

On the equivariant homotopy of Stiefel manifolds

山口大 理 小宮克弘

G をコンパクト Lie 群とする。 Λ を実数体 $\mathbb{R}$, 複素数体 $\mathbb{C}$ または四元数体 $\mathbb{Q}$ とし, E を Λ 上の G の表現とする。ただしここで考える表現は, $\Lambda = \mathbb{R}$ のときは orthogonal, $\Lambda = \mathbb{C}$ のときは unitary, $\Lambda = \mathbb{Q}$ のときは symplectic であるものとする。 $V_m^\wedge(E)$ を E における orthonormal m -frame の全体より成る Stiefel manifold とする。 $m=1$ のとき, これは E の単位球面 $S(E)$ である。 orthonormal m -frame $(v_1, \dots, v_m)$ および $g \in G$ に対して, $(gv_1, \dots, gv_m)$ も orthonormal m -frame になる。このことより, $V_m^\wedge(E)$ は smooth G -manifold になることがわかる。

F を G のもうひとつの表現とする。 G -map の G -homotopy set $[S(E), V_m^\wedge(F)]_G$ について, 二, 三考えてみたことを以下に報告したい。

§ 1. 結果

$m=1$ のときは Rubinsztein の仕事 [1] がある。その結果を先ず紹介する。

G の部分群 H に対し, $N(H)$ を normalizer, (H) を conjugacy class とする。 G -space X に対し, $x \in X$ にかける isotropy subgroup を G_x で表す。 (G_x) を orbit type という。

$$X^H = \{ x \in X \mid H \subset G_x \},$$

$$X_H = \{ x \in X \mid H = G_x \},$$

$$X_{(H)} = \{ x \in X \mid (H) = (G_x) \}.$$

とする。 $\mathcal{M}(E)$ を $S(E)$ 上に現れる orbit type の全体とし,

$$\mathcal{M}(E, F) = \left\{ (H) \in \mathcal{M}(E) \mid \begin{array}{l} N(H)/H \text{ は finite} \\ (H) \not\subset (K) \text{ for } \forall (K) \in \mathcal{M}(F) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{M}_0(E, F) = \{ (H) \in \mathcal{M}(E, F) \mid \dim_{\mathbb{R}} E^H = 1 \}$$

$$\mathcal{O}(E, F) = \left\{ ((H), \alpha) \mid \begin{array}{l} (H) \in \mathcal{M}(E, F) \\ \alpha \text{ は } S(E)_{(H)}/G \text{ の連結成分} \end{array} \right\}$$

とする。さらに, free abelian group $A'(E, F)$ を

$$A'(E, F) = \bigoplus_{((H), \alpha) \in \mathcal{A}(E, F)} \mathbb{Z}_{((H), \alpha)}$$

と定める。ここに、すべての $((H), \alpha) \in \mathcal{A}(E, F)$ に対して、 $\mathbb{Z}_{((H), \alpha)} = \mathbb{Z}$ である。

$$P_{((H), \alpha)} : A'(E, F) \rightarrow \mathbb{Z}_{((H), \alpha)}$$

を projection とし、

$$A(E, F) = \left\{ a \in A'(E, F) \mid \begin{array}{l} P_{((H), \alpha)}(a) = 0 \text{ or } -1 \\ \text{for } \forall (H) \in \mathcal{H}_0(E, F) \end{array} \right\}$$

と定める。

定理1 (Rubinsztein). コンパクト Lie 群 G の表現 E, F に対して、全単射

$$\Psi : [S(E), S(E \oplus F)]_G \rightarrow A(E, F)$$

が存在する。とくに、 $\dim_{\mathbb{R}} E^G \geq 2$ のときは

$[S(E), S(E \oplus F)]_G$ は group structure をもち、 Ψ は group isomorphism となる。

$j : S(E \oplus F) \rightarrow \bigvee_m^{\wedge} (E \oplus F \oplus \wedge^{m-1})$ を任意の $v \in S(E \oplus F)$ に対し、 $j(v) = (v, e_1, \dots, e_{m-1})$ と定める。ここに、

$\Lambda^{m-1} = \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda$ ($m-1$ 個) でのこの上の G -action は trivial, $(e_1, \dots, e_{m-1})$ は Λ^{m-1} の標準的な orthonormal $(m-1)$ -frame である。この j は G -map であるから,

$$j_* : [S(E), S(E \oplus F)]_G \rightarrow [S(E), V_m^\Lambda(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})]_G$$

を induce する。この j_* を経由することにより

$[S(E), V_m^\Lambda(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})]_G$ に対して Rubinsztein の結果と同様の結果が得られる。

定理 2. コンパクト Lie 群 G の Λ 上の表現 E, F に対して,

(a). j_* は全射である。

(b). 次の (i) 又は (ii) の場合, j_* は単射である:

(i) $\Lambda = \mathbb{R}$, 任意の $(H) \in \mathcal{H}(E, F)$ に対して $S(E)_{(H)}/G$ は連結, $\dim_{\mathbb{R}} E^H$ は奇数。

(ii) $\Lambda = \mathbb{C}$ 又は $\mathbb{Q}$, 任意の $(H) \in \mathcal{H}(E, F)$ に対して $S(E)_{(H)}/G$ は連結。

(c). $\dim_{\mathbb{R}} E^G \geq 2$ ならば, $[S(E), V_m^\Lambda(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})]_G$ は group structure をもち, j_* は group homomorphism。

次のことが知られている:

命題3 (Rubinsztein). 次の (i) 又は (ii) のとき, 任意の $(H) \in \mathcal{H}(E)$ に対し, $S(E)_{(H)}/G$ は連結である:

- (i). G が abelian で, $\dim_{\mathbb{R}} E^G \neq 1$.
- (ii). G が finite で, G の表現 E' が存在して $E = E' \oplus E'$.

定理1

定理2と命題3より,

定理4. 次の (i) 又は (ii) のとき, $[S(E), V_m^{\wedge}(E \oplus F \oplus \wedge^{m-1})]_G$ と $A(E, F)$ は集合として同型である:

- (i). $\Lambda = \mathbb{R}$, G が abelian, $\dim_{\mathbb{R}} E^G \neq 1$, 任意の $(H) \in \mathcal{H}(E, F)$ に対し $\dim_{\mathbb{R}} E^H$ は奇数.

- (ii). $\Lambda = \mathbb{C}$ 又は $\mathbb{Q}$, G が abelian 又は finite.

さらに, $\dim_{\mathbb{R}} E^G \geq 2$ であれば $[S(E), V_m^{\wedge}(E \oplus F \oplus \wedge^{m-1})]_G$ と $A(E, F)$ は群として同型である.

以下に定理2の証明の概略を示す.

§2. 準備

M をコンパクトな smooth free G -manifold で $\dim M \leq \dim S(E \oplus F)$ なるものとする. 次のふたつ

の fibre bundle を考える :

$$B = M \times_G V_m^\wedge(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1}) \rightarrow M/G$$

$$B' = M \times_G S(E \oplus F) \rightarrow M/G$$

j より induce される bundle map を $\tilde{j}: B' \rightarrow B$ とする。
このとき, Steenrod [2] の obstruction theory を使,
次の補題を得る。

補題 5. $N = M/G$ とし, $\iota: N \rightarrow B$ を B の cross section とする。 $P: \partial N \times [0,1] \rightarrow B|_{\partial N}$ を cross section の homotopy で $P_0 = \iota|_{\partial N}$, $P_1(\partial N) \subset \tilde{j}(B')$ とする。
このとき, P は次のような homotopy $Q: N \times [0,1] \rightarrow B$ に拡張される: $Q_0 = \iota$, $Q_1(N) \subset \tilde{j}(B')$ 。

G -map: $M \rightarrow V_m^\wedge(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})$ と B の cross section とは one-to-one, onto に対応するから,
補題 5 より,

補題 6. $f: M \rightarrow V_m^\wedge(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})$ を G -map,
 $P: \partial M \times [0,1] \rightarrow V_m^\wedge(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})$ を, $P_0 = f|_{\partial M}$,
 $P_1(\partial M) \subset j(S(E \oplus F))$ なる G -homotopy とする。こ
のとき, P は次のような G -homotopy

$Q: M \times [0, 1] \rightarrow V_m^\wedge(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})$ に拡張される:

$$Q_0 = f, \quad Q_1(M) \subset j(S(E \oplus F)).$$

§3. j_* が全射であることの証明

$f: S(E) \rightarrow V_m^\wedge(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1})$ を任意の G -map とする.

$\mathcal{M}(E)$ の各元に番号をつけて,

$$\mathcal{M}(E) = \{ (H_1), (H_2), \dots, (H_a) \}$$

$$i < k \Rightarrow (H_i) \not\subset (H_k)$$

となるようにする.

補題6 および帰納法を使って次の補題が得られる:

補題7. $S(E)$ のコンパクトな smooth G -submanifolds

$M_1, \dots, M_a$ で次をみたすものが存在する:

$$\dim M_i = \dim S(E) \text{ for } i = 1, \dots, a$$

$$M_1 \supset S(E)_{(H_1)}$$

$$M_i \supset M_{i-1} \cup S(E)_{(H_i)} \text{ for } i = 2, \dots, a$$

さらに, G -homotopies $R^{(1)}, \dots, R^{(a)}$ で次をみたすものが存在する:

$$R^{(i)}: M_i \times [0, 1] \rightarrow V_m^\wedge(E \oplus F \oplus \Lambda^{m-1}) \text{ for } i = 1, \dots, a$$

$$R_0^{(i)} = f|_{M_i} \text{ for } i = 1, \dots, a$$

$$R_1^{(i)}(M_i) \subset j(S(E \oplus F)) \text{ for } i = 1, \dots, a$$

$$R^{(i)}|_{M_{i-1} \times [0,1]} = R^{(i-1)} \quad \text{for } i=2, \dots, a$$

$M_a = S(E)$ であるから, この補題より j_* が全射であることがわかる。

§4. j_* が単射であることの証明

次の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccc} [S(E), S(E \oplus F)]_G & \xrightarrow{j_*} & [S(E), V_m^\wedge(E \oplus F \oplus \wedge^{m-1})]_G \\ \downarrow \gamma_1^H & & \downarrow \gamma_2^H \\ [S(E^H), S(E^H \oplus F^H)] & \xrightarrow{j_*^H} & [S(E^H), V_m^\wedge(E^H \oplus F^H \oplus \wedge^{m-1})] \end{array}$$

ここに, 下列のふたつの $[,]$ は non-equivariant homotopy sets, γ_1^H, γ_2^H は制限写像, j_*^H は j_* と同様にして得られる写像。今, $\alpha, \beta \in [S(E), S(E \oplus F)]_G$ に対して $j_*(\alpha) = j_*(\beta)$ とする。定理2の (i) 又は (ii) のとき, 任意の部分群 H に対して, j_*^H は単射であるから, $\gamma_1^H(\alpha) = \gamma_1^H(\beta)$ である。このとき, Rubinsztein の結果により, $\alpha = \beta$ となる。よって, 定理2の (i) 又は (ii) のとき, j_* は単射である。

§5. Group structure に關して

$\dim_{\mathbb{R}} E^G \geq 2$ かつ $[S(E), S(E \oplus F)]_G$ に対する Rubinsztein の方法と同様にして, $[S(E), V_m^{\wedge}(E \oplus F \oplus \wedge^{m-1})]_G$ も group structure を持つことがわかる。さらにこのとき, j_* は group homomorphism になる。

文 献

- [1]. R. L. Rubinsztein; On the equivariant homotopy of spheres, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 134 (1976).
- [2]. N. Steenrod; *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951.