

Kummer 多様体の定義方程式について

日大理工 佐々木隆二

§0 主たる結果

k を標数が 2 と異なる代数閉体とする。
 K を k 上の Abel 多様体 X の Kummer 多様体、即ち、inverse morphism $\pi: X \rightarrow X$ による、 X の商多様体とし、 M を K 上の ample invertible sheaf とする。
一次系 $\Gamma(K, M^a)$ (a は正整数) により、 π 定義される写像

$$\Phi_M^a: K \longrightarrow \mathbb{P}(\Gamma(K, M^a))$$

に対し、次が与える。

定理 A $a \geq 2$ ならば、像 $\Phi_M^a(K)$ は projectively normal である。もし自然な写像 $\Gamma(K, M) \otimes \Gamma(K, M) \rightarrow \Gamma(K, M^2)$ が全射ならば、 $\Phi_M(K)$ もそうである。

さて、 $S^n \Gamma(K, M^a) \subset \Gamma(K, M^a)$ の n 次対称積とし、 $I_n^{(a)} = \text{Ker} [S^n \Gamma(K, M^a) \rightarrow \Gamma(K, M^{an})]$ とおく。
 $n = a$ とし、 $I_n^{(a)}$ の各元 F は $\mathbb{P}(\Gamma(K, M^a))$ の n 次超曲面 $V(F)$ を定める。

定理 B 以上の記号の下で、

$$\Phi_{M^2}(K) = \bigcap_{F \in I_3^{(a)}} V(F),$$

$$\Phi_{M^a}(K) = \bigcap_{F \in I_2^{(a)}} V(F) \quad (a \geq 3).$$

§1 Abel 多様体の定義方程式

X を代数閉体 k 上定義された Abel 多様体、
 L を X 上の ample invertible sheaf とする。定義方程式
 について、最近の画期的な結果は、次に述
 べる Mumford の定理であるが、その為には定義を
 しよう。

定義 射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ が ideal 論的に、
超曲面 $H_1, \dots, H_m$ の交わり であるとは、次を満
 す事である。

i) $X = \bigcap_{i=1}^m H_i$ (集合論的)

ii) X の各点 x に対し、 x の affine 近傍 $U \subset \mathbb{P}^n$
 で、 $X \cap U \subset U$ の ideal が $H_1, \dots, H_m$ の affine
 equations $f_1, \dots, f_m$ によって生成されるもの
 がある。

定理 (Mumford [5]) $a \geq 4$ のとき、一次系 $\Gamma(X, L^a)$ により定義される写像 $\Phi_a: X \rightarrow \mathbb{P}(\Gamma(X, L^a))$ による像 $\Phi_a(X)$ は ideal 論的に 2 次曲面の交わりである。

この Mumford の結果を巧に使い、関口は次を証明した ([8], [9])。

定理 (関口) $\Phi_3(X)$ は ideal 論的に、3 次曲面の交わりである。

次に問題になるのは、 $I_n^{(a)} = \text{Ker}(S^a \Gamma(X, L^a) \rightarrow \Gamma(X, L^{an}))$ の生成元を系統的に、書きあげることである。それらについては、Riemann 以来、多くの人達の結果があるが、ここでは最近の結果 Mumford [4], [5], Koizumi [3] をあげておくだけにする。

§2 定理 A の証明

X を代数関体 k ($\text{ch } k \neq 2$) 上の Abelian 多様体、 $\pi: X \rightarrow X$ を inverse morphism とし、 M を X の Kummer 多様体 K_X 上の ample invertible sheaf とする。 $L = \pi^* M$ とおく、ただし $\pi: X \rightarrow K_X$ は自然な写像。 π

は自然に $\Gamma(X, L^a)$ (a : 正整数) の自己同型 $[-1]$ を誘導する。引き戻し $\pi^*: \Gamma(K_X, M^a) \longrightarrow \Gamma(X, L^a)$ の像 $\Gamma(X, L^a)_+$ は $\{f \in \Gamma(X, L^a) \mid [-1]f = f\}$ になる。

さて、定理 A は、次の定理 A' の直接の結果である。

定理 A' 以上の記号の下で、 $a \geq 2$ に対し、自然な写像

$$\Gamma(K_X, M) \otimes \Gamma(K_X, M^a) \longrightarrow \Gamma(K_X, M^{a+1})$$

は全射である。

証明. 次の可換図を考える。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(K_X, M) \otimes \Gamma(K_X, M^a) & \longrightarrow & \Gamma(K_X, M^{a+1}) \\ \pi^* \otimes \pi^* \downarrow s & & \downarrow s \pi^* \\ \Gamma(X, L)_+ \otimes \Gamma(X, L^a)_+ & \longrightarrow & \Gamma(X, L^{a+1})_+ \\ \cap & & \cap \\ \Gamma(X, L) \otimes \Gamma(X, L^a) & \longrightarrow & \Gamma(X, L^{a+1}). \end{array}$$

図中、中段の矢印が全射なることを示すのであるが、それには、次の(*)が云えれば良い。

(*) $\varphi_a: \Gamma(X, L)_+ \otimes \Gamma(X, L^a) \longrightarrow \Gamma(X, L^{a+1})$ は全射 ($a \geq 2$)。

実際、(*) を仮定すれば、任意の $f \in \Gamma(X, L^{a+1})_+$ は $\varphi_a(\sum g_i \otimes h_i) = f$ ($g_i \in \Gamma(X, L)_+$, $h_i \in \Gamma(X, L^a)$) なる形

に表わされる。 $f \in \Gamma(X, L^{n+1})_+$ 故 $\varphi_n(\sum g_i \otimes [1]h_i) = f$,
従って $f = \varphi_n(\sum g_i \otimes \frac{h_i + [1]h_i}{2})$ 。

さて (*) を示す為には、次の Lemma を証明する。

Lemma $f: X \rightarrow Y$ を Abel 多様体の isogeny. M を Y 上の ample invertible sheaf とし、 $L = f^*M$ とおく。
すると自然な写像

$$\tau: \Gamma(X, L^2)^{\text{Ker } f} \otimes \Gamma(X, L^n) \longrightarrow \Gamma(X, L^{n+2})$$

は、 $n \geq 3$ のとき全射である、但し $f^*(\Gamma(Y, M^3)) = \Gamma(X, L^2)^{\text{Ker } f}$ とおく。

Lemma の証明. L^{n+2} の Theta 群を $\mathcal{G}(L^{n+2})$ とする (Theta 群の定義等については、[6], [7] を参照されたい)。 τ の像を W とすれば、次の事がいえるは良い (cf [9])。

$$(\#) \begin{cases} \text{剰余体が良なる、任意の良-局所環 } (R, \mathfrak{m}) \\ \text{と、 } \mathcal{G}(L^{n+2}) \text{ の任意の } R\text{-valued point } \lambda \text{ に対し、} \\ U_\lambda[f^*(\Gamma(Y, M^{n+2})) \otimes R] \subset W \otimes R. \end{cases}$$

== 2". U は $\mathcal{G}(L^{n+2})$ の $\Gamma(X, L^{n+2})$ への作用である。

$K(L^{n+2}) = \text{Ker } \phi_{L^{n+2}}$ とおく、但し $\phi_{L^{n+2}}: X \rightarrow \hat{X}$ は

$x \mapsto T_x^* L^{n+2} \otimes L^{-(n+2)}$ で定義される、 X からその dual

$\hat{X}$ への homomorphism。 $j: \mathcal{G}(L^{n+2}) \rightarrow K(L^{n+2})$ は自

然な準同型とし、 $j(\lambda) = u$ とおく。このとき次の可換図を得る。

$$(A) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma(X_S, (L_S)^{n+2}) \simeq \Gamma(X, L^{n+2}) \otimes R & \xrightarrow{T_u^*} & \Gamma(X_S, T_u^*(L_S)^{n+2}) \simeq \Gamma(X_S, (L_S)^{n+2}) \\ f^* \uparrow & & \uparrow f^* \\ \Gamma(Y_S, (M_S)^{n+2}) \simeq \Gamma(Y, M^{n+2}) \otimes R & \xrightarrow{T_{f(u)}^*} & \Gamma(Y_S, T_{f(u)}^*(M_S)^{n+2}) \simeq \Gamma(Y_S, (M_S)^{n+2} \otimes P_{Y,\sigma}) \end{array}$$

ここで P_Y は $Y \times \hat{Y}$ 上の Poincaré invertible sheaf. $\sigma = \phi_{M^{n+2}}(f(u))$
 $P_{Y,\sigma}$ は P_Y の $Y \times \text{Spec } R \xrightarrow{1 \times \sigma} Y \times \hat{Y}$ による制限. $S = \text{Spec } R$,
 $X_S = X \times S$ 等々。一併、次の可換図もえる。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(Y_S, (M_S)^n) \otimes \Gamma(Y_S, (M_S)^{n+2} \otimes P_{Y,\sigma}) & \longrightarrow & \Gamma(Y_S, (M_S)^{n+2} \otimes P_{Y,\sigma}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(Y, M^n) \otimes \Gamma(Y, M^{n+2} \otimes P_{Y,\bar{\sigma}}) & \longrightarrow & \Gamma(Y, M^{n+2} \otimes P_{Y,\bar{\sigma}}) \end{array}$$

ここで $\bar{\sigma}$ は σ の m による reduction modulo m . $\bar{\sigma}$ は合成写像 $\text{Spec}(R/m) \hookrightarrow \text{Spec } R \xrightarrow{\sigma} Y$. 下段の写像は全射 (cf [7]) 故、中山の補題から上段の写像も全射なることがわかる。また $f^*((M_S)^n \otimes P_{Y,\sigma}) \simeq (L_S)^n$ 故、次図も可換である。

$$(B) \quad \begin{array}{ccc} [\Gamma(X, L^2)^{\text{Ker } f} \otimes R] \otimes [\Gamma(X, L^n) \otimes R] & \longrightarrow & \Gamma(X, L^{n+2}) \otimes R \\ f^* \otimes f^* \quad \uparrow & & \uparrow f^* \\ \Gamma(Y_S, (M_S)^n) \otimes \Gamma(Y_S, (M_S)^n \otimes P_{Y,\sigma}) & \longrightarrow & \Gamma(Y_S, (M_S)^{n+2} \otimes P_{Y,\sigma}) \end{array}$$

図 (A), (B) の可換性より (H) がええる。これで Lemma の証明が終る。

定理の証明の続き。次の条件を満たす isogeny $f: X \rightarrow Y$ と、 Y の Kummer 多様体 K_Y 上の ample invertible sheaf M' とが存在する。

$$\text{条件 (i)} \quad K((\pi')^* M') = Y_2 = \{y \in Y \mid 2y = 0\}$$

$$(ii) \quad (f')^* M' \simeq M$$

但し、 $\pi': Y \rightarrow K_Y$ は自然な写像で、 $f': K_X \rightarrow K_Y$ は次の図を可換にするもの：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ K_X & \xrightarrow{f'} & K_Y \end{array} .$$

従って、次の可換図を得る。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, L) & \xleftarrow{f^*} & \Gamma(Y, (\pi')^* M') \\ \cup & & \parallel \text{ (i) より} \\ \Gamma(X, L)_+ & & \Gamma(Y, (\pi')^* M')_+ \\ \pi^* \uparrow & & \uparrow (\pi')^* \\ \Gamma(K_X, M) & \xleftarrow{(f')^*} & \Gamma(K_Y, M') \end{array} .$$

この図式より、 $\Gamma(X, L)_+ \supset f^*(\Gamma(Y, (\pi')^* M'))$ を得る。さらに、 $K((\pi')^* M') = Y_2$ に注意すれば、 $(\pi')^* M' \simeq (L')^2$ なる形となる、 L' は Y 上の ample

invertible sheaf. である。従って Lemma より (*) をえる。
これで定理 A' の証明が終る。

§3 定理 B の証明。

定理の後半も前半と同様に示される故、
前半のみ証明する。§0 の記号を使用する。

$K(\pi^*M) \supset X_2 = \{x \in X \mid 2x = 0\}$ 故、 $\pi^*M \simeq L^2$ なる形に
表わされる。ただし $\pi: X \rightarrow K_x = K$ は自然な写像。
 L は X 上の ample symmetric (即ち $2^*L \simeq L$) invertible
sheaf。このとき isomorphism $\varphi: L \rightarrow 2^*L$ で $\varphi^{\otimes 2}: L^2 \rightarrow 2^*L^2$
が自然な isomorphism になるものがある。

$\varphi^{\otimes b}$ (b : 正整数) : $L^b \rightarrow 2^*L^b \simeq L^b$ が誘導する

$\Gamma(X, L^b)$ の automorphism を $[L]$ と書く。 $\Gamma(X, L^b)_+ =$
 $\{f \in \Gamma(X, L^b) \mid [L]f = f\}$ とおくと、自然な単射

$\pi^*: \Gamma(K, M^b) \rightarrow \Gamma(X, L^{2b})$ により、 $\Gamma(K, M^b)$ と $\Gamma(X, L^{2b})_+$

とが同一視される。 $\mathbb{P}(\Gamma(K, M^b)) = \mathbb{P}(\Gamma(X, L^b)_+)$ の

各点は、 $\Gamma(X, L^b)_+$ 上の non-trivial linear form l で表
わされる。さてその様な l が与えられ、この
 l に対応する $\mathbb{P}(\Gamma(X, L^b)_+)$ の点 $[l]$ が、

$$[l] \in \bigcap_{F \in I_3^{(n)}} V(F)$$

を満すとする。このことは次と同値:

$$\exists \ell^{(3)}: \Gamma(X, L^{12})_+ \longrightarrow k \text{ linear form s.t.}$$

$$\Gamma(X, L^4)_+^{\otimes 3} \longrightarrow \Gamma(X, L^{12})_+$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{Q} & \\ \ell^{\otimes 3} \searrow & & \swarrow \ell^{(3)} \\ & k & \end{array}$$

Lemma $\exists$ linear form $n: \Gamma(X, L^6)_+ \longrightarrow k$ s.t.

$$\Gamma(X, L^6)_+^{\otimes 2} \longrightarrow \Gamma(X, L^{12})_+$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ n^{\otimes 2} \searrow & & \swarrow \ell^{(3)} \\ & k & \end{array}$$

Lemma の証明. $[L] \in \bigcap_{F \in I_3^{(1)}} V(F)$ 故 $[L] \in \bigcap_{F \in I_2^{(1)}} V(F)$.

従, 2 linear form $\ell^{(2)}: \Gamma(X, L^8)_+ \longrightarrow k$ z". 図

$$\Gamma(X, L^4)_+^{\otimes 2} \longrightarrow \Gamma(X, L^8)_+$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \ell^{\otimes 2} \searrow & & \swarrow \ell^{(2)} \\ & k & \end{array}$$

が可換となるものがある。従, 2 linear form

$m: \Gamma(X, L^2)_+ \longrightarrow k$ z". 次図を可換にするものがある。

る。

$$\Gamma(X, L^2)_+^{\otimes 2} \longrightarrow \Gamma(X, L^4)_+$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ m^{\otimes 2} \searrow & & \swarrow \ell \\ & k & \end{array}$$

すると、任意の $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \Gamma(X, L^2)_+$ と $a_2, b_2, c_2, d_2 \in \Gamma(X, L^4)_+$ とに對し、

$$\begin{aligned} & \ell^{(3)}((a_1 \cdot a_2) \cdot (b_1 \cdot b_2)) \cdot \ell^{(3)}((c_1 \cdot c_2) \cdot (d_1 \cdot d_2)) \\ &= \ell^{(3)}((a_1 \cdot b_1) \cdot a_2 \cdot b_2) \cdot \ell^{(3)}((c_1 \cdot d_1) \cdot c_2 \cdot d_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= l(a_1, b_1) \cdot l(a_2) \cdot l(b_2) \cdot l(c_1, d_1) \cdot l(c_2) \cdot l(d_2) \\
&= m(a_1) \cdot m(b_1) \cdot l(a_2) \cdot l(b_2) \cdot m(c_1) m(d_1) \cdot l(c_2) \cdot l(d_2) \\
&= l^{(3)}((a_1, a_2), (c_1, c_2)) \cdot l^{(3)}((b_1, b_2), (d_1, d_2))
\end{aligned}$$

となる。一方定理 A' により、 $\Gamma(X, L^2)_+ \otimes \Gamma(X, L^6)_+ \rightarrow \Gamma(X, L^6)_+$ は全射となる故、上式は、任意の $a, b, c, d \in \Gamma(X, L^6)_+$ に対し、

$$l^{(3)}(a, b) \cdot l^{(3)}(c, d) = l^{(3)}(a, c) \cdot l^{(3)}(b, d)$$

と云い換えられる。この事から linear form n の存在がわかる。

さて定理の証明を続けよう。 $\Gamma(X, L^3)_- = \{f \in \Gamma(X, L^3) \mid \iota(f) = -f\}$ とおくと、

$$\Gamma(X, L^3) = \Gamma(X, L^3)_+ \oplus \Gamma(X, L^3)_-$$

となる。上記 Lemma の証明と同様にして、linear forms $p: \Gamma(X, L^3)_+ \rightarrow \mathbb{R}$ と $q: \Gamma(X, L^3)_- \rightarrow \mathbb{R}$ 2 次図を可換にするものがあることを知る:

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma(X, L^3)_+^{\otimes 2} & \longrightarrow & \Gamma(X, L^6)_+ & \longleftarrow & \Gamma(X, L^3)_-^{\otimes 2} \\
& \searrow p^{\otimes 2} & \downarrow n & \swarrow q^{\otimes 2} & \\
& & \mathbb{R} & &
\end{array}$$

さらに、 $\Gamma(X, L^3)_+^{\otimes 2} + \Gamma(X, L^3)_-^{\otimes 2} \rightarrow \Gamma(X, L^6)_+$ が全射 2 次 n は non-trivial 故、 $p \oplus q: \Gamma(X, L^3) \rightarrow \mathbb{R}$ も non-

trivial となる ことがわかる。この $p \oplus q$ は次を満足す:

$$(C) \text{ 任意の } F \in \text{Ker}(\Gamma(X, L^3)^{\otimes 3} \rightarrow \Gamma(X, L^3)) \text{ に対し}$$

$$(p \oplus q)^{\otimes 3}(F) = 0.$$

従って、上の定理 (§1) により、 X の点 x に対し $\Phi_L(x) \in P(\Gamma(X, L^3))$ に対応する linear form が $p \oplus q$ となるものがある。このとき、

$$\Phi_{M^2}(\pi(x)) \in P(\Gamma(K, M^2)) = P(\Gamma(X, L^2)_+)$$

に対応する linear form が与えられたことになる。ことが解り、定理の証明を終る。

§4 例.

この節では、基礎体 $\mathbb{C}$ とする。 g 次の Siegel 上半空間 H_g の点 z と、列 vector $x \in \mathbb{C}^g$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^g$ とに対し、いわゆる theta series は

$$\theta \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}(z|x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e\left(\frac{1}{2} {}^t(k_1+m)z(k_1+m) + (k_1+m)(x+k_2)\right)$$

によつて定義される。但し $e(*) = e^{2\pi i *}$. $X = \mathbb{C}^g / (z, 1_g) \mathbb{Z}^{2g}$, $\Theta_a = \bigoplus_{p \in \frac{1}{2} \mathbb{Z}^g / \mathbb{Z}^g} \theta \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}(az|ax) \cdot \mathbb{C}$, $\Theta_a^+ = \{ \theta \in \Theta_a \mid \theta = \text{even} \}$

とする。さて linear system $\mathbb{H}_4^+$ によつて定義される写像を考える:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbb{H}_4^+}: X &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{H}_4^+) \\ &\downarrow \lambda \\ &\longrightarrow (\dots : \theta[\frac{p}{2}](z|2x) : \dots)_{(\frac{p}{2}) \text{ is even}} \\ = z'', (\frac{p}{2}) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \frac{2g}{2+2} z'' \quad & \text{if } p \cdot g \equiv 0 \pmod{2} \quad (\text{i.e. } (\frac{p}{2}) \text{ is even}) \text{ の全体を考える} \end{aligned}$$

$$\mathbb{H}_4^+ = \bigoplus_{(\frac{p}{2}) \text{ is even}} \theta[\frac{p}{2}](z|2x) \cdot \mathbb{C}$$

となることに注意する。このとき $g=2$ ならば $\Phi_{\mathbb{H}_4^+}(X)$ の定義 ideal は、2 次の斉次部分 $I_2 z''$ 生成されることかわかり、 I_2 の生成元も explicit に書きあげることができる (Göpel, Wirtinger)。

また

$$\mathbb{H}_2 \otimes \mathbb{H}_2 \longrightarrow \mathbb{H}_4^+$$

が全射になるための必要十分条件は

$$\theta[\frac{p}{2}](z|0) \neq 0 \quad (\forall (\frac{p}{2}) \text{ is even})$$

と与えられ (Mumford)。このことは、 $g=2$ のときは X が楕円曲線の積とはならないこととあり、 $g=3$ のときは、 X が non-hyperelliptic curve の Jacobian 多様体となることとある。最後に $g=2$ のとき

$$\Phi_{\mathbb{H}_2}: X = \mathbb{C}^2 / (2, 1_2) \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{H}_2)$$

による像重 $\Theta_2(X)$ の定義方程式を述べる (cf Baker [1]).

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P+Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$\Theta_2 = \langle \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} z | x \right), \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} z | x \right), \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} z | x \right), \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1+2 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} z | x \right) \rangle_{\mathbb{C}}.$$

これら fasio に対応して $\mathbb{P}^3$ の座標を X_0, X_P, X_Z, X_{P+Z} とおくと, X が楕円曲線の積にならないとき方程式は, 次の様になる.

$$X_0^4 + X_P^4 + X_Z^4 + X_{P+Z}^4 + A X_0 X_P X_Z X_{P+Z} + B(X_0^2 X_P^2 + X_Z^2 X_{P+Z}^2) + C(X_0^2 X_Z^2 + X_P^2 X_{P+Z}^2) + D(X_0^2 X_{P+Z}^2 + X_P^2 X_Z^2) = 0$$

$$\text{但し } A = \frac{1}{\theta_0 \theta_P \theta_Z \theta_{P+Z}} \left\{ -(\theta_0^4 + \theta_P^4 + \theta_Z^4 + \theta_{P+Z}^4) + \frac{\theta_0^2 \theta_P^2 + \theta_Z^2 \theta_{P+Z}^2}{\theta_0^2 \theta_P^2 - \theta_Z^2 \theta_{P+Z}^2} (\theta_0^4 + \theta_P^4 - \theta_Z^4 - \theta_{P+Z}^4) + \frac{\theta_0^2 \theta_Z^2 + \theta_P^2 \theta_{P+Z}^2}{\theta_0^2 \theta_Z^2 - \theta_P^2 \theta_{P+Z}^2} (\theta_0^4 - \theta_P^4 + \theta_Z^4 - \theta_{P+Z}^4) + \frac{\theta_0^2 \theta_{P+Z}^2 + \theta_P^2 \theta_Z^2}{\theta_0^2 \theta_{P+Z}^2 - \theta_P^2 \theta_Z^2} (\theta_0^4 - \theta_P^4 - \theta_Z^4 + \theta_{P+Z}^4) \right\},$$

$$-B = \frac{\theta_0^4 + \theta_P^4 - \theta_Z^4 - \theta_{P+Z}^4}{\theta_0^2 \theta_P^2 - \theta_Z^2 \theta_{P+Z}^2}, \quad -C = \frac{\theta_0^4 - \theta_P^4 + \theta_Z^4 - \theta_{P+Z}^4}{\theta_0^2 \theta_Z^2 - \theta_P^2 \theta_{P+Z}^2}$$

$$-D = \frac{\theta_0^4 - \theta_P^4 - \theta_Z^4 + \theta_{P+Z}^4}{\theta_0^2 \theta_{P+Z}^2 - \theta_P^2 \theta_Z^2}, \quad \theta_r = \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} z | 0 \right)$$

この方程式は, $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \in H_2$ となるときは,

$$(X_0 X_{P+Z} - X_P X_Z)^2 = 0$$

となることが容易に解る。 $X = \mathbb{C}^2 / ((\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, 1_2) \mathbb{Z}^2) = E_1 \times E_2$
 $(E_i = \mathbb{C} / (\mathbb{Z} \cdot 1, 1) \mathbb{Z}^2)$ を $\mathbb{P}_{\oplus_2}$ によ, $2 \mathbb{P}^3$ に埋めこむと
 その像 $\mathbb{P}_{\oplus_2}(E_1 \times E_2)$ は $X_0 X_{p+2} - X_p X_2 = 0$ によ, 2 定
 義された 2 次曲面となり, $E_1 \times E_2$ の Kummer 多様
 体ではない。

参考文献

- [1] H.F. Baker, *Abelian Functions*, Cambridge, 1897.
- [2] S. Koizumi, *Theta relations and projective normality of abelian varieties*, Amer. J. Math., 98(3), 865-889 (1976).
- [3] ———, *The equations defining abelian varieties and modular functions*, Math. Ann. ~~242~~ 242 (2), 127-145 (1979).
- [4] D. Mumford, *On the equations defining abelian varieties I*, Invent. Math., 1, 287-354 (1966).
- [5] ———, *Varieties defined by quadratic equations*, *Questioni sulle varietà algebriche*, Corsi dal C.I.M.E., Edizioni Cremonese, Roma, 1969.
- [6] ———, *Abelian varieties*, Tata Inst. Studies in Math., Oxford Univ. Press, London and New York, 1970.

- [7] T. Sekiguchi, On projective normality of abelian varieties II,
J. Math. Soc. Japan 29(4), 709-727 (1977).
- [8] ———, On the cubics defining abelian varieties,
Ibid., 30(4), 703-721 (1978).
- [9] ———, On the normal generation by a line
bundle on an abelian variety, Proc. Japan Acad., 54,
Ser. A, 185-188 (1978).
- [10] W. Wirtinger, Untersuchungen über Thetafunktionen, Leipzig
1895.