

Tensor product と function algebra の counter examples

茨城大 理 林 実樹広

関数環のテンソル積は, pathological example を作ることや interpolation の話に応用されたりいたしますが, テンソル積そのものが研究されたことは今のところあまりないようです。ここでは, §1 で, テンソル積の定義と基本的な性質について述べ, §2 では Sidney の example を紹介します。

§1. 関数環のテンソル積 A, B をそれぞれコンパクト空間 X, Y 上の関数環とする。 $f \in A$ と $g \in B$ に対して $X \times Y$ 上の連続関数 $f \otimes g$ を $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ により定義する。代数的なテンソル積 $A \otimes B$ は $\{f \otimes g: f \in A, g \in B\}$ の linear span と同一視されて, 関数環 A, B のテンソル積 $A \hat{\otimes} B$ は, $A \otimes B$ の $C(X \times Y)$ における uniform closure として定義される。このとき次の事柄が成立つ

- 1) $\Sigma_{A \hat{\otimes} B} = \Sigma_A \times \Sigma_B$; Σ_X は spectrum (maximal ideal space)

ともいう) をあらわす。

2) $\widehat{A \otimes B} \cong \widehat{A} \otimes \widehat{B}$; $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{A \otimes B}$ はそれぞれのゲルファント変換をあらわす。とくに, 関数環のテンソル積は台になる空間 X , Y の定め方によらない。

3) $\mathcal{M}_{A \otimes B} = \mathcal{M}_A \times \mathcal{M}_B$; $\mathcal{M}_{(\cdot)}$ は Shilov 境界をあらわす。

4) $c(A \otimes B) = c(A) \times c(B)$; $c(\cdot)$ は Choquet 境界 (strong boundary とともいう) をあらわす。

5) $A \otimes B$ の Gleason part は, P , Q をそれぞれ A , 及び B に関する Gleason part として, $P \times Q$ という形できっちりとあらわされる。

証明は, 次の簡単な性質から容易にわかる。

[T1] $A \otimes B$ は $\widehat{A \otimes B}$ の中で dense である。

[T2] 任意の $f \in A \otimes B$ に対して, $f(\cdot, y) \in A$ for $\forall y \in Y$, $f(x, \cdot) \in B$ for $\forall x \in X$ 。

次のことも成立つ

6) $E \subseteq X$, $F \subseteq Y$ をそれぞれ A , B に関する peak set [interpolation set] とすると, $E \times F$ は $A \otimes B$ に関する peak [interpolation set] となる。

以上述べたことは関数環の任意の族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$ のテンソル積 $\bigotimes_{\alpha \in S} A_\alpha$ に対しても同じように成立する。

Note interpolation set については, 次のような一般化が

なされている[3]: A を $C(X)$ の closed subspace, B を Banach space として, $A \otimes B$ を $C(X, B)$ [X から B への連続関数全体] の subspace として, $A \hat{\otimes} B$ を $A \otimes B$ の closure により $A \hat{\otimes} B$ を定義する。 E を X の閉集合として, $(A \hat{\otimes} B)|_E = C(E, B)$ となると, E を A の B -interpolation set ということにすると, 次の事柄は同値である。

a) 任意の Banach space B に対して, E は A の B -interpolation set である。

b) E は A の ℓ^1 -interpolation set である。

c) 定数 $M > 0$ があって, E の互いに交じわらない closed subset $K_1, \dots, K_n$ 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $g_1, \dots, g_n \in A$ があって, $g_i|_{K_j} = \delta_{ij}$ かつ $\|\sum_{i=1}^n |g_i|\|_X \leq M + \varepsilon$ 。

A が関数環のときは, E が A の interpolation set ということと c) とは同値である [A が単に subspace というだけでは, 同値とならないそうである]。(Note 終)

以上の基本的な性質を一步はずれると, 関数環のテンソル積でおかしくなることや, わからないことが沢山あります。

例 1.1 $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ として, Δ^n を polydisc とする。 $H^\infty(\Delta^n)$ を Δ^n 上の有界正則関数の全体, $A(\overline{\Delta}^n)$ を $\overline{\Delta}^n$ 上で連続で, Δ^n 上で正則な関数の全体とする。このとき $A(\overline{\Delta}) \hat{\otimes} A(\overline{\Delta}) = A(\overline{\Delta}^2)$ であるのに対して, $H^\infty(\Delta) \hat{\otimes} H^\infty(\Delta) \subsetneq H^\infty(\Delta^2)$ である; 実際, Δ^2 から Δ への写像 $(z, w) \mapsto zw$ は $\Sigma_{H^\infty(\Delta)}$ から $\Sigma_{H^\infty(\Delta)}$ への写像に連続

延長出来るのに, $\Sigma_{HP(w)} \times \Sigma_{HP(w)}$ から $\Sigma_{HP(w)}$ へは連続に延長されない [たとえば, $e^{\frac{zw+1}{zw-1}}$ を考えて, z を nontangential に, w は tangential に 1 に収束させるフィルターを考えて見ればよい].
——別証明が [1], [6] にある。とくに [1] は興味ある。

例 1.2 $A(\Delta^2)$ の Shilov 境界は $T^2 = \{(z, w) : |z|=|w|=1\}$ であるが, この中で, $\{(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ は peak interpolation set であるが, $\{(e^{i\theta}, e^{i\theta}) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ は peak set でも interpolation set でもない。とくに, $E \subseteq X \times Y$ のすべての切り口 $E \cap X_y$, $E \cap Y_x$ for $\forall x \in X, \forall y \in Y$, が peak set でも, E が peak set とは限らない; $X_y = \{(x, y) : x \in X\}$, $Y_x = \{(x, y) : y \in Y\}$ とする。

[Q1] $A \otimes B$ の peak set, interpolation set は, A 及び B の言葉で特徴付けられるか?

例 1.3 $A(\Delta)$ の原点 0 における T 上の表現測度は $\frac{1}{2\pi} d\theta$ 1 個だけであるが, $A(\Delta^2)$ の T^2 上の表現測度は無限次元である [$e^{i\theta} \rightarrow (e^{i\theta}, e^{in\theta})$ によって $\frac{1}{2\pi} d\theta$ から T^2 上に導入される測度はすべて $A(\Delta^2)$ に関する $(0, 0)$ の表現測度になっている]。

[Q2] $A \otimes B$ の表現測度や, annihilator を A 及び B の言葉で特徴付けられるか?

例 1.4 $\mathbb{C}^n$ のコンパクト集合 X に対して, $A(X)$ を X 上連続で X の内部で正則な関数の全体, $R(X)$ を有理関数で, 分母が X 上で 0 とならないものの全体の X 上での uniform closure と

とすると、 $R(X \times Y) = R(X) \hat{\otimes} R(Y)$ となるが、

$$\boxed{Q3} \quad A(X) \hat{\otimes} A(Y) = A(X \times Y) ?$$

[付記] テンソル積の性質 T1], T2] のうち、T1] の方は $\Sigma_{A \hat{\otimes} B}$ を決定するときにしか使われない。そこで、T2] だけを取り出して、次のようなテンソル積(?) を考えてみた:

$$A \boxtimes B = \{ f \in C(X \times Y) : f(\cdot, y) \in A \text{ for } \forall y \in Y, f(x, \cdot) \in B \text{ for } \forall x \in X \}.$$

この定義では、 $A(X) \boxtimes A(Y) = A(X \times Y)$ となる。このテンソル積 $\boxtimes$ も台となる空間 X, Y の定め方によらない、i.e., $A \boxtimes B = (\hat{A} \boxtimes \hat{B})|_{X \times Y}$ となる。ところが、 $A \boxtimes B$ の spectrum が $\Sigma_A \times \Sigma_B$ に一致するかどうかかわからない [X が $\mathbb{C}^1$ のコンパクト集合のときには、任意の関数環 B に対して、 $\Sigma_{A(X) \boxtimes B} = \Sigma_{A(X)} \times \Sigma_B$ となることが示めせる]。

$$\boxed{Q4} \quad H^q(\Delta) \boxtimes H^q(\Delta) = H^q(\Delta) \hat{\otimes} H^q(\Delta) ?$$

$$A(X) \boxtimes A(Y) = A(X) \hat{\otimes} A(Y) ?$$

$$R(X) \boxtimes R(Y) = R(X) \hat{\otimes} R(Y) ?$$

$$\boxed{Q5} \quad \text{また、左辺の spectrum は何か?}$$

§ 2. Sidney example Sidney が [5] で与えた例を紹介する。 A, B をそれぞれ $X = \Sigma_A, Y = \Sigma_B$ 上の関数環とする。 A を X 上の A に包まれる関数環、 I を B の closed ideal とする。このとき、 $\mathcal{A} = (A \boxtimes I + A \boxtimes B)^-$ により $C(X \times Y)$ の closed subalgebra

を定義すると

Theorem 次の事柄が成立つ:

$$1) A \otimes B \subseteq \mathcal{O} \subseteq A \otimes B$$

$$2) f \in \mathcal{O}, y \in \text{hull}(I) \Rightarrow f(\cdot, y) \in A$$

$$3) \Sigma_{\mathcal{O}} = (\Sigma_A \times \text{hull}(I)) \cup (X \times Y)$$

$$4) \{\varpi_A \times (\varpi_B \setminus \text{hull}(I))\} \cup \{\varpi_A \times \varpi_B\} \subseteq \varpi_{\mathcal{O}} \subseteq \varpi_A \times \varpi_B$$

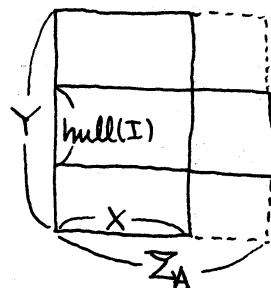
5) A' , A の X 上での Gleason part relation が一致している (Gleason metric が一致する必要はない) ならば, $\mathcal{O}$ に関する Gleason part はきっちり $(P_1 \times P_2) \cap \Sigma_{\mathcal{O}}$ であらわされる; ここで, P_1, P_2 はそれぞれ A 及び B に関する Gleason part.

[証明] 5)において, $a \in \Sigma_{\mathcal{O}} \setminus X$ のとき, 切り口 $Y_a \cap \Sigma_{\mathcal{O}}$ 上の $\mathcal{O}$ に関する part relation が B に関するものと一致していることだけを示す。もし, $y, y' \in \text{hull}(I)$ が B に関して同じ part に入っていないならば, a の A に関する表現測度を μ として, $f \in \mathcal{O}$ のとき $f(\cdot, y), f(\cdot, y') \in A$ となるから

$$f(a, y) - f(a, y') = \int (f(x, y) - f(x, y')) d\mu(x).$$

$x \in X$ に対しては, $f(x, \cdot) \in B$ であるから, $|f(x, y) - f(x, y')| \leq \|y - y'\|_B \|f\|$ 。よって $|f(a, y) - f(a, y')| \leq \|y - y'\|_B \|f\|$ となり (a, y) と (a, y') は $\mathcal{O}$ に関して同じ part に入る。逆は, スグにわかる。

例 2.1 α を正の無理数, m を T^2 上の Haar measure とし

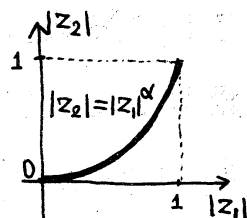


$$A_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in C(T^2) : \int_{T^2} f(t_1, t_2) t_1^k t_2^l dm(t_1, t_2) = 0 \text{ for } k+\alpha l > 0\}$$

$$= \text{closed linear span } \{z_1^k z_2^l : k+\alpha l > 0\}$$

はよく知られた T^2 上の maximal 関数環である。 Σ_{A_α} は図の実線であらわされた曲線に対応する $\mathbb{C}^2$ の subset

に同一視され、原点 $\varphi_0 = (0, 0)$ は 1 点だけで A_α の part になっている。 $A = C(T^2)$ として、 $\sigma =$



$(C(T^2) \otimes I + A_\alpha \otimes B)^-$ は Theorem の 5) の仮定をみたしている。よって、 P を B の一つの Gleason part とすれば、 $\{\varphi_0\} \times \{\text{hull}(I) \cap P\}$ は σ の一つの Gleason part となる — Garnett の construction の本質的な部分、ただし、作り方に多少の差がある。

例 2.2 $A = C(X)$, $B = A(\Delta S) = \bigotimes_{\lambda \in S} A(\Delta_\lambda)$ とする。 B_λ を座標関数 z_λ の λ 次の同次多項式全体の closure とすると、 $B = (\sum_{\lambda \in S} B_\lambda)^-$ となる。 $f \in C(X) \otimes B \subset C(X)$ の元を係数として $\{z_\lambda\}$ に関してテイラー展開したときの λ 次の同次式の部分 f_λ が定義出来る。

実際 $f(x, z) = \sum_{\lambda \in S} \sum_{|\nu|=\lambda} f_{\lambda, \nu}(x) z^\nu$ (有限和); $\nu = (\nu_\lambda)$, $\nu_\lambda \geq 0$, $|\nu| \equiv \sum \nu_\lambda$, $z^\nu \equiv \prod z_\lambda^{\nu_\lambda}$, に対して、その λ 次の同次式 $\sum_{|\nu|=\lambda} f_{\lambda, \nu}(x) z^\nu$ を対応させる operator が bounded となることが示めせる [多変数の Schwarz の補題を作って、変数 z_λ の個数に関係しない定数でノルムをおさえる]。さて、 A を X 上の関数環で、 $\varphi_0 \in \Sigma_A \setminus X$ とする。 I は B の closed ideal で $I = (\sum_{\lambda \in S} I_\lambda)^-$, $I_\lambda = B_\lambda \cap I$ となるものとする [たとえば、 $z_\lambda I_\lambda \subset I_{\lambda+1}$; $\lambda \in S$, $\nu_\lambda \geq 0$, となる

B_f の subspace の族 $\{I_f\}_{f \geq 1}$ に対し, $I = (\sum_f I_f)^-$ とおけばよい]. 更に各 f に対し, B_f の closed subspace J_f があって $B_f = I_f \oplus J_f$ と直和に書かれるものとする [S が finite なら B_f は有限次元で, これは無条件に成立つ]. $I_0 = \{0\}$, $J_0 = B_0 \cong \mathbb{C}$ とする. Σ^S の原点 $\bar{0}$ は $\text{hull}(I)$ に含まれるから, $\varphi = (\varphi_0, \bar{0}) \in \Sigma_\sigma$. $\sigma_\varphi = \{t \in \sigma : \varphi(t) = 0\}$ と (A_φ, B_φ も同様に) 定義する. 以上の条件のもとに, σ の φ における形式的なテイラー展開 $\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_\varphi^n)^- / (\sigma_\varphi^{n+1})^-$ が explicit に計算出来る. すなわち, $\sigma_\varphi = (A \otimes I + A_\varphi \otimes B + A \otimes B_0)^-$ ということから,

$$\begin{aligned} (\sigma_\varphi^n)^- &= (A' \otimes I + \sum_{f=0}^{n-1} A_\varphi^{n-f} \otimes B_f + A \otimes B_0^n)^- \\ &= \sum_{f=0}^{n-1} \oplus (A' \otimes I_f + A_\varphi^{n-f} \otimes J_f)^- \oplus [\sum_{f \geq n} (A' \otimes I_f + A \otimes J_f)^-] \end{aligned}$$

$$(\sigma_\varphi^n)^- / (\sigma_\varphi^{n+1})^- \cong \sum_{f=0}^n \oplus (A_\varphi^{n-f} \otimes J_f)^- / (A_\varphi^{n+1-f} \otimes J_f)^- \quad (\text{ただし, } A_\varphi^0 = A).$$

ここで, 更に $A' \subseteq \mathbb{C}(T^2)$, $A = A_\alpha$, $\varphi_0 = (0, 0)$ とすると, $A_\varphi = (A_\varphi^2)^-$ なることが知られている ([4]) ので,

$$(\sigma_\varphi^n)^- / (\sigma_\varphi^{n+1})^- \cong (A_\varphi^0 \otimes J_n)^- / (A_\varphi^0 \otimes J_n)^- \cong J_n \cong B_n / I_n$$

となる (A' , A は消えてしまう!). とくに, $S = \{1, \dots, r\}$ のときを考える. $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ の ideal $J = \sum J_f$ は, $X_i J_f \subseteq J_{f+1}$, $\forall X_i$, となるとき, homogeneous ideal といわれる. $X_1, \dots, X_r$ に変数 $z_1, \dots, z_r$ を代入すれば, J_f に対して, B_f の subspace I_f が定まり, $I = (\sum I_f)^-$ は B の closed ideal となる. 有限次元

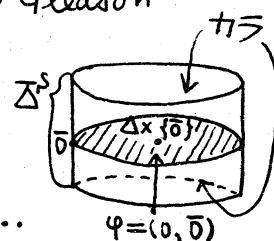
ということから, $B_f = I_f \oplus J_f$ と直和に分解して,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \oplus (\alpha_f^n / (\sigma_f^n)) \cong \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r] / f$$

となる——左辺は関数のテイラー展開なのに, 右辺は全く代数的であるためにおかしいことが起っている。というのは, 右辺を関数とみるときは, $\text{variety } \text{hull}(f) = \text{hull}(\text{Rad } f)$ 上の関数, すなわち, $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r] / f$ の元とみなさなくてはならないからである。たとえば, $f = \{z_1^2, z_1 z_2, z_2^2\}$ のとき, $\text{hull}(f) = \{(0,0)\}$ 上の関数は trivial しかないのに, 左辺からは trivial でないテイラー展開をもつ関数があらわれる。

例 2.3 最後に T. T. Read (c.f. [6] p153) の作った例を上げる; $A' = \mathbb{C}(\Delta)$, $A = A(\Delta)$, $B = A(\Delta^S)$, $I = (B_0^k)^- = (\sum_{k \geq 0} B_k)^-$ とする。このとき, $\text{hull}(I) = \{\bar{0}\}$ 。よって $\Delta x \{\bar{0}\}$ は σ の Gleason part で weak topology で open になっている。ところが,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \oplus (\sigma_f^n / (\sigma_f^n))^- \cong B_0 \oplus B_1 \oplus \dots \oplus B_k \oplus \{0\} \oplus \{0\} \dots$$



であり, とくに $B_1 = \sigma_f / (\sigma_f^2)^-$ は無限次元である。 $\alpha_f / (\alpha_f^2)^-$ 上の linear functional は φ における point derivation (幾何的な接ベクトルに対応する) は連続なものだけでも無限次元となる——一次元の analytic disc $\Delta x \{\bar{0}\}$ 上に無限次元の接ベクトルがあることになる!

以上, いくつかの例を紹介したが, part や point derivation

それに *analytic structure* などに関連した例がこの他にも色々考えられる。

References

1. Birtel, F.T., and E. Dubinski, Bounded analytic functions of two complex variables, *Math. Z.* 93 (1966), 299-310.
2. Blumenthal, R.G., The spectrum of a function algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.* 25 (1970), 343-346.
3. Oberlin, D.M., Interpolation and vector-valued functions, *J. Funct. Anal.* 15 (1974), 428-439.
4. Sidney, S.J., Point derivations in certain sup-norm algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 131 (1968), 119-127.
5. _____, Properties of the sequence of closed powers of a maximal ideal in a sup-norm algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.* 131 (1968), 128-148.
6. Stout, E.L., *The Theory of Uniform Algebras*, Bogden & Quigley, Inc., New York, 1971.