

非線形双曲型方程式系の混合問題について.

筑波大学数学系 柴田良弘 (YOSHIHIRO SHIBATA)

[序] ここでは, Zheng Songmu (复旦大学数学系, 上海市, 中国) との共同研究による, 論文 [1] の内容を報告いたします. この論文では, 境界条件に消散項のついた, Neumann 型の境界値問題と, nonlinear acoustic wave eq. や nonlinear elastodynamics について論じており, 特に, 十分小かつ滑らかな data に対し, global solution が存在することを示しました. この種の研究は, 空間 1 次元の場合はかなり前から色々と進んできましたが, 2 次元以上の場合は, Quint[2] の独立の仕事 (nonlinear acoustic wave eq. の特別な場合) 以外には我々の知る範囲ではみあたりません (1 次元の論文のリストは [1] を参照して下さい)。

松村氏 [3] の仕事等によく知られている様に, 小さな解を扱うには, 線形化した方程式の解の減衰度を正確に求めることが, 主な仕事となります。

local solution の存在は, 柴田, 中村 の共著 [4] で知られていまあるので, 線形化方程式の解の減衰を使って, この local solution の a priori estimate を得, 常微分方程式論の場合と同様にして, 解が $t = \infty$ まで延長できることを云います。

§ 1. 問題設定と結果.

次の方程式系を考える。

$$(1) \begin{cases} \partial_t^2 \vec{u} - \sum_{i=1}^n \partial_i (\vec{a}_i(\Lambda \vec{u})) = \vec{f} & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \sum_{i=1}^n v_i \vec{a}_i(\Lambda \vec{u}) + \vec{b}(x, \partial_+ \vec{u}) = \vec{g} & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x), \partial_+ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_1(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

ここで, Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域, Γ は Ω の境界で, C^∞ とする。

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, t は時間, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $\partial_+ = \partial/\partial t$,

$v = (v_1, \dots, v_n)$ は Γ の単位外法線を表す。 $\vec{u}$ は λ -row vector function であり, 特に $\lambda = 1$ (scalar case) と $\lambda = n$ の場合のみ考えることにする。

$\Lambda \vec{u}$ は次の様に定義される。

$$(2) \quad \lambda = n \Rightarrow \Lambda \vec{u} = \varepsilon(\vec{u}) = (\varepsilon_{ij}(\vec{u})), \text{ 但し } \varepsilon_{ij}(u) =$$

$$\frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (\vec{u} = {}^t(u_1, \dots, u_n)).$$

$$(2)' \quad \lambda = 1 \Rightarrow \Lambda \vec{u}' = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u) \text{ 但し } \vec{u}' = u \text{ (scalar).}$$

$\vec{a}_i(\Lambda \vec{u}')$, $\vec{b}'(x, \partial \vec{u}')$ は n -row vectors of real-valued functions in C^∞ 又は real scalar-valued functions in C^∞ であり、 $\Lambda \vec{u}' \in \mathbb{R}^{2n} \mid |\Lambda \vec{u}'| \leq U_0$, $\{(x, \partial \vec{u}') \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^l \mid |\partial \vec{u}'| \leq U_0\}$ 上定義されているとする。更に、次の条件を課す。

$\lambda = n$ の場合

$$(A.1) \quad \vec{a}_i = {}^t(a_{i1}, \dots, a_{in}), \quad a_{ipjq} = \partial a_{ip} / \partial \varepsilon_{jq}$$

$$(\Lambda \vec{u}' = (\varepsilon_{pq})) \text{ とおく。 上の } \varepsilon \text{ に対し,}$$

$$(3) \quad a_{ipjq} = a_{p\dot{i}jq} = a_{jq\dot{i}p}.$$

更に、ある定数 $\delta_\Omega > 0$ があって、

$$(4) \quad \sum_{\dot{i}, p, j, q=1}^n a_{ipjq}(\Lambda \vec{u}') \eta_{\dot{i}p} \eta_{jq} \geq \delta_\Omega \sum_{\dot{i}, p=1}^n \eta_{\dot{i}p}^2$$

が $|\Lambda \vec{u}'| \leq U_0$ である任意の $n \times n$ symmetric matrix $\eta = (\eta_{\dot{i}p})$ に対して成立する。

$$(A.2) \quad \vec{b}' = {}^t(b_1, \dots, b_n), \quad b_{ij} = \partial b_i / \partial (\partial u_j) \quad (\vec{u}' = {}^t(u_1, \dots, u_n))$$

とおく。 上の通り、

$$(5) \quad b_{ij} = b_{ji}.$$

更に、ある定数 $\delta_P > 0$ があって、

$$(6) \quad \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, \nabla \vec{u}) \xi_i \xi_j \geq \delta_P |\xi|^2$$

が全ての $x \in P$, $|\nabla \vec{u}| \leq U_0$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ について成
立する。

$l=1$ の場合

$$(A.1)' \quad a_{ij} = \partial \bar{a}_i / \partial (\partial u_j) \quad (\nabla \vec{u} = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u))$$

と置く。このとき,

$$(3)' \quad a_{ij} = a_{ji}$$

$$(4)' \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\nabla \vec{u}) \xi_i \xi_j \geq \delta_\Omega |\xi|^2, \quad \forall |\nabla \vec{u}| \leq U_0, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$$(A.2)' \quad b' = \partial \bar{b} / \partial (\partial \vec{u}) \text{ と置く。このとき,}$$

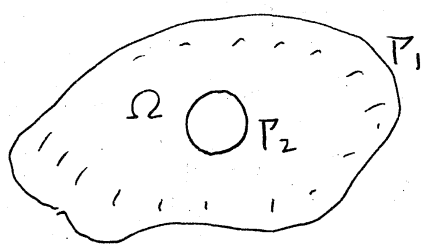
$$(6)' \quad b'(x, \partial \vec{u}) \geq \delta_P, \quad \forall x \in P, \quad \forall |\partial \vec{u}| \leq U_0.$$

the strain tensor が $\varepsilon(\vec{u}) = (\varepsilon_{ij}(\vec{u}))$ ($n \times n$ matrix)
で与えられているときは, 通常の nonlinear elastodynamics
は (3), (4) を満たす。また 通常の nonlinear acoustic
equation も (3)', (4)' の条件を満たす。 (5), (6)
及び (6)' が 境界条件に消散項が付いていることを記述
している。

主要定理. 十分小かつ滑らかな, 初期値 $\vec{u}_0, \vec{u}_1$ について
大域解 $\vec{u}$ が一意的に存在する。 ($\vec{u} \in C^2$)

[註] 詳しい定理の記述をするには、多小記号の準備が必要なので、ここでは省略しました。論文 [1] においては、更に解の $t \rightarrow \infty$ での挙動についても扱っています。

また、 Ω が次の様な形



P_1 と Neumann type
 P_2 と Dirichlet bdy 条件
 (i.e. $u=0$ on P_2)
 を課す。

についても扱っており、この場合は作用系は $\mathbb{R}$ と一般の場合が考えられることも論じておられます。 図

§ 2. 線形方程式系の解の減衰度.

先に述べた様に主要定理を示すには、上記表題の事実を示すことが主な仕事となります。ここでは少し一般化した形で問題設定をし、それについての結果を述べたいと思います。

$$(1) \begin{cases} P_{\Omega}(u) = \partial_t^2 u - \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \partial_i \partial_j u = 0 & \text{in } [0, T] \times \Omega \\ P_T(u) = \sum_{i,j=1}^n v_i A_{ij} \partial_j u + B(x) \partial_t u = 0 & \text{on } [0, T] \times T \\ u(0) = u_0 \quad \partial_t u(0) = u_1 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

を考へよ。 ここで $\underline{u} = {}^t(u_1, \dots, u_m)$, m -row vector
 A_{ij} , $B(x)$ は 各々 $m \times m$ real constant matrices と an
 $m \times m$ matrix of real-valued functions in $C^\infty(\bar{\Omega})$ とす
 る。 更に次の条件を課す。

$$(A.3) \quad {}^t A_{ij} = A_{ji} \quad \text{and} \quad {}^t B(x) = B(x).$$

$$(A.4) \quad \exists \delta_\Omega > 0 \quad \text{and} \quad \exists \delta > 0 \quad \text{s.t.}$$

$$\sum_{i,j=1}^n (A_{ij} \partial_i \underline{u}, \partial_j \underline{u})_{L^2(\Omega)} \geq \delta_\Omega \|\underline{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 - \delta \|\underline{u}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

for $\forall \underline{u} \in H^1(\Omega)$

($(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ は通常 $L^2(\Omega)$ の内積)。

$$(A.5) \quad \sum_{i,j=1}^n (A_{ij} \partial_i \underline{u}, \partial_j \underline{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \text{for } \forall \underline{u} \in H^1(\Omega).$$

$$(A.6) \quad \exists \delta_P > 0 \quad \text{s.t.} \quad B(x) \geq \delta_P \bar{I}_m \quad \text{for any } x \in P$$

($\bar{I}_m$ は $m \times m$ 単位行列)。

以上の仮定の下で次の定理を得る。

定理 L, L' を $2 \leq L' \leq L-4$ なる整数。 u を (1)

の十分滑らかな解とする。 ならば、

$$\left\{ \|\partial_t \underline{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i,j=1}^n (A_{ij} \partial_i \underline{u}(t), \partial_j \underline{u}(t))_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2}$$

$$\leq C(1+t)^{-L'} \left\{ \|\underline{u}_0\|_{H^{L'}(\Omega)} + \|\underline{u}_1\|_{H^{L'-1}(\Omega)} \right\}.$$

(注) $l=1$ の場合は条件 (4)' に代えるれば", $A_{ij} =$

$a_{ij}(0)$ とおいて. ($m=1$)

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(0) \partial_i u(t), \partial_j u(t))_{L^2(\Omega)} \geq \int_{\Omega} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

$l=n$ の場合は条件 (4) と Korn's inequality より, $A_{ij} =$

$(a_{ij}; q(0))$ ($m=n$) とおいて

$$\sum_{i,j=1}^n (A_{ij} \partial_i \vec{u}(t), \partial_j \vec{u}(t))_{L^2(\Omega)} \geq \int_{\Omega} \|\nabla \vec{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

より評価を得る。こゝして, 上の定理は ~~主要定理~~ を証明することになることが出来る。

上の定理を証明するには, パラメーター k をモフ次の定常問題の解の $|k| \rightarrow \infty$ での挙動と, $k=0$ におけるみ1位の極をとる (但し $\lim k \equiv 0$ において) ことを示すことにある:

$$\begin{cases} P_k(0)u = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \partial_i \partial_j u + k^2 u = f & \text{in } \Omega \\ Q_k(0)u = \sum_{i,j=1}^n v_i A_{ij} \partial_j u + \Gamma k B(x)u = g & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

参考文献.

1. Y. Shibata and Zheng Sonbmu: On some nonlinear hyperbolic systems with damping boundary conditions, preprint in 1988.
2. Qin Tiehu: The global smooth solutions of second order quasilinear hyperbolic equations with dissipation boundary condition, Chinese Annals of Math., 9B (3) (1988), 251-269.
3. A. Matsumura: Global existence and asymptotic of the solutions of the second order quasilinear hyperbolic equations with the first-order dissipation, Publ. RIMA, Kyoto Univ., 13 (1977), 349-379.