

解 説

宇宙機の軌道と制御

山川 宏*

1. はじめに

地球周回の人工衛星や月惑星探査機などの宇宙機の軌道設計および軌道制御についての基本概念と理論について、応用例を取り入れつつ概説する。とくに、宇宙機の二つの地点・二つの軌道間の移行に着目する。2007年夏に打ち上げられた月探査機「かぐや」は、まず地球を複数周回した後に、月に遷移する軌道に投入され、月到着後には、二つの副衛星「おきな」と「おうな」を分離したうえで、主衛星は高度 100 km の月周回極軌道に投入された。2010年5月に打上げ予定の金星探査機「あかつき」は、地球を離脱後に、太陽周回軌道を航行し、金星到着時に搭載エンジンをを用いた減速により金星周回軌道に投入される。また、2014年夏に打上げ予定の日本の水星探査機 MMO は欧州の水星探査機 MPO とともに、地球を離脱後、目標地点の水星には直接向かわずに、電気推進エンジンによる加速を行いつつ、金星～金星～水星～水星～水星という複雑な経路をたどる。このように、ミッションの目的によって、宇宙機の軌道計画は最適化され、そのプロファイルは大きく変わることになる。本解説では、その基礎となる中心天体と宇宙機の2体間の引力のみを考慮した2体問題（ケプラー軌道）から始め、二つの円軌道間の最適移行軌道であるホーマン移行、さらに、複数の天体の重力を考慮した非線形性の高い軌道ダイナミクスを応用した最適移行軌道（例：地球－月移行軌道など）について記述する。これらの移行のために軌道速度を変更する推進技術として、太陽光圧を利用したソーラーセイル推進などを想定した場合の最適制御理論などに基づく軌道制御について記述する。

宇宙機がある出発地点あるいは出発軌道から、目的地点あるいは目的軌道までの移行を実現するにあたり、速度修正を行う必要があるが、いかに、総速度修正量、ひいては、宇宙機搭載エンジンが消費する燃料質量を低減するかが一般的な設計の指標となる。二つの境界間の移行軌道は、地球・惑星や太陽などの中心天体まわりの二つの軌道間の移行、そして、軌道上を動く基準衛星に対する相対的な軌道移行が扱われることが多いが、本解説は、おもに前者を扱う。

* 京都大学

Key Words: trajectory design, orbital dynamics, optimization.

2. 2体問題

宇宙機の軌道運動は一般に質点の力学に基づいて記述される。衛星に働く力には、地球重力のほかに、環境外乱力（大気抵抗、太陽輻射圧など）や太陽、惑星、月など他天体の引力があるが、まず、地球と宇宙機、太陽と宇宙機などの2体問題としての軌道運動を考察する。

相互に万有引力のみが作用する二つの質点の運動を考える（第1図）。この二つの質点1（質量 M ）と質点2（質量 m ）の運動は次の運動方程式により記述される[1]。

$$\mathbf{f}_1 = M \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = GMm \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (1)$$

$$\mathbf{f}_2 = m \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = GMm \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = -\mathbf{f}_1 \quad (2)$$

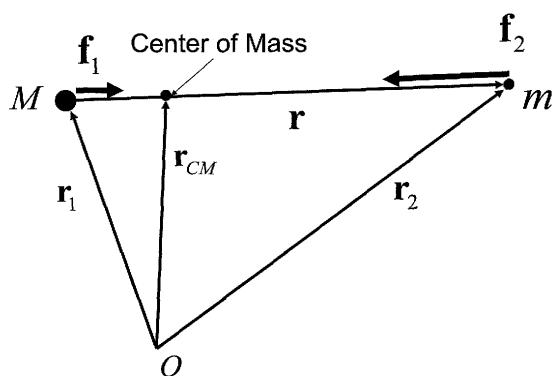
ただし、 G は万有引力定数（ $= 6.669 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ ）である。これより次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -G(M+m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad r = |\mathbf{r}| \end{aligned} \quad (3)$$

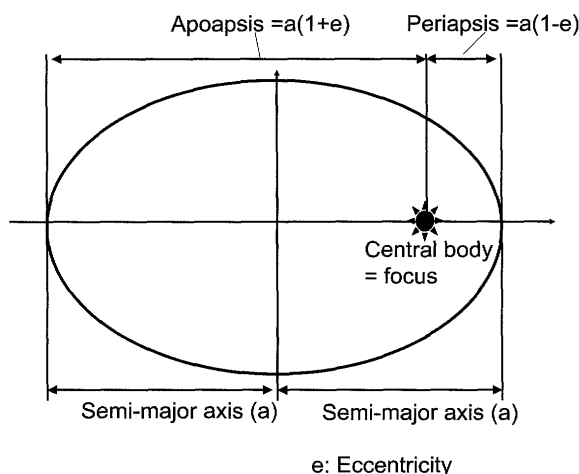
この方程式がケプラー運動を行う2体問題の基本式である。(3)式は、人工衛星の中心天体に対する相対運動を表す。また、中心天体の質量 (M) と宇宙機の質量 (m) では、 $M \gg m$ ゆえ、中心天体と宇宙機の質量中心と中心天体の中心はほぼ一致することになる。したがって、運動を記述する慣性座標系の原点を天体を中心にとることができ、次の(4)式が中心天体を周回する人工衛星の軌道運動を記述する基本方程式となる。ただし、 $\mu = GM$ である。

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (4)$$

(4)式より、宇宙機は中心天体を一つの焦点とする楕円軌道上を運動する（第1法則）、中心天体と宇宙機を結ぶ半径ベクトルが描く面積速度は一定である（第2法則）、宇宙の軌道周期は中心天体からの平均距離（半長径）の3/2乗に比例する（第3法則）という三つのケプラーの法則が導かれるが、その導出は省略する。ここで、平均距離（半長径 a ）は第2図にあるように、楕円の大きさを示し、中心天体からの距離 r および速度の大きさ



第1図 2体問題



第2図 平均半径と離心率

v を用いて次の(5)式より求められる。

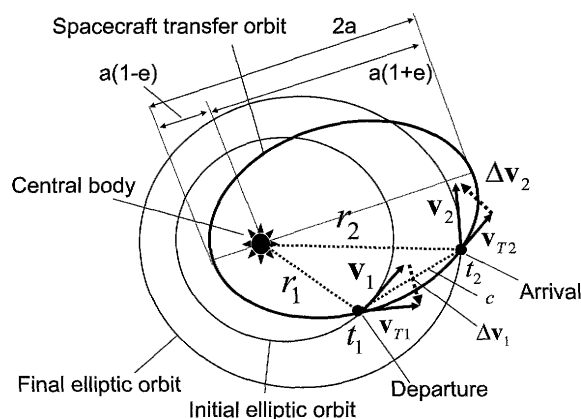
$$v^2 = \mu(2/r - 1/a) \quad (5)$$

また、 e は離心率とよばれる楕円の形状を表すパラメータであり、中心から遠点および近点までの距離 r_a, r_p はそれぞれ(6)式の関係がある。

$$r_a = a(1+e), \quad r_p = a(1-e) \quad (6)$$

3. Lambert 問題

代表的な軌道移行問題として、楕円軌道上のある地点(時刻 t_1)から別の楕円軌道上のある地点(時刻 t_2)への移行を考える(第3図)。宇宙機は、起点で速度修正を行い、2点間を結ぶ中心天体のまわりの楕円軌道上を運動して、終点において再度速度修正を行い目標楕円軌道に投入される。地球から出発して火星などの惑星に到達するケースも含まれ、出発と到着以外の惑星間軌道は、中心天体である太陽のまわりを慣性飛行することになる。このとき、出発地点と到着地点の位置だけでなく、その間の飛行時間も与えられることに注意する。2点間を結ぶ楕円軌道の大きさを表す半長径を a 、中心点からの距離を r_1, r_2 、2点間の距離を c としたとき(第3図)、Lambertの定理[2]は、「2点を結ぶ軌道の飛行時間は、 a, r_1+r_2, c の三つで決定される」と表される。これから、



第3図 二つの楕円軌道間の移行

2点の位置および2点間の飛行時間をあらかじめ与えられると、2点間を結ぶ楕円軌道を表す軌道要素を求めることができる。具体的には、次のようにして計算できる。まず、

$$s = (r_1 + r_2 + c)/2 \quad (7)$$

として、パラメータ α と β を、

$$\begin{aligned} \sin(\beta/2) &= \sqrt{(s-c)/(2a)} \\ \sin(\alpha/2) &= \sqrt{s/(2a)} \end{aligned} \quad (8)$$

によって定義する。 $0 < \theta < \pi$ (θ は移行角)とすると、時間 t は次の関係式

$$t = t_2 - t_1 = \sqrt{a^3/\mu}[(\alpha - \sin\alpha) - (\beta - \sin\beta)] \quad (9)$$

を満たす。(7)-(9)式から、角度 α, β そして半長径 a を求めることができる。

さらに、角運動量に相当するパラメータ $p = a(1-e^2)$ は、次の式から求められ、先に求められた半長径 a とともに、離心率 e が計算され、移行軌道の近点距離や遠点距離が求まる。

$$p = a(1-e^2) = \frac{4a(s-r_1)(s-r_2)}{c^2} \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad (10)$$

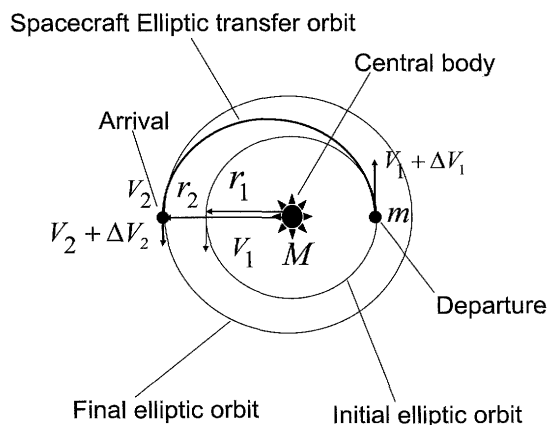
位置と速度の6要素をすべて決めるためには、その他の四つの軌道要素(軌道傾斜角、昇交点経度、近点引数、近点からの離角)が必要であり、本稿では詳細は省くが、すべて導出することができる。

地球から火星に移行するときに、まずおもに地球重力、次に太陽重力、最後におもに火星重力が支配的な場を経験する。このように、二つ以上の天体の重力場を飛行する探査機の軌道を2体問題の組合せとして捉えた近似的な設計手法である楕円軌道接続(patched conic)法がよく使われる。地球から惑星への移行軌道を、地球重力圏内、地球から惑星までの惑星間軌道、惑星重力圏内の三つの部分に分け、それぞれ地球重力のみ、太陽重力のみ、惑星重力のみの2体問題として扱い、それらをつな

げること地球から惑星までの軌道全体を近似する手法である。地球出発日 (t_1) と惑星到着日 (t_2) を決めると、その位置 (r_1, r_2, c) は惑星の位置データ (エフェメリスという) により与えられ、地球と惑星間を結ぶ楕円軌道の軌道要素は飛行時間 ($t=t_2-t_1$) が与えられているので、前記のように、Lambert問題を解くことで求めることができる。地球出発時の脱出相対速度ベクトルおよび惑星到着時の接近相対速度ベクトルも同時に求められる。地球出発時に要求される脱出速度からは、打上げロケットの規模、探査機質量、惑星到着時の接近速度からは、惑星周回軌道投入時に必要な減速量、ひいては、必要な燃料が計算される。

4. 平面内の円軌道間移行

前記で考察した楕円軌道上の点から楕円軌道上の点への移行の特殊かつ現実的な例として、同じ平面内の半径 r_1 の円軌道から半径 r_2 の円軌道への移行において必要な総 ΔV を最小にする問題を考える。2回の軌道速度修正を考慮する場合の解は、ホーマン (Hohmann) 軌道移行とよばれ、第4図のように、出発点と到着点が中心天体に対してなす角が180度の場合が最適であることが知られている。



第4図 2回の軌道修正による円軌道間移行

宇宙機 (質量 m) が中心天体 (質量 M) のまわりを周回する半径 r_1 の円軌道にある。この円軌道速度 V_1 に増速 ΔV_1 を行って移行楕円軌道に投入し、半径 r_2 に到着したときの速度を V_2 とする。ここで増速 ΔV_2 を行って半径 r_2 の円軌道に移行する (第4図)。このとき、重力と遠心力の釣り合いより、

$$G \frac{Mm}{r_1^2} = m \frac{V_1^2}{r_1}, \quad G \frac{Mm}{r_2^2} = m \frac{(V_2 + \Delta V_2)^2}{r_2} \quad (11)$$

また、エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m (V_1 + \Delta V_1)^2 - G \frac{Mm}{r_1} = \frac{1}{2} m V_2^2 - G \frac{Mm}{r_2} \quad (12)$$

運動量保存則より、

$$m(V_1 + \Delta V_1)r_1 = mV_2r_2 \quad (13)$$

ここで、以下の無次元化を行う。

$$R_{21} = r_2/r_1, \quad V_0 = \sqrt{\mu/r_1} \quad (14)$$

このとき、(13)式より、

$$V_1 = \sqrt{GM/r_1}, \quad V_2 = \frac{r_1}{r_2} (V_1 + \Delta V_1) \quad (15)$$

これらより、

$$\frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{V_0} = \left(1 - \frac{1}{R_{21}}\right) \sqrt{\frac{2R_{21}}{1+R_{21}}} + \sqrt{\frac{1}{R_{21}}} - 1 \quad (16)$$

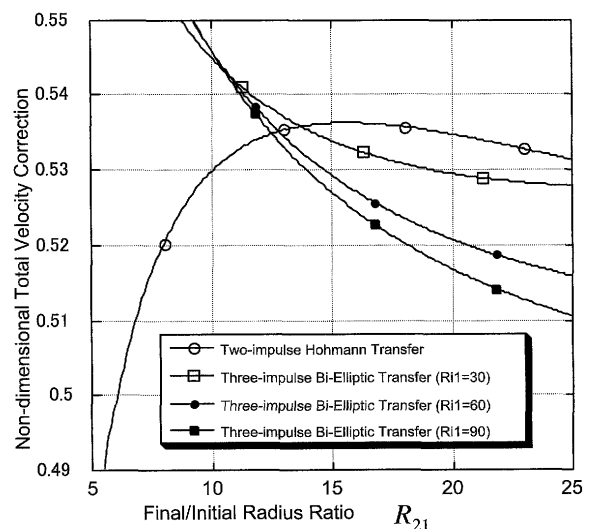
の関係が得られ (第5図)、 r_2/r の比を大きくしていくと、

$$\lim_{R_{21} \rightarrow \infty} \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{V_0} = \sqrt{2} - 1 \sim 0.4142 \quad (17)$$

となる。また、総速度修正量の最大値は、 $R_{21} = 15.58$ のとき、

$$Max \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{V_0} = 0.5363 \quad (18)$$

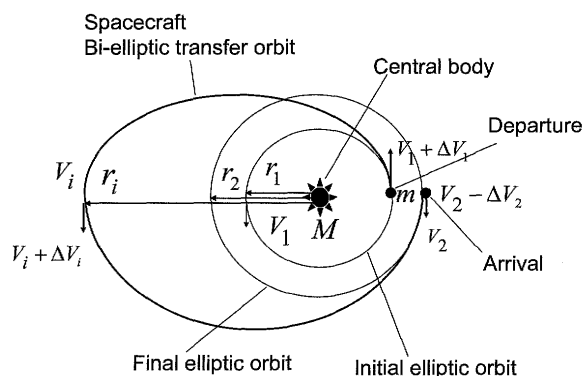
となる。



第5図 円軌道間移行に要する速度修正量 (速度修正2回、および、3回の場合の比較)

つぎに、出発時の速度修正によりまず遠点距離が目標円軌道半径より大きい中間楕円軌道に投入し、その遠点において2回目の速度修正を行って、近点を移行目的の円軌道の半径に修正し、近点で3回目の速度修正により目的の円軌道に投入する場合を考察する。これを双楕円移行 (bi-elliptic transfer) という (第6図)。

2回の軌道制御によるケースと同様に無次元化 ($R_{i1} = r_i/r_1$) を行い、角運動量保存、および、エネルギー保存則を用いると、3回の軌道修正の総和は次の式で表される (第5図)。



第6図 3回の軌道制御による円軌道間移行

$$\frac{\Delta V_1 + \Delta V_i + \Delta V_2}{V_0} = \sqrt{\frac{2R_{i1}}{1 + R_{i1}}} - 1 + \sqrt{\frac{2R_{21}}{R_{i1}(R_{i1} + R_{21})}} - \sqrt{\frac{2}{R_{i1}(R_{i1} + 1)}} + \sqrt{\frac{2R_{i1}}{R_{21}(R_{i1} + R_{21})}} - \sqrt{\frac{1}{R_{21}}} \quad (19)$$

(16),(19)式を用いると、以下の結論が得られる。

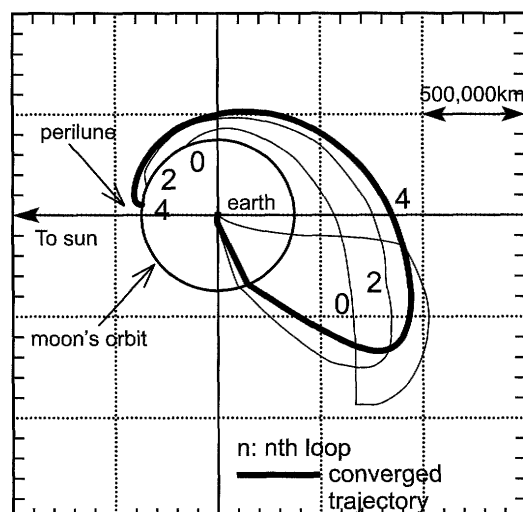
(a) $r_2/r_1 < 11.94$ のとき、両方の円軌道に接する楕円軌道上を移行するのが最適となる。これは、出発軌道から離脱するための第1回の速度修正と、目標軌道に投入するための第2回の速度修正から構成されるホーマン軌道移行に相当し、移行軌道の遷移角は180度であり、出発時および到着時は近点あるいは遠点となる。地球から火星への移行を考えると、 r_2/r_1 は1.5程度なので、このケースに相当し、出発時の地球の位置と到着時の火星の位置が太陽に対して反対側にあるときに、最も効率よく火星に行けることを示す。必要な加減速度が小さければ、それだけ必要な燃料も少なくなり、また重い探査機を火星に持っていけることになる。

(b) $11.94 < r_2/r_1 < 15.58$ のとき、出発軌道から第1回の速度修正を行った後、 $r_i > r_2$ を満たす距離の地点で2回目の速度修正を行い、3回目の速度修正により目標軌道に投入するという合計で3回の速度修正を行うシーケンスが、2回速度修正を行う場合よりも良くなる場合がある。 $r_2/r_1 = 11.94$ のとき、 $r_i \geq \infty$ で、 $r_2/r_1 = 15.58$ のとき、 $r_i \geq r_2$ の任意の距離において3回軌道制御移行が2回軌道制御移行よりも総軌道速度修正量が少ない。

(c) $15.58 < r_2/r_1$ のとき、任意の $r_i > r_2$ で3回の軌道制御を行う軌道移行が最適となる。

5. 軌道制御における工夫1：太陽重力を積極的に用いた地球-月遷移軌道

太陽系の惑星移行に関しては、土星の場合であっても、 $r_2/r_1 \sim 10$ 程度なので、3回の軌道修正解が最適なケースは存在しないが、つぎに述べる地球周回低軌道（高度200 km程度）から、平均半径384,400 kmの楕円軌道上を周回する月への遷移軌道の場合（第7図）は、3回の軌道修正解が意味をもち、より速度修正量が少ない軌道



第7図 太陽方向を固定した座標系における太陽重力を利用した地球-月移行軌道。地球を出発し、月距離の3倍程度の遠点に達した後、月（perilune）に到着する。太線が最適軌道、細線は収束途中の軌道を示す。

移行が可能となる。このとき、中心天体である地球以外に太陽の重力を考慮することが必要となる。

太陽重力を積極的に用いる地球-月遷移軌道の特徴はつぎのようにまとめられる。軌道形状は、双楕円移行軌道に似ている。地球周回低軌道から、直接、月に向かうのではなく、地球-月距離の3倍程度の遠地点距離の長楕円軌道にまず投入する。地心距離120万 km程度のところで、太陽重力の影響により、軌道形状が大きく変化する。これは、地球の重力圏のぎりぎりの部分を飛行しているために、太陽重力の貢献が顕著なためであり、地球周回軌道ではあるが、地球と宇宙機だけではなく、少なくとも太陽重力を考慮した太陽-地球-宇宙機の3体問題において考える必要がある。遠地点方向が太陽-地球固定系の第2、第4象限（反太陽方向が基準、第7図は第4象限）に存在する時に、主として離心率が低減することで近地点距離が増加する傾向が得られる。この原理に基づくと、遠地点が適当な位置にあるとき、地球1周の後、近地点距離が地球近傍の低高度から地球-月間距離まで拡大され、月に接近することが可能となる（第7図の太線）。なお、この例では、総速度修正量を最小化するように、修正ニュートン法に基づいて地球、月における境界条件を最適化（最適軌道は数字4に相当）している。この手法は、6.にて述べる最適化手法のうちの直接法に相当し、収束の様子がわかるように、収束途中の軌道形状（数字0, 2に相当）を参考までに重ねてプロットしている。

地球-月遷移に要する飛行時間は最低で80日程度かかるが、地球出発時に必要な増速度量、途中での速度修正量および月投入時の減速度量を含めたミッション全体の速度修正量を、従来のホーマン移行軌道と比較して150 m/s程度低減可能である（地球出発時の近地点高度200

km, 月投入高度 100 km の場合) [3-4]. これは, 宇宙機搭載の燃料質量換算で衛星総重量の 5 % を削減できることに相当する. なお, このホーマン移行軌道に対する速度利得の大半は月投入時の低相対速度によるものである. また, 類似した軌道形状をもつ地球-月間距離の数倍の遠地点で速度修正を行う双楕円 (bi-elliptic) 遷移軌道と比較した場合も, 総速度修正量は約 400 m/s 低減されており, その利得は, おもに遠地点における速度修正量約 280 m/s と等価な太陽重力の寄与による.

なお, 月接近時には, 重力キャプチャーという強い非線形をもつ軌道現象を利用している. 重力キャプチャーは, 天体の重力影響圏外から接近するにもかかわらず, 重力のみによって天体と低い相対速度を達成し, 場合によっては天体の周りを一時的に周回する現象である. 惑星科学の分野では, 惑星の衛星の起源を説明する一つの機構と考えられている. 宇宙機への応用という観点からは, 所望の月周回軌道への投入の際に少ない減速量で済むというメリットがあり, 第 7 図のように宇宙機の地球-月遷移軌道への応用が可能である.

6. 軌道制御における工夫 2: 連続加速が可能な推進系を利用した宇宙機軌道と最適化手法

これまでの例では, 宇宙機に搭載されている燃料と酸化剤を混合燃焼させて高温高压のガスを発生させ, ノズルより排気することで大きな推進力を得る化学推進エンジンを想定し, 移行に要する全体時間と比較して, 非常に短い時間で速度修正が可能としている. しかし, 近年, 実用化されつつある電気推進エンジンでは, 電磁場エネルギーを推進力に変換する. 非常にエネルギー効率が良いため, 現状では, 化学推進の約 10 分の 1 の燃料で同じだけの増速度を得ることができる. 反面, 推力が非常に小さいために長時間のエンジン稼動を要するという特長がある. 小惑星探査機「はやぶさ」では, 電気推進の一種であるイオンエンジンを主推進機関としており, 太陽電池から得られる巡航中の余剰電力を利用している.

この場合, 消費燃料や飛行時間を評価関数として, 軌道制御履歴を求める軌道最適化問題の解法は, 直接法と間接法に大別できる [5]. 間接法では, 軌道最適化問題を, 古典的変分法, あるいは, ポンドリャーギンの最小原理を用いて, 2 点境界値問題に変換して解く. 具体的には, 非線形の連立 1 階微分方程式である運動方程式 ((20) 式の第 1 式) と, 最適性の必要条件から導かれる随伴変数の方程式, あるいは, オイラー・ラグランジュ方程式 ((20) 式の第 2 式) を連立して解くことになる. なお, $\mathbf{x}$ は状態量ベクトル, $\mathbf{f}$ は運動方程式の加速度項, λ は随伴変数ベクトル, H はハミルトニアンである. また, 第 3 式は変分法の場合の制御入力 of 最適性の条件に対応する. 典型的な境界条件では, 状態量ベクトルの初

期値と随伴変数ベクトルの終端値が与えられるために 2 点境界値問題を形成する.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H^T}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (20)$$

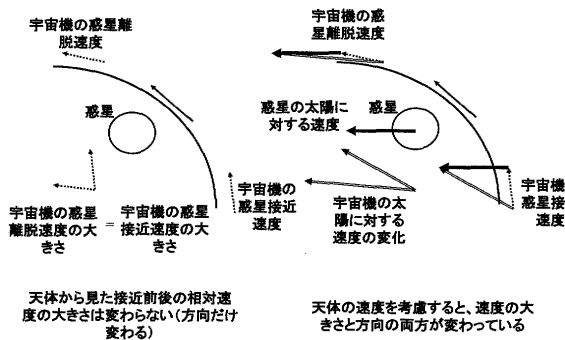
間接法では, 厳密な最適解が得られる反面, オイラー・ラグランジュ方程式の複雑な解析的な表現を求める必要があり, 数値計算を行ううえで, 物理的な意味を持たない随伴変数の境界値を求めるのが一般に困難である.

一方, 直接法では, 最適性の必要条件の解析的な表現が不要である. 代わりに, 状態量と制御量の時間履歴を変数として捉えて, 非線形計画法などの最適計算法によって, 運動方程式を満足しつつ, 総速度制御量などで定義された評価関数を直接最小化することで, 最適軌道を得る. 直接法では, 軌道全体をいくつかのセクションに分割して, 制御履歴についてなんらかのパラメータ表現を行うことが多い.

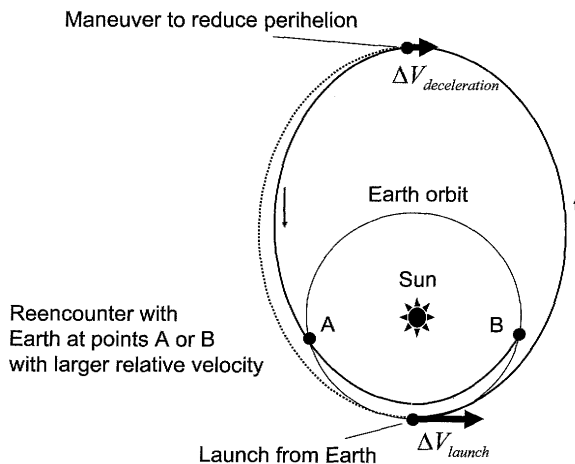
7. 軌道制御における工夫 3: 高エネルギー・脱出軌道への惑星重力の利用

宇宙機の軌道制御においてはエンジン以外にスイングバイ (swingby) を用いることがある. スイングバイは, 別名が重力アシスト (gravity assist) であることからわかるように, 意図的に探査機を月・惑星の近くを通らせて, その天体の重力によって探査機の軌道を変更する技術である. 英語では swing-by と書くが, その名前の通り「天体が探査機をつかんで放り投げている」ようなものである. スイングバイは, 探査機の燃料を使わずに大きな軌道の修正を行うことができるという利点がある. スイングバイを行う惑星を中心とする座標系から見ると, 探査機は重力圏の外側から接近し, 再び離脱していくので, 双曲線軌道と近似できる (第 8 図). このとき, 惑星からみた接近速度と離脱速度の大きさは変化しないが, 二つの速度の方向は変化する. 一方, 太陽を中心とする座標系で考えると, 接近と離脱の二つの速度の大きさも方向も変化するることになり, この原理を積極的に利用することで太陽を中心とする座標系における軌道を制御することが可能である. 厳密には, 探査機と惑星の間でエネルギーや角運動量のやりとりは行われるが, 探査機は惑星の運動に影響を及ぼさないと近似できる.

このスイングバイを利用する例として, 地球を離脱してから再び地球に接近して地球スイングバイにより速度の大きさや方向を調整することは惑星探査でよく用いられる. これは惑星間パーキングとよばれ, 見かけ上の地球脱出速度を拡大させるためにも用いられる [6-7]. たとえば, 第 9 図のように, 地球出発後にまず太陽まわりの周期が 2 年の惑星間軌道に投入して, 途中の遠日点付近でわずかな減速軌道修正 (500 m/s 程度) を行って, 地球に再接近する位置を最初の地球離脱時の位置から, 図中の点 A あるいは点 B に変えることで, 地球に対する相



第 8 図 惑星スイングバイ軌道



第 9 図 惑星間パーキング軌道 [6]. 地球軌道から離脱（相対速度 5 km/s）した後、軌道の遠点において減速（0.5 km/s 程度）を行うことで、地球と再度会合したときの地球相対速度を 9 km/s まで増加させている。

対速度を出発時の 5 km/s から再接近時の 9 km/s 程度まで飛躍的に増加させることができる。これは木星や土星などの高エネルギーミッションに使われることが多く、飛行時間が 2 年増加することで木星まで到達する地球脱出速度を獲得すると考えることができる [5]。惑星間 ΔV の代わりに惑星スイングバイを利用すると ΔV 分の燃料を節約することができ、たとえば「地球離脱－金星－地球－木星」というシーケンスがこれにあたる。さらに惑星間パーキング中の ΔV を電気推進による加速に置き換えることもでき、最終的な地球脱出速度を劇的に増加させることができる。

8. 間接法による軌道最適化

本節では、間接法による軌道最適化の計算例を示す。

8.1 半径方向加速による最適軌道移行

つぎにスイングバイを使わずに、反太陽半径方向で、大きさが太陽からの距離の 2 乗に反比例する加速を行う推進系による惑星間軌道の最適化の例を示す ((21)–(40) 式、および、第 10 図は [8] より引用)。これには、太陽光圧を利用して加速を行うソーラーセイルのセイル面が太陽方向を向いている場合 [9, 10] や、太陽風の運動力

を宇宙機の周囲に人工的に展開した磁場により受け止めて推進力に変換する磁気セイル [11, 12] を想定することができる。ソーラーセイルの場合は、太陽方向面積の制御、磁気セイルの場合は宇宙機の人工磁場の強さを制御することで加速度を制御可能である。地球軌道を出発する惑星間軌道を最適制御問題として定式化し、終端エネルギーの最大化を目指した太陽系からの脱出軌道の計算例を示す。

本解析では、搭載推進系の加速および中心天体である太陽の重力の影響下の宇宙機の運動を考える。推進系の推力による加速度は、反太陽方向に限定されているものとする。その結果、宇宙機の運動は一つの軌道面に限定されるために、2 次元の運動を考えればよい。加速度の大きさが太陽からの距離の 2 乗に反比例する場合、無次元化された極座標における運動方程式は、(4) 式より、つぎのようになる。

$$\frac{d^2 \rho}{d\tau^2} = \rho \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - (1 - \varepsilon) \frac{1}{\rho^2} \quad (21)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\rho^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) = 0 \quad (22)$$

変数は、地球の軌道の半径、円軌道速度、太陽重力の地球距離での大きさを無次元化されており、 ρ は中心からの距離、 θ は移行角度、 τ は時間に相当する。 ε は地球距離 ($\rho=1$) における半径方向加速度の大きさである。このとき地球の公転周期は 2π となり、単位時間は 58.132 日である。単位距離、速度、加速度は、 $1.49597870 \times 10^{11}$ m, 29,784 m/s, 0.00593 m/s² である。(22) 式は角運動量保存則を表しており、角運動量 h は下記のように積分できる。

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{h}{\rho^2} \quad (23)$$

(21) 式を (19) 式に代入すると、

$$\frac{d^2 \rho}{d\tau^2} = \frac{h^2}{\rho^3} - (1 - \varepsilon) \frac{1}{\rho^2} \quad (24)$$

となり、以下のように書き直せる。

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 = \frac{h^2}{\rho^3} - (1 - \varepsilon) \frac{1}{\rho^2} \quad (25)$$

半径方向速度 $d\rho/d\tau$ は、(25) 式を ρ に関して、 ρ_0 から ρ まで積分することで得られる。

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)_0^2 + \frac{h^2}{2} \left(-\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \right) + (1 - \varepsilon) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \quad (26)$$

さらに、 $u = 1/\rho$ という変数変換を行い、独立変数を時間 τ から移行角度 θ に変換することで、(23) 式と (24) 式は、さらに簡易な方程式に変換することができる。

$$u'' + u = 1 - \varepsilon \quad (27)$$

プライムは、角度 θ に関する微分を示す。

8.2 半径方向加速による最適制御則

1次元の(27)式を用いて、反太陽方向に加速されつつ、地球円軌道から出発して、一度、地球軌道から離れて、また地球距離にまで戻ってきたときに、終端半径方向速度 $(d\rho/d\tau)_f$ を最大化、あるいは、逆半径速度 $(u')_f$ を最小化する最適制御問題を扱う (f は終端条件を示す)。これは、中心力であるために角運動量を保存しつつ、軌道エネルギーを最大化することに相当する。

目的は、 $(u')_f$ を最小化する、0と最大値の間の値を取ること ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{Max}$) ができる最適な加速度プログラムを求めることである。最適な加速度プログラムは、最適制御理論とポンドリヤーギンの最小原理に基づいて求める。逆半径距離のダイナミクスは、(27)式より、つぎの力学方程式で記述される。

$$u' = p \quad (28)$$

$$p' = -u + 1 - \varepsilon \quad (29)$$

最適制御理論を適用するために、つぎのハミルトニアンを導入する。

$$H = \lambda_u p + \lambda_p (-u + 1) - \lambda_p \varepsilon \quad (30)$$

このとき、(20)式より、随伴変数の運動方程式はつぎのようになる。

$$\lambda_u' = \lambda_p \quad (31)$$

$$\lambda_p' = -\lambda_u \quad (32)$$

ポンドリヤーギンの最小原理によれば、すべての時間において、そして、すべての可能な制御において、ハミルトニアン H は最小であることを要求する。したがって、最適な加速度プログラムはつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0; & \text{when } \lambda_p < 0 \\ \varepsilon &= \varepsilon_{Max}; & \text{when } \lambda_p > 0 \end{aligned} \quad (33)$$

宇宙機が地球距離まで戻ってくることを保証するための、終端における制約関数、 ψ はつぎの式で表される。

$$\psi = u_f - 1 = 0 \quad (34)$$

終端での半径速度を最大化することを目的とする評価関数 ϕ は、終端においてつぎのように定義される。

$$\phi = u'_f = p_f \quad (35)$$

付帯境界条件 (横断性条件) は、(34)式と(35)式より、

$$(\lambda_u)_f = v \quad (36)$$

$$(\lambda_p)_f = 1 \quad (37)$$

となる。最後に、状態変数の初期条件は、地球軌道から

出発することを考慮し、

$$u_0 = 1 \quad (38)$$

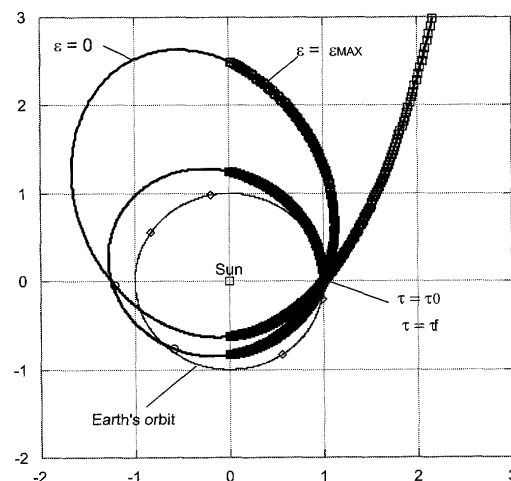
$$p_0 = 0 \quad (39)$$

となる。四つの連立線形微分方程式(28),(29),(31)式、および(32)式は、四つの境界条件(36)–(39)式、および、付帯境界条件を満たすために設定した未定乗数 v のもとで解くことができる。半径方向制御 ε は、(33)式より λ_p を考慮して求める。

地球距離帰還時の半径方向速度を最大化した最適制御軌道の例を第10図にあげる。本軌道においては、設計パラメータである最大加速度の大きさを $\varepsilon_{Max} = 0.2$ 、移行角度を $\theta_f = 2$ (2周) としたとき、初期および終端の半径方向速度は $(d\rho/d\tau)_0 = 0$ 、 $(d\rho/d\tau)_f = 0.80$ である。第10図においては、太線の部分が、加速度があるときを指している。最初の周回の遠日点距離は1.39で、2周目の遠日点距離は2.72である。また、2周回が終了し地球距離にある時刻 τ_f において、それ以降加速を行わない場合に到達可能な遠日点距離は5.01 (地球距離の5倍で木星距離に相当) である。2周回した時刻 τ_f 以降も加速を続ける場合、宇宙機は最終的に太陽系を脱出するエネルギーを獲得できる。なお、飛行時間 τ_f は、(21)式から導かれる次の式を積分することで得られ、第10図の場合は、2周回をするのに3.43年程度の飛行時間である。

$$d\tau/d\theta = 1/u^2 \quad (40)$$

もし、地球軌道から加速をオンオフせずずっと半径方向加速続けている場合には、遠日点距離は1.67に過ぎ



第10図 半径方向加速下の最適太陽系脱出軌道 [8]. 地球軌道上の初期位置 ($\tau = \tau_0$) から出発して、遠点に向かう領域 (太線) で半径方向に最大加速 ($\varepsilon = \varepsilon_{Max}$) を行い、遠点付近から近点にかけての領域 (細線) では慣性飛行 ($\varepsilon = 0$) を行うことで徐々に遠点距離を拡大している. Reprinted with permission of the American Institute of Aeronautics and Astronautics.

ず、これは、オンオフを許容する最適な加速度プログラムにより、大幅に大きなエネルギーを得られることを示している。

9. おわりに

地球周回軌道上で運用される、あるいは、月や惑星探査を行う宇宙機は、そのミッションの実現のために、まず地球から目標地点まで到達する必要がある、また、その軌道を維持する必要がある。今回は、移行軌道に焦点をおいたが、強い非線形重力環境における新しい軌道ダイナミクスの理解、軌道設計手法、最適化手法などにおいて今後も膨大な研究課題が広がっている分野である。

(2010年1月27日受付)

参考文献

- [1] 姿勢制御研究委員会編：人工衛星の力学と制御ハンドブック、培風館、pp. 74-75 (2007)
- [2] M. H. Kaplan: *Modern Spacecraft Dynamics & Control*, John Wiley & Sons, Inc., pp. 319-329 (1976)
- [3] H. Yamakawa, J. Kawaguchi, N. Ishii and H. Matsuo: On earth-moon transfer trajectory with gravitational capture; *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 85, Part. I, pp. 397-416 (1993)
- [4] 山川：宇宙探査ミッションにおける3体問題の役割；日本物理学会誌、Vol. 60, No. 10, pp. 808-810 (2005)
- [5] J. T. Betts: Survey of numerical methods for trajectory optimization; *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 2, pp. 193-207 (1998)
- [6] J. A. Sims, J. M. Longuski and A. J. Staugler: V-infinity leveraging for interplanetary missions: multiple-revolution orbit techniques; *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 3, pp. 408-415 (1997)
- [7] 山川、川口：月惑星探査の軌道計画；計測と制御、Vol. 39, No. 9, pp. 559-563 (2000)
- [8] H. Yamakawa: Optimal radially accelerated interplanetary trajectories; *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 43, No. 1, pp. 116-120 (2006)
- [9] T. Oyama, H. Yamakawa and Y. Omura: Orbital dynamics of solar sails for geomagnetic tail exploration; *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 45, No. 2, pp. 316-323 (2008)

- [10] H. Yamakawa: Orbital dynamics of sun-facing solar sails under the constraint of constant sail temperature; *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 54, No. 1, pp. 17-27 (2006)
- [11] H. Yamakawa, I. Funaki, Y. Nakayama, K. Fujita, H. Ogawa, S. Nonaka, H. Kuninaka, S. Sawai, H. Nishida, R. Asahi, H. Otsu and H. Nakashima: Magneto plasma sail: an engineering satellite concept and its application for outer planet missions; *Acta Astronautica*, Vol. 59, No. 8-11, pp. 777-784 (2006)
- [12] 山川、小川、藤田、野中、澤井、國中、船木、大津、中山：磁気プラズマセールによる外惑星探査；日本航空宇宙学会論文集、Vol. 52, No. 603, pp. 148-152 (2004)

著者略歴

やま かわ ひろし
山 川 宏



1965年9月生。1988年東京大学工学部航空学科卒業、1993年同大学院工学系研究科航空学専攻博士課程修了。同年4月宇宙科学研究所助手、1999年助教授、2003年宇宙航空研究開発機構助教授を経て、2006年京都大学生存圏研究所教授、工学研究科教授（協力講座）、2008年宇宙総合学ユニット副ユニット長（兼任）。その間、1997年3月より1998年3月まで米国航空宇宙局ジェット推進研究所（NASA/JPL）客員科学者、2002年1月より同年2月まで欧州宇宙機関（ESA）客員科学者、2000年より2006年まで日欧共同水星探査計画BepiColomboのスタディ・プロジェクトマネージャー。宇宙機の軌道ダイナミクスと制御、および、宇宙環境を利用した宇宙推進システムの研究に従事。博士（工学）。2000年第10回TEPIAハイテク・ビデオ・コンクール入選（共同受賞）、2001年日本科学未来館科学技術振興事業団感謝状、2002年宇宙科学技術連合講演会奨励賞。2003年小惑星探査ミッション「はやぶさ」の初期検討の貢献に対して、小惑星1996WQ1が(8923)Yamakawaと命名。2005年長期ビジョン検討チームとしてJAXA理事長賞（共同受賞）。日本航空宇宙学会評議員、American Institute of Aeronautics and Astronautics, American Astronautical Society, 地球電磁気・地球惑星圏学会、計測自動制御学会、日本応用数理学会、各会員。