jacobi polynomials, Tôhoku M. J. 21 (1969) 678-683 with its
Corrector to it.
- [9] B. Muckenhoupt and E. M. Stein, Classical expansions
and their relation to conjugate harmonic functions, Trans.
A. M. S., 118 (1965) 17-92.
- [10] N. J. Vilenkin, Special functions and the theory of group
representations, A. M. S. transl. 1968.