

不可分財をもつ経済均衡のM凸劣モジュラ流による定式化

室田 一雄 (Kazuo Murota), 田村 明久 (Akihisa Tamura)
京大・数理研 (Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ.)

要旨: 本論文では, 複数の不可分財と分割可能な財である貨幣からなる市場の競争均衡を扱う. ここでのモデルにおいては, 生産者の費用関数が $M^{\natural}$ 凸関数であり, 消費者の効用関数は貨幣に関して準線形な $M^{\natural}$ 凹関数であるとする. 離散数学において近年提案された離散凸解析の理論を応用することにより, このモデルに競争均衡が存在するかどうかを判定する効率的なアルゴリズムを提案する.

1 序論

本論文では, 近年離散数学の分野で提案された「離散凸解析」の枠組みにより, 不可分財をもつ経済モデルの競争均衡について計算量の立場から議論をする. 中心的役割をなすものは $M^{\natural}$ 凹関数という概念で, これは Kelso と Crawford [12] により提案され Gul と Stacchetti [7] により研究された粗代替性と密接な関係をもつ概念である.

数理経済学の分野では, 不可分財をもつモデルや競争均衡の存在性に関する研究が多くの研究者によってなされてきた. Henry [8] はすべての不可分財が同一財であるモデルを研究した. Shapley と Shubik [23], Shapley と Scarf [22], Kaneko [10], Quinzii [21] や Gale [6] は, それぞれの経済主体が1つの財を所有し, 高々1つの財しか消費しないという経済モデルにおいて競争均衡の存在を示している. Kaneko [10] や Kaneko と Yamamoto [11] は, 販売者は同種の不可分財を幾つか所有し, 購入者は高々1つの不可分財を購入するという一般化割当市場において競争均衡の存在を明らかにした. 近年になって, Bikhchandani と Mamer [2], van der Laan, Talman と Yang [24], Beviá, Quinzii と Silva [1], Gul と Stacchetti [7] や Yang [25] などが, すべての不可分財は別種のものだが経済主体は複数の不可分財を使用できるというさらに一般的なモデルを扱っている. Danilov, Koshevoy と Murota [3] では, 離散凸解析の枠組みを用いたモデルが考えられ, このモデルにおいては経済主体は同一の不可分財を幾つでも生産や消費することが許されている. 彼らの結果は, 不可分財からなる交換経済において, それぞれの経済主体の効用が貨幣に関して準線形な単調非減少 $M^{\natural}$ 凹関数として表せるならば, 競争均衡が存在するという結果を導く (詳しくは3節参照).

一方, 離散数学の分野では, 劣モジュラ関数, 一般化ポリマトロイド, 付値マトロイドや凸解析などの既存の研究を統合した離散最適化の枠組みとして近年「離散凸解析」が Murota [13, 14, 16] によって提案された. 離散凸解析において, M 凸関数と $M^{\natural}$ 凸関数の概念は中心的役割を果たし, Murota [13, 14, 15], Fujishige と Murota [4], Fujishige と Yang [5], Murota と Shioura [17, 18, 19], Murota と Tamura [20] などによって研究がなされている. Fujishige と Yang は, 集合関数に対する $M^{\natural}$ 凹性と粗代替性の等価性を最初に指摘し, Murota と Tamura によって彼らの結果は一般の場合へと拡張された (3節参照).

本論文では, 複数の生産者と消費者が複数の不可分財を貨幣 (分割可能な財) を通して取り引きする経済モデルを扱う. それぞれの生産者は $M^{\natural}$ 凸となる費用関数を持ち, それぞれの消費者は貨幣に関して準線形な $M^{\natural}$ 凹関数となる効用関数をもつと仮定する. 我々の貢献は, このモデルにおいて競争均衡を求める効率的なアルゴリズムの提案である. 我々のアルゴリズムは2段階からなり, 第1段階では M 凸劣モジュラ流問題を解くことで競争均衡における生産量と消費量を決定し, 第2段階において最短路問題を解くことで均衡価格ベクトルを定める. 競争均衡が存在しない場合は, どちらかの問題が実行不可能となる. さらに, 最小均衡価格ベクトルや最大均衡価格ベクトルも同様に計算可能である.

2 モデル

まず幾つかの定義を与えよう. ここでは, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_+$ はそれぞれ実数全体, 非負実数全体, 整数全体, 非負整数全体からなる集合を表す. K を有限集合とする. ベクトル $q \in \mathbf{R}^K$ と関数 $f: \mathbf{Z}^K \rightarrow$

$\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して、2つの関数 $\langle q, x \rangle$ と $f[q](x)$ を次のように

$$\langle q, x \rangle = \sum_{k \in K} q(k)x(k), \quad f[q](x) = f(x) + \langle q, x \rangle \quad (x \in \mathbf{Z}^K)$$

と定義する。ただし、 $q(k)$ や $x(k)$ はベクトル q や x の第 k 成分を表している。また、関数 f の最小値集合、最大値集合と実効定義域をそれぞれ次のように定義する。

$$\begin{aligned} \arg \min f &= \{x \in \mathbf{Z}^K \mid f(x) \leq f(y) \quad (\forall y \in \mathbf{Z}^K)\}, \\ \arg \max f &= \{x \in \mathbf{Z}^K \mid f(x) \geq f(y) \quad (\forall y \in \mathbf{Z}^K)\}, \\ \text{dom } f &= \{x \in \mathbf{Z}^K \mid -\infty < f(x) < +\infty\}. \end{aligned}$$

関数 f と点 $x \in \text{dom } f$ に対して、

$$\partial_{\mathbf{R}} f(x) = \{p \in \mathbf{R}^K \mid f(y) - f(x) \geq \langle p, y - x \rangle \quad (\forall y \in \mathbf{Z}^K)\}$$

で定義される集合は、関数 f の点 x における劣微分と呼ばれ、その要素 p は f の x における劣勾配と呼ばれる。上記の定義から、

$$p \in \partial_{\mathbf{R}} f(x) \iff x \in \arg \min f[-p] \quad (1)$$

という関係が直ちに導かれる。本論文では凸関数に対して劣微分 $\partial_{\mathbf{R}}$ を上記のとおり定義したが、凹関数に対する劣微分 $\partial_{\mathbf{R}}$ を $\partial_{\mathbf{R}} f(x) = -\partial_{\mathbf{R}}(-f)(x)$ と定義する。

本論文で扱う経済均衡モデルを記述しよう。経済主体としては生産者と消費者が区別されているとして、生産者の集合を L 、消費者の集合を H と表す (L, H ともに有限集合と仮定する)。財としては、複数個の不可分財と貨幣を考え、不可分財の集合を K とする (K も有限集合と仮定する)。生産者 $l \in L$ の供給量ベクトルを $y_l = (y_l(k) : k \in K) \in \mathbf{Z}^K$ 、消費者 $h \in H$ の需要量ベクトルを $x_h = (x_h(k) : k \in K) \in \mathbf{Z}^K$ とする。ただし、生産者 l の消費する財 i については $y_l(i)$ は負の値を取り、生産する財 j については $y_l(j)$ は正の値を取るとする。逆に、消費者 h の消費する財 i については $x_h(i)$ は正の値を取り、労働のような供給する財 j については $x_h(j)$ は負の値を取るとする。生産者と消費者は、与えられた価格ベクトル $p = (p(k) : k \in K) \in \mathbf{R}^K$ の下で、それぞれ独立に自分の利益や満足度を最大にするように行動して財の生産量や消費量を決める。

生産者 $l \in L$ は、不可分財を $y \in \mathbf{Z}^K$ だけ生産するための費用関数 $C_l : \mathbf{Z}^K \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ によって記述される。価格 $p \in \mathbf{R}^K$ が与えられたとき、生産者 $l \in L$ は、利潤 $\langle p, y \rangle - C_l(y)$ を最大化するように生産量 $y_l \in \mathbf{Z}^K$ を定める。生産者 $l \in L$ の供給関数 $S_l : \mathbf{R}^K \rightarrow 2^{\mathbf{Z}^K}$ 、利潤関数 $\pi_l : \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$S_l(p) = \arg \max_{y \in \mathbf{Z}^K} \{\langle p, y \rangle - C_l(y)\} \quad (p \in \mathbf{R}^K), \quad (2)$$

$$\pi_l(p) = \max_{y \in \mathbf{Z}^K} \{\langle p, y \rangle - C_l(y)\} \quad (p \in \mathbf{R}^K) \quad (3)$$

と定義すると、 $y_l \in S_l(p)$ である。ここで、 $S_l(p) = \emptyset$ の可能性もあり、その場合には供給量 y_l は定義されないと解釈する。供給関数 S_l を供給対応と呼ぶこともある。また、集合 $S_l(p) \subseteq \mathbf{Z}^K$ を生産者 $l \in L$ の供給集合と呼ぶ。

消費者 $h \in H$ は、初期段階で不可分財と貨幣を保有しているとし、その保有量を $(x_h^\circ, m_h^\circ) \in \mathbf{Z}_+^K \times \mathbf{R}_+$ で表す。本モデルでは生産者の利潤は消費者に分配されるとする。生産者 $l \in L$ の利潤 $\pi_l(p)$ は、一定の分配率 θ_{lh} で消費者 $h \in H$ に分配される。ここで、 θ_{lh} はすべての $l \in L$ と $h \in H$ に対して非負であり、 $\sum_{h \in H} \theta_{lh} = 1$ がそれぞれの $l \in L$ について成り立つ。よって消費者 h の所得は、関数 $\beta_h : \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$

$$\beta_h(p) = \langle p, x_h^\circ \rangle + m_h^\circ + \sum_{l \in L} \theta_{lh} \pi_l(p) \quad (p \in \mathbf{R}^K)$$

により表現される。財 $(x_h, m_h) \in \mathbf{Z}^K \times \mathbf{R}$ に対する消費者 $h \in H$ の満足度は効用関数 $\bar{U}_h : \mathbf{Z}^K \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ によって表現されるものとし、さらに、効用関数の準線形性

$$\bar{U}_h(x, m) = U_h(x) + m \quad ((x, m) \in \mathbf{Z}^K \times \mathbf{R})$$

を仮定する。 $U_h : \mathbf{Z}^K \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は財の価値の貨幣への換算を意味する。どの消費者も無限の財を消費することは望まないであろうから、 $\text{dom } U_h$ は有界であると仮定しても不自然ではない。ここではさらに、各消費者 h の初期保有量における貨幣の量 m_h° が十分に大きいと仮定する。消費者 h は予算制約の下で自らの効用を最大化するように財の消費量 $(x_h, m_h) \in \mathbf{Z}^K \times \mathbf{R}$ を決定する。よって、消費者 h の行動は最適化問題

$$\begin{aligned} & \text{最大化} \quad U_h(x) + m \\ & \text{制約条件} \quad \langle p, x \rangle + m \leq \beta_h(p) \end{aligned}$$

として定式化できるが、 $\text{dom } U_h$ が有界で m_h° が十分大きいという仮定の下では、 $m = \beta_h(p) - \langle p, x \rangle$ と置くことにより、上記の問題は制約なしの最適化問題

$$\text{最大化} \quad U_h(x) - \langle p, x \rangle$$

に帰着できる。すなわち、消費者 $h \in H$ の需要関数 $D_h : \mathbf{R}^K \rightarrow 2^{\mathbf{Z}^K}$ を

$$D_h(p) = \arg \max_{x \in \mathbf{Z}^K} \{U_h(x) - \langle p, x \rangle\} \quad (p \in \mathbf{R}^K)$$

と定義すると、 $x_h \in D_h(p)$ かつ $m_h = \beta_h(p) - \langle p, x_h \rangle$ である。需要関数 D_h を需要対応と呼ぶこともある。また、集合 $D_h(p) \subseteq \mathbf{Z}^K$ を消費者 $h \in H$ の需要集合と呼ぶ。

消費量 $x_h \in \mathbf{Z}^K$ 、生産量 $y_l \in \mathbf{Z}^K$ 、価格ベクトル $p \in \mathbf{R}^K$ から成る組 $((x_h \mid h \in H), (y_l \mid l \in L), p)$ は、条件

$$x_h \in D_h(p) \quad (h \in H), \quad (4)$$

$$y_l \in S_l(p) \quad (l \in L), \quad (5)$$

$$\sum_{h \in H} x_h = \sum_{h \in H} x_h^\circ + \sum_{l \in L} y_l, \quad (6)$$

$$p \geq 0 \quad (7)$$

を満たすとき、競争均衡あるいは均衡と呼ばれ、そのときの価格ベクトルは均衡価格ベクトルと呼ばれる。すなわち、それぞれの経済主体は望むことを実現し、需給バランスが成り立ち、均衡価格ベクトルは非負となる。均衡を特徴付けるために、経済体系全体の生産費用と効用を集約した関数 $\Psi : \mathbf{Z}^K \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ を

$$\Psi(z) = \inf \left\{ \sum_{l \in L} C_l(y_l) - \sum_{h \in H} U_h(x_h) \mid \sum_{h \in H} x_h - \sum_{l \in L} y_l = z \right\} \quad (z \in \mathbf{Z}^K) \quad (8)$$

と定義する。このとき、次のような特徴付けが成立する。

補題 2.1 与えられた初期総保有量 $x^\circ = \sum_{h \in H} x_h^\circ$ に対して、次の主張が成立する。

(a) 均衡が存在する必要十分条件は $(-\partial_{\mathbf{R}} \Psi(x^\circ)) \cap \mathbf{R}_+^K \neq \emptyset$ 。

(b) ベクトル $p \in \mathbf{R}^K$ が均衡価格ベクトルとなるための必要十分条件は $p \in (-\partial_{\mathbf{R}} \Psi(x^\circ)) \cap \mathbf{R}_+^K$ 。

(c) 組 $((x_h \mid h \in H), (y_l \mid l \in L))$ が、ある p (非負ベクトルであるとは限らない) に対して、条件 (4), (5), (6) を満たすならば、

$$-\partial_{\mathbf{R}} \Psi(x^\circ) = \left(\bigcap_{h \in H} \partial_{\mathbf{R}}' U_h(x_h) \right) \cap \left(\bigcap_{l \in L} \partial_{\mathbf{R}} C_l(y_l) \right)$$

であり、さらに $(-\partial_{\mathbf{R}} \Psi(x^\circ)) \cap \mathbf{R}_+^K \neq \emptyset$ ならば、任意の $p' \in (-\partial_{\mathbf{R}} \Psi(x^\circ)) \cap \mathbf{R}_+^K$ に対して、 $((x_h \mid h \in H), (y_l \mid l \in L), p')$ は均衡となる。 ■

3 M 凸性

まず M 凸関数および $M^\natural$ 凸関数の概念と幾つかの結果を紹介する。 V を有限集合とし、ベクトル $z = (z(v) : v \in V) \in \mathbf{Z}^V$ の正の台と負の台をそれぞれ次のように定義する。

$$\text{supp}^+(z) = \{v \in V \mid z(v) > 0\}, \quad \text{supp}^-(z) = \{v \in V \mid z(v) < 0\}.$$

部分集合 $S \subseteq V$ に対して、その特性ベクトル χ_S を、 $v \in S$ ならば $\chi_S(v) = 1$ 、それ以外では $\chi_S(v) = 0$ と定義し、簡単のために V の各要素 u については $\chi_{\{u\}}$ の代わりに χ_u と表記する。

関数 $f : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が M 凸関数 [14] であるとは、 $\text{dom } f \neq \emptyset$ であって、 f が交換公理

(M-EXC) 任意の $x, y \in \text{dom } f$ と任意の $u \in \text{supp}^+(x - y)$ に対して、ある $v \in \text{supp}^-(x - y)$ が存在して

$$f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_u + \chi_v) + f(y + \chi_u - \chi_v)$$

を満たすことと定義する。

条件 (M-EXC) から、M 凸関数の実効定義域は成分和が一定の超平面 $\{x \in \mathbf{R}^V \mid x(V) = \text{constant}\}$ (ただし $x(V) = \sum_{v \in V} x(v)$) の上に乗っているの、ある座標軸方向に沿って射影しても情報は失われない。1次元高い空間で定義された M 凸関数からこのような射影によって得られる関数を $M^\natural$ 凸関数と呼ぶ。すなわち、 V とこれに含まれない新しい要素 0 の和集合を $\hat{V} = \{0\} \cup V$ としたとき、関数 $f : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が $M^\natural$ 凸関数 [17] であるとは、 $\text{dom } f \neq \emptyset$ であって、 f がある M 凸関数 $\hat{f} : \mathbf{Z}^{\hat{V}} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ によって

$$f(x) = \hat{f}(x_0, x) \quad \text{ただし } x_0 = -x(V)$$

と表現されることと定義する。逆に、 $M^\natural$ 凸関数 f によって対応する M 凸関数 $\hat{f}$ を

$$\hat{f}(x_0, x) = \begin{cases} f(x) & (x_0 = -x(V)) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定めることもできる。 $M^\natural$ 凸関数の最小解は効率的に判定できる特徴付けを有する。

定理 3.1 ([13, 14]) $M^\natural$ 凸関数 $f : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ と $x \in \text{dom } f$ に対して、

$$f(x) \leq f(y) \quad (\forall y \in \mathbf{Z}^V) \iff f(x) \leq f(x - \chi_u + \chi_v) \quad (\forall u, v \in \{0\} \cup V). \quad \blacksquare$$

ここでは、最小費用流問題や劣モジュラ流問題の拡張である M 凸劣モジュラ流問題 [15] を簡単に紹介する。M 凸劣モジュラ流問題の入力は、有向ネットワーク $N = (V, A, \gamma, \underline{c}, \bar{c})$ と M 凸関数 $f : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ より成り、 V は頂点集合、 A は有向辺集合、 $\gamma : A \rightarrow \mathbf{R}$ は辺上の費用関数、 $\underline{c} : A \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ と $\bar{c} : A \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ は辺容量の下限と上限を表す関数である。有向辺 $a = (u, v) \in A$ に対して、 u と v はそれぞれ a の始点と終点と呼ばれ、 a は u から出る辺、 v へ入る辺と呼ばれる。各頂点 v に対して、 δ^+v と δ^-v はそれぞれ v から出る辺全体と v へ入る辺全体を表す。ネットワーク N における流れ ξ とは、関数 $\xi : A \rightarrow \mathbf{Z}$ と定義される (ここでは整数値をとる流れのみを考える)。流れ ξ から次のように導かれる関数 $\partial\xi : V \rightarrow \mathbf{Z}$

$$\partial\xi(v) = \sum \{\xi(a) \mid a \in \delta^+v\} - \sum \{\xi(a) \mid a \in \delta^-v\} \quad (v \in V)$$

は、流れ ξ の境界と呼ばれる。M 凸劣モジュラ流問題 (MSFP) は次のように定式化される。

$$\text{最小化} \quad \Gamma(\xi) = \sum_{a \in A} \gamma(a)\xi(a) + f(\partial\xi) \quad (9)$$

$$\text{制約条件} \quad \underline{c}(a) \leq \xi(a) \leq \bar{c}(a) \quad (a \in A), \quad (10)$$

$$\partial\xi \in \text{dom } f, \quad (11)$$

$$\xi \in \mathbf{Z}^A. \quad (12)$$

流れ ξ は (10), (11) と (12) を満たすとき, 実行可能流と呼ばれる. 実行可能流の中で (9) の目的関数を最小化するものを最適流と呼ぶ. 最適流は頂点上のポテンシャル $p: V \rightarrow \mathbf{R}$ によって次のように特徴付けられる.

定理 3.2 ([15]) ネットワーク $N = (V, A, \gamma, c, \bar{c})$ と M 凸関数 f を MSFP の入力とする. 実行可能流 $\xi: A \rightarrow \mathbf{Z}$ に対して, 次の条件は等価である.

(OPT) ξ は最適流である.

(POT) 次の条件を満たすポテンシャル $p: V \rightarrow \mathbf{R}$ が存在する.

- (i) $\gamma(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a) > 0 \implies \xi(a) = c(a),$
 $\gamma(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a) < 0 \implies \xi(a) = \bar{c}(a),$
- (ii) $\partial \xi \in \arg \min f[-p].$

MSFP に対する解法は [15] と [9] で提案されており, これらの解法は最適流と最適ポテンシャルの両方を求める. 特に, 後者の解法は $|V|$ と $\log_2 C$ に関する多項式時間で終了する. ただし, C は

$$C \leq \max_{a \in A} |\gamma(a)| + 2 \max_{x \in \text{dom } f} |f(x)|$$

を満たすある定数である.

関数 $U: \mathbf{Z}^K \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は, すべての $x, y \in \text{dom } U$ に対して, $x \leq y \implies U(x) \leq U(y)$ を満たすとき単調非減少と呼ばれる. Gul と Stacchetti [7] は, 効用関数が粗代替性と単調非減少性をもつ交換経済 ($L = \emptyset$ の場合) における均衡の存在を示した. 次の定理 3.3 はこの結果の拡張となる. 定理 3.3 と定理 3.4 は, [3] の結果より導き出せるが, [16] において陽に述べられている.

定理 3.3 ([3, 16]) 交換経済 ($L = \emptyset$ のとき) において, 各効用関数 U_h が単調非減少かつ $M^{\natural}$ 凹ならば, 任意の初期総保有量 $x^0 \in \sum_{h \in H} \text{dom } U_h$ に対して, 均衡 $((x_h \mid h \in H), p)$ が存在する. ■

定理 3.4 ([3, 16]) 2節で定義したモデルにおいて, それぞれの費用関数 C_l が $M^{\natural}$ 凸関数でそれぞれの効用関数 U_h が $M^{\natural}$ 凹関数であるとする. もし, すべての財を分割可能とした連続モデルにおいて与えられた初期総保有量に対して均衡が存在するならば, 不可分財から成る均衡 $((x_h \mid h \in H), (y_l \mid l \in L), p)$ も存在する. ここで, 連続モデルにおける費用関数は C_l の凸拡張であり効用関数は U_h の凹拡張であるとする. ■

均衡価格ベクトル全体も良い性質をもつ凸多面体 ($L^{\natural}$ 凸多面体と呼ばれるもの) となることが知られている. 凸多面体 $P \subseteq \mathbf{R}^K$ が $L^{\natural}$ 凸多面体 [4, 18] であるとは,

$$p, q \in P \implies (p - \alpha \mathbf{1}) \vee q, p \wedge (q + \alpha \mathbf{1}) \in P \quad (0 \leq \forall \alpha \in \mathbf{R}) \quad (13)$$

を満たすことと定義する.

定理 3.5 ([16]) 2節で定義したモデルにおいて, それぞれの費用関数 C_l が $M^{\natural}$ 凸関数でそれぞれの効用関数 U_h が $M^{\natural}$ 凹関数であるとし, さらに初期総保有量 x^0 に対して均衡が存在すると仮定する. 均衡価格ベクトル全体からなる集合 $P^*(x^0)$ は $L^{\natural}$ 凸多面体となる. 特に, (13) において $\alpha = 0$ とした場合により,

$$p, q \in P^*(x^0) \implies p \vee q, p \wedge q \in P^*(x^0) \quad (14)$$

となる. (14) より最小均衡価格ベクトルが存在し, さらには, $P^*(x^0)$ が有界ならば最大均衡価格ベクトルも存在する. ■

4 均衡計算

この節では本論文の主結果を述べる。ここでは、それぞれの生産関数 C_l が M^h 凸関数でそれぞれの効用関数 U_h が M^h 凹関数である場合に、どのように均衡が計算されるかを示す。まずは均衡計算を M 凸劣モジュラ流問題 (MSFP) として定式化する。MSFP の解は、条件 (4), (5) と (6) を満たす生産量と消費量についての情報、および非負性は保証されないが価格ベクトルについての情報を与える。これが我々のアルゴリズムの第1段階である。第2段階においては、最短路問題を解くことにより均衡価格ベクトル (非負であるもの) の存在判定と求解を行なう。我々のアルゴリズムでは、均衡が存在するならばそれを求め、もし存在しないならば MSFP あるいは最短路問題が実行不可能となる。また第2段階は最小均衡価格ベクトルや最大均衡価格ベクトルを求めるように容易に変更できる。

任意のベクトル $z \in \mathbf{R}^K$ に対して、 $\hat{z}$ はベクトル $(-z(K), z) \in \mathbf{R}^{\{0\} \cup K}$ (第0成分は他の成分和の符号を反転させたもの) を表すとする。 M^h 凸関数 $C_l : \mathbf{Z}^K \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に対して、対応する M 凸関数 $\hat{C}_l : \mathbf{Z}^{\{0\} \cup K} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$\hat{C}_l(y_0, y) = \begin{cases} C_l(y) & (y_0 = -y(K)) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases} \quad (l \in L)$$

で定義する。また、 M^h 凹関数 $U_h : \mathbf{Z}^K \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対して、対応する M 凹関数 $\hat{U}_h : \mathbf{Z}^{\{0\} \cup K} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を

$$\hat{U}_h(x_0, x) = \begin{cases} U_h(x) & (x_0 = -x(K)) \\ -\infty & (\text{その他}) \end{cases} \quad (h \in H)$$

で定義する。式 (8) と同様に、総費用関数を

$$\hat{\Psi}(\tilde{z}) = \inf \left\{ \sum_{l \in L} \hat{C}_l(\tilde{y}_l) - \sum_{h \in H} \hat{U}_h(\tilde{x}_h) \mid \sum_{h \in H} \tilde{x}_h - \sum_{l \in L} \tilde{y}_l = \tilde{z} \right\} \quad (\tilde{z} \in \mathbf{Z}^{\{0\} \cup K})$$

と定義する。関数 $\hat{\Psi}$ は、 M 凸関数 $\hat{C}_l$ ($l \in L$)、 $-\hat{U}_h$ ($h \in H$) の $\mathbf{Z}^{\{0\} \cup K}$ 上の合成積となっている。 M 凸関数の合成積は再び M 凸関数となり、さらには MSFP により計算できることが知られているが [13], ここでは $\hat{\Psi}(\hat{x}^\circ)$ がどのように計算されるかを示す。関数値 $\hat{\Psi}(\hat{x}^\circ)$ を計算するための MSFP の入力は次のように定められる。有向2部グラフ $G = (V^+, V^-, A)$ で、頂点集合の分割 V^+, V^- と辺集合 A が次のように定義されるものを考える。

$$\begin{aligned} V^+ &= V_e^+ \cup \left(\bigcup_{l \in L} V_l^+ \right), & V^- &= \bigcup_{h \in H} V_h^-, \\ V_e^+ &= \{k_e^+ \mid k \in \{0\} \cup K\}, \\ V_l^+ &= \{k_l^+ \mid k \in \{0\} \cup K\} & (l \in L), \\ V_h^- &= \{k_h^- \mid k \in \{0\} \cup K\} & (h \in H), \\ A &= \{(k_l^+, k_h^-) \mid l \in L, h \in H, k \in \{0\} \cup K\} \cup \{(k_e^+, k_h^-) \mid h \in H, k \in \{0\} \cup K\}. \end{aligned}$$

ここで、 V_e^+, V_l^+ や V_h^- は $\{0\} \cup K$ のコピーであるとみなす。各辺 $a \in A$ に対して、容量の下限を $\underline{c}(a) = -\infty$, 容量の上限を $\bar{c}(a) = +\infty$, 費用を $\gamma(a) = 0$ と定める。 $\{\hat{x}^\circ\}$ の指示関数 $\delta_e : \mathbf{Z}^{V_e^+} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

$$\delta_e(\tilde{w}) = \begin{cases} 0 & (\tilde{w} = \hat{x}^\circ) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

を用いて関数 $f : \mathbf{Z}^{V^+ \cup V^-} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$f(\tilde{w}, (\tilde{y}_l \mid l \in L), (\tilde{x}_h \mid h \in H)) = \delta_e(\tilde{w}) + \sum_{l \in L} \hat{C}_l(\tilde{y}_l) - \sum_{h \in H} \hat{U}_h(-\tilde{x}_h)$$

と定義する (ただし $\tilde{w} \in \mathbf{Z}^{V_e^+}$, $\tilde{y}_l \in \mathbf{Z}^{V_l^+}$ ($l \in L$), $\tilde{x}_h \in \mathbf{Z}^{V_h^-}$ ($h \in H$) である). 関数 $\hat{C}_l$ ($l \in L$) は M 凸関数であり, $\hat{U}_h$ ($h \in H$) は M 凹関数であることより, 関数 f は M 凸関数となる. 上記で定義した有向2部グラフ G と M 凸関数 f が, $\hat{\Psi}(\hat{x}^0)$ を計算するための MSFP の入力となる.

上記の MSFP を解くことによって得られる消費量や生産量が均衡の条件 (4), (5) と (6) を満たし, さらには最適ポテンシャルが非負ベクトルならばこれが均衡価格ベクトルに対応することが, 次の定理によって保証される.

定理 4.1 先に定義した MSFP が, 最適流 $\xi \in \mathbf{Z}^A$ と $\bar{p}(0_e^+) = 0$ である最適ポテンシャル $\bar{p} \in \mathbf{R}^{V^+ \cup V^-}$ をもつと仮定する (最適ポテンシャルが存在するならば $\bar{p}(0_e^+) = 0$ を満たすものが存在することに注意されたい). 最適流の境界と最適ポテンシャルを用いて

$$x_h^* = -\partial \xi|_{V_h^- \setminus \{0_h^-\}} \quad (h \in H), \quad y_l^* = \partial \xi|_{V_l^+ \setminus \{0_l^+\}} \quad (l \in L), \quad p = \bar{p}|_{V_e^+ \setminus \{0_e^+\}}$$

と定義し, ここでは x_h^* , y_l^* と p を K 上のベクトルともみなす. このとき, 次の主張が成り立つ.

- (a) $x^0 \in \arg \min \Psi[p]$.
- (b) $x^0 + \sum_{l \in L} y_l^* = \sum_{h \in H} x_h^*$.
- (c) $x_h^* \in \arg \max U_h[-p] \quad (h \in H)$.
- (d) $y_l^* \in \arg \min C_l[-p] \quad (l \in L)$.

さらに, $p \geq 0$ ならば, $((x_h^* | h \in H), (y_l^* | l \in L), p)$ は均衡となる. また, 均衡が存在するならば, $((x_h^* | h \in H), (y_l^* | l \in L))$ はある均衡の消費量と生産量となる. ■

MSFP に対する解法により, 組 $((x_h^* | h \in H), (y_l^* | l \in L), p)$ を求めることができるが, もし最適ポテンシャル p が非負であったならばこれは初期総保有量 x^0 に対する均衡となる.

次に, すべての非負最適ポテンシャルの集合, すなわち, すべての均衡価格ベクトルの集合がある種の線形不等式系で記述できることを示そう. すなわち, 均衡価格ベクトルの存在性は線形計画問題を解くことにより判定できる. また, 均衡が存在する場合に最小均衡価格ベクトルや最大均衡価格ベクトルも同様に線形計画問題を解くことで得られる. さらに, これらの線形計画問題は, 組合せアルゴリズムによって効率的に解くことができる最短路問題へと帰着できる.

均衡価格ベクトル全体集合の不等式表現を得るために, まずは定理 4.1 の (a) が成り立つための必要十分条件を与えよう. 補題 2.1 と関係式 (1) より次の関係を得る.

$$x^0 \in \arg \min \Psi[q] \Leftrightarrow \begin{cases} x_h^* \in \arg \max U_h[-q] & (h \in H) \\ y_l^* \in \arg \min C_l[-q] & (l \in L). \end{cases} \quad (15)$$

定理 3.1 より,

$$y_l^* \in \arg \min C_l[-q] \Leftrightarrow \begin{cases} C_l(y_l^*) - C_l(y_l^* - \chi_j) \leq q(j) \leq C_l(y_l^* + \chi_j) - C_l(y_l^*) & (j \in K) \\ q(j) - q(i) \leq C_l(y_l^* - \chi_i + \chi_j) - C_l(y_l^*) & (i, j \in K, i \neq j) \end{cases} \quad (16)$$

が示され, さらに M⁺ 凹関数に対する同様の最適性規準より

$$x_h^* \in \arg \max U_h[-q] \Leftrightarrow \begin{cases} U_h(x_h^* + \chi_j) - U_h(x_h^*) \leq q(j) \leq U_h(x_h^*) - U_h(x_h^* - \chi_j) & (j \in K) \\ q(j) - q(i) \leq U_h(x_h^*) - U_h(x_h^* + \chi_i - \chi_j) & (i, j \in K, i \neq j) \end{cases} \quad (17)$$

が示される. 関係式 (15), (16) と (17) より,

$$x^0 \in \arg \min \Psi[q] \Leftrightarrow \begin{cases} l(j) \leq q(j) \leq u(j) & (j \in K) \\ q(j) - q(i) \leq u(i, j) & (i, j \in K, i \neq j) \end{cases} \quad (18)$$

を得るが、ここでは $l(\cdot)$, $u(\cdot)$, $u(\cdot, \cdot)$ は次のように定義される。

$$l(j) = \max \left\{ \max_{h \in H} \{U_h(x_h^* + \chi_j) - U_h(x_h^*)\}, \max_{l \in L} \{C_l(y_l^*) - C_l(y_l^* - \chi_j)\} \right\}, \quad (19)$$

$$u(j) = \min \left\{ \min_{h \in H} \{U_h(x_h^*) - U_h(x_h^* - \chi_j)\}, \min_{l \in L} \{C_l(y_l^* + \chi_j) - C_l(y_l^*)\} \right\}, \quad (20)$$

$$u(i, j) = \min \left\{ \min_{h \in H} \{U_h(x_h^*) - U_h(x_h^* + \chi_i - \chi_j)\}, \min_{l \in L} \{C_l(y_l^* - \chi_i + \chi_j) - C_l(y_l^*)\} \right\}. \quad (21)$$

ここで、任意の $i, j \in K$ ($i \neq j$) に対して、 $l(j) < +\infty$, $u(j) > -\infty$, $u(i, j) > -\infty$ が成立することを注意しておく。

先に初期総保有量 x° に対する均衡価格ベクトル全体を $P^*(x^\circ)$ と記述したことを思いだそう。補題 2.1 の (b) は $P^*(x^\circ) = (-\partial_{\mathbf{R}} \Psi(x^\circ)) \cap \mathbf{R}_+^K$ であることを主張している。上記のことより、 $P^*(x^\circ)$ は $((x_h^* | h \in H), (y_l^* | l \in L))$ を用いて記述することができる。

定理 4.2 初期総保有量 x° に対する均衡価格ベクトル全体 $P^*(x^\circ)$ は

$$P^*(x^\circ) = \left\{ q \in \mathbf{R}^K \mid \begin{array}{ll} \max\{0, l(j)\} \leq q(j) \leq u(j) & (j \in K) \\ q(j) - q(i) \leq u(i, j) & (i, j \in K, i \neq j) \end{array} \right\} \quad (22)$$

と多面体表現される。ここで、 $l(j)$, $u(j)$ や $u(i, j)$ は (19), (20) や (21) のように $((x_h^* | h \in H), (y_l^* | l \in L))$ によって定まる。 ■

定理 4.2 より、 $P^*(x^\circ)$ の非空性は線形計画問題を解くことにより判定できる。 $P^*(x^\circ)$ の最大ベクトルは成分和を最大にするという事実より、最大均衡価格ベクトルが存在するならば、それは次の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \sum_{k \in K} q(k) \\ \text{制約条件} & \max\{0, l(j)\} \leq q(j) \leq u(j) \quad (j \in K) \\ & q(j) - q(i) \leq u(i, j) \quad (i, j \in K, i \neq j) \end{array} \quad (23)$$

を解けば得られる。問題 (23) は簡単に 1 対多型の最短路問題に帰着され、同様に、最小均衡価格ベクトルも最短路問題を解くことで求められる。

定理 4.3 均衡価格ベクトルが存在する必要十分条件は、問題 (23) が実行可能となることである。また、最小均衡価格ベクトルや最大均衡価格ベクトルは最短路問題を解くことで得られる。 ■

定理 4.1 と定理 4.3 をまとめると我々の最終結果である次の定理が得られる。

定理 4.4 我々が扱った経済モデルに均衡が存在するか否かは、M 凸劣モジュラ流問題と最短路問題を解くことで判定できる。もし均衡が存在するならば、前者の問題は均衡における消費量と生産量を決定し、後者は均衡価格ベクトルを定め、最小均衡価格ベクトルや最大均衡価格ベクトルも求めることができる。もし均衡が存在しないならば、どちらかの問題が実行不可能となる。また、均衡の存在判定は効率的に行なえる。 ■

参考文献

- [1] Beviá, C., M. Quinzii and J. A. Silva, 1999, Buying several indivisible goods, *Mathematical Social Sciences* 37, 1–23.
- [2] Bikhchandani, S. and J. W. Mamer, 1997, Competitive equilibrium in an exchange economy with indivisibilities, *Journal of Economic Theory* 74, 385–413.

- [3] Danilov, V., G. Koshevoy, and K. Murota, 2001, Discrete convexity and equilibria in economies with indivisible goods and money, *Mathematical Social Sciences* 41, 251–273.
- [4] Fujishige, S. and K. Murota, 2000, Notes on L-/M-convex functions and the separation theorems, *Mathematical Programming* 88, 129–146.
- [5] Fujishige, S. and Z. Yang, 2000, A note on Kelso and Crawford's gross substitutes condition, preprint.
- [6] Gale, D., 1984, Equilibrium in a discrete exchange economy with money, *International Journal of Game Theory* 13, 61–64.
- [7] Gul, F. and E. Stacchetti, 1999, Walrasian equilibrium with gross substitutes, *Journal of Economic Theory* 87, 95–124.
- [8] Henry, C., 1970, Indivisibilit  s dans une economie d'  changes, *Econometrica* 38, 542–558.
- [9] Iwata, S. and M. Shigeno, Conjugate scaling algorithm for Fenchel-type duality in discrete convex optimization, *SIAM Journal on Optimization*, to appear.
- [10] Kaneko, M., 1982, The central assignment game and the assignment markets, *Journal of Mathematical Economics* 10, 205–232.
- [11] Kaneko, M. and Y. Yamamoto, 1986, The existence and computation of competitive equilibria in markets with an indivisible commodity, *Journal of Economic Theory* 38, 118–136.
- [12] Kelso, Jr., A. S. and V. P. Crawford, 1982, Job matching, coalition formation, and gross substitutes, *Econometrica* 50, 1483–1504.
- [13] Murota, K., 1996, Convexity and Steinitz's exchange property, *Advances in Mathematics* 124, 272–311.
- [14] Murota, K., 1998, Discrete convex analysis, *Mathematical Programming* 83, 313–371.
- [15] Murota, K., 1999, Submodular flow problem with a nonseparable cost function, *Combinatorica* 19, 87–109.
- [16] Murota, K., 2001, Discrete Convex Analysis (in Japanese) (Kyoritsu-Shuppan, Tokyo) to appear.
- [17] Murota, K. and A. Shioura, 1999, M-convex function on generalized polymatroid, *Mathematics of Operations Research* 24, 95–105.
- [18] Murota, K. and A. Shioura, 2000, Extension of M-convexity and L-convexity to polyhedral convex functions, *Advances in Applied Mathematics* 25, 352–427.
- [19] Murota, K. and A. Shioura, 2001, Relationship of M-/L-convex functions with discrete convex functions by Miller and by Favati–Tardella, *Discrete Applied Mathematics*, to appear.
- [20] Murota, K. and A. Tamura, 2001, New characterizations of M-convex functions and their applications to economic equilibrium models with indivisibilities, *Discrete Applied Mathematics*, to appear.
- [21] Quinzii, M., 1984, Core and competitive equilibria with indivisibilities, *International Journal of Game Theory* 13, 41–60.
- [22] Shapley, L. S. and H. Scarf, 1974, On cores and indivisibilities, *Journal of Mathematical Economics* 1, 23–37.
- [23] Shapley, L. S. and M. Shubik, 1972, The assignment game I: The core, *International Journal of Game Theory* 1, 111–130.
- [24] van der Laan, G., D. Talman and Z. Yang, 1997, Existence of an equilibrium in a competitive economy with indivisibilities and money, *Journal of Mathematical Economics* 28, 101–109.
- [25] Yang, Z., 2000, Equilibrium in an exchange economy with multiple indivisible commodities and money, *Journal of Mathematical Economics* 33, 353–365.