

スペクトル法による平面 Poiseuille 流 遷移の数値シミュレーション

航技研 山本 稀義 (Kiyoshi Yamamoto)
岩手大・工 細川 巖 (Iwao Hosokawa)

1. はじめに

計算機の発達に伴っていろいろな流体现象の数値シミュレーションが可能となってきたが、乱流についてもこれは例外ではなくて、LESや直接数値シミュレーションによる研究が盛んになって来た。しかし、乱流の数値シミュレーションでは、流れの中に流体力学的不安定性が存在するため、層流に比べてより高い計算精度が必要となるので、今日でも、数値シミュレーションが成功する流れはごく限られた範囲である。その中で、乱流への遷移領域は、乱流としては比較的大スケールの変動が支配的であるので、直接数値シミュレーションによる解明が期待される領域である。たゞ、前述の様に、それにはナビエ・ストークス方程式の高精度な数値計算が必要となるが、これに適した計算法としてスペクトル法がある。

スペクトル法は流れの速度場を適当な直交関数系で展開し、速度場の時間的发展をその展開係数について時間的に解く方法で、通常の物理空間における差分法に比べて、差分に関連した誤差等を含まない事で、計算精度が良い事が知られている。中でも、直交関数にフーリエ級数を使用するフーリエ・スペクトル法は計算が簡単で、かつ、その計算精度も良い事が知られていて、²⁾ これまでしばしば乱流の数値シミュレーションに使用されて来た。^{3), 4)} しかし、その反面、流れの境界条件として周期条件が必要となるので、固体壁の有る剪断流の計算には適用が困難と考えられ、例えば、平面 Poiseuille 流や境界層の計算では、壁に垂直方向にチェビシェフ級数展開を適用するチェビシェフ・スペクトル法が使用されて来た。^{5), 6)} しかし、チェビシェフ・スペクトル法はフーリエ・スペクトル法に比べて計算式が繁雑となると共に、純粋なスペクトル法の取扱いが困難となる欠点がある。¹⁾

これに対して、筆者は先に、フーリエ・スペクトル法を少し修正するだけで壁境界条件を満たす新しいスペクトル法を提案し、⁷⁾ その応用として、平面 Poiseuille 流遷移の簡単な数値シミュレーション結果を報告したが、⁸⁾ ここではこれをさらに拡張した計算結果について述べる。

平面 Poiseuille 流はこれまで乱流の研究に最も広く使用さ

れて来た流れで、遷移の機構としては次の様な事が知られている。まず、臨界レイノルズ数 R_c が線型安定理論より 5772 と求められている。⁹⁾ しかし、実験的にはレイノルズ数 R が 1000 程度から乱流へ遷移する事が知られていて、¹⁰⁾ この $R < R_c$ における遷移の力学機構を解明する事は単に平面 Poiseuille 流だけでなく、その他の乱流の遷移機構を理解する上でも非常に重要である。これに関して、現在推定されている力学機構は： $R < R_c$ で不安定となる特別な 2次元有限振幅波、T-S波、が存在し、このT-S波が存在する事によって、それまで安定であった3次元微小擾乱が不安定となる：とする2段階の非線型機構である。¹¹⁾ 本研究は平面 Poiseuille 流のこの亜臨界非線型遷移機構を直接数値シミュレーションによって検証する事を目的として、流れのレイノルズ数を 5000 と置き、初期に有限振幅T-S波に加えて3次元微小擾乱を与えた場合の3次元擾乱の時間的増幅を数値計算する。

平面 Poiseuille 流中の2次元有限振幅波による2次不安定機構は Nishioka et al ¹²⁾ によって実験的に調べられ、平板境界層と同様に、T-S波の peak-valley 機構が重要である事が報告されている。¹³⁾ 一方、最近の Saric & Thomas ¹⁴⁾ の境界層の実験によると、T-S波の peak-valley 機構とは異なるT-S波の subharmonic が主導する遷移機構が観測

されていて、これは Craik¹⁵⁾ や Herbert¹⁶⁾ の理論に対応する事が示されている。他方、これに相当する平面 Poiseuille 流の実験はまだ必ずしも明らかではないが、¹⁴⁾ この様な T-S 波の subharmonic の主導する遷移機構の存在を数値的に検証する事は平面 Poiseuille 流の遷移を解明する上でも極めて重要であるので、ここでは特に、T-S 波の subharmonic を含めた計算を行なう。これに対して、文献 8) の計算では T-S 波の subharmonic は含まれていない。

2. スペクトル法による平面 Poiseuille 流の計算

2.1 流れの境界条件

流れの速度場をフーリエ級数で

$$u(x, t) = \sum_k u(k, t) \exp(ik \cdot x) \quad (2.1)$$

と展開し、速度場の時間的变化を $u(k, t)$ について解く。一般に、速度場を (2.1) の様な直交関数系で展開し、流れを物理空間 $u(x, t)$ で解く代りにスペクトル空間 $u(k, t)$ について解く計算法をスペクトル法と言う。¹⁾ (以後は簡単のため $u(x, t)$, $u(k, t)$ 等の時間 t を省略して単に $u(x)$, $u(k)$ 等と書く。) (2.1) では流れの周期性が仮定されていて、これを x, y, z 方向に L_x, L_y, L_z とすれば、波数 k は $k_\alpha = 2\pi n_\alpha / L_\alpha$ (n_α は整数) である。しかし、今、

$\pm L_z/2$ に壁のある平面 Poiseuille 流を考えると, そこでは

$$u(x) = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm L_z/2 \quad (2.2)$$

となる事が必要となり, (2.1) は一般的にはこれを満たさない。しかし, もしフーリエ成分の間に

$$\sum_{n_z} (-1)^{n_z} u(k_x, k_y, \frac{2\pi}{L_z} n_z) = 0 \quad (2.3)$$

が成立していると, (2.1) は (2.2) を恒等的に満足する事が出来る。(2.3) は $u(k)$ について同次な束縛条件で, これらの成分が力学的に互に独立ではない事を意味するが, この様な非独立な力学変数から独立な少数の力学変数を導く簡単な変換が先に筆者によって提案されている。⁷⁾ すなわち, (2.3) の束縛条件を一般に

$$\sum_{n=1}^N F_n a_n = 0 \quad (2.4)$$

と表わすと

$$b_m = \sum_{n=1}^N \phi_{mn} a_n \quad \text{for } m=1, \dots, N-1 \quad (2.5)$$

の変換で与えられる。ここで ϕ_{mn} は N 次元空間のベクトル $\{F_n\}$ に直交する $N-1$ 個の単位ベクトルから成る直交変換のマトリックスである。⁷⁾ 結局, (2.3) に対応する直交変換のマトリックス ϕ_{mn} を作り

$$\eta_\alpha(k_x, k_y, m) = \sum_{n_z} \phi_\alpha(k_x, k_y, n_z, m) u_\alpha(k) \quad (2.6)$$

と変換すれば良い。この結果スペクトル法は η_α の時間的发展を計算する事になる。

2.2 基礎方程式

流れを基本流 $U (=1-z^2)$ と乱れ $u(x, y, z)$ の和に分解し、空間座標 x を U の方向に x 軸、壁に垂直に z 軸、これらに直角に y 軸をとり、 u の x, y, z 成分を u, v, w とする。また、圧力は U と釣り合う一定圧力勾配を考えて

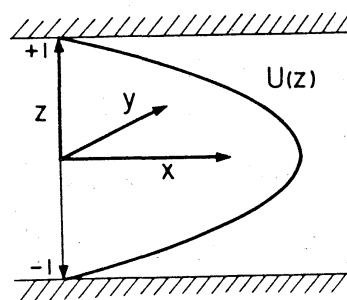


図1. 平面Poiseuille流

$-2x/R + p$ と表わすと乱れ u の基礎方程式はナビエ・ストークス方程式から

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = -U \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \delta_{\alpha z} w \frac{\partial U}{\partial z} - u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{R} \nabla^2 u_\alpha \quad (2.7)$$

と得られる。ここで、計算領域は $0 \leq x, y \leq L_x (=4\pi/1.2)$, $-1 \leq z \leq 1$ とし、レイノルズ数は $R = U(0)/\nu$ (ν は動粘性係数) で定義している。 $u(x)$ をフーリエ級数展開すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\alpha(k)}{\partial t} = & -\frac{k^2}{R} u_\alpha(k) - ik_\beta \sum_{k'} u_\alpha(k) u_\beta(k-k') - ik_\alpha p(k) \\ & - ik_x \sum_{k'_z} U(k_z - k'_z) u_\alpha(k_x, k_y, k'_z) \end{aligned}$$

$$-\delta_{\alpha x} \sum_{k_z'} U'(k_z - k_z') w(k_x, k_y, k_z') \quad (2.8)$$

が得られる。ここで $U' = dU/dx$ で

$$p(k) = -\frac{k_x k_y}{k^2} \sum_{k'} U_\alpha(k') U_\beta(k - k') + \frac{i 2 k_x}{k^2} \sum_{k_z'} U'(k_z - k_z') w(k_x, k_y, k_z') \quad (2.9)$$

である。

さらに, $U(k)$ は非圧縮条件

$$k \cdot U = 0 \quad (2.10)$$

に従うが, これはまた (2.4) と同型の束縛条件であるので, (2.5) の変換で容易に満たす事が出来る。結局, スペクトル法の基礎方程式は (2.6), (2.8), (2.10) より

$$\frac{\partial \eta_\mu(k_x, k_y, m)}{\partial t} = \sum_{n_z} \phi_\mu(k, m) \sum_\alpha \Phi_{\alpha\mu}(k) \frac{\partial U_\alpha(k)}{\partial t} \quad (2.11)$$

と得られる。ここで $\mu=1, 2$ で, $\Phi_{\alpha\mu}(k)$ は k に直交する二つの単位ベクトルである。¹⁷⁾

3. 平面 Poiseuille 流遷移の数値シミュレーション

3.1 初期条件

流れの初期条件を基本流 U と 2 次元 T-S 波 U_{TS} と 3 次元微小攪乱 U' の和として

$$\delta_{\alpha x} U(z) + U_{TS}(x, z) + U'(x, y, z) \quad (3.1)$$

と与える。ここで u_{TS} は $R=5000$ で線型安定理論から減衰率最小の2次元波形として得られるT-S波を有限振幅としたもので、 u' はこれに比べてはるかに振幅の小さい任意の3次元微小攪乱とする。(これらは実際は(2.11)の λ_μ の初期条件として与えられる。) ところで、 u_{TS} は x 方向に伝播する進行波であるので、乱れの空間的構造をより定常的にとらえるため、計算領域をT-S波の位相速度 σ_{TS} で動く座標系に選ぶ。これは(2.7)式で

$$x' = x + \sigma_{TS} t \quad (3.2)$$

とガリレー変換すればよい。

3.2 計算結果と討論

数値計算は基礎方程式(2.11)を時間方向にRunge-Kutta-Gill法($\Delta t=0.05$)で計算する。取扱うフーリエ成分の数は x, y, z 方向に $16 \times 16 \times 64$ 成分とする。

図2は $k_x=1.2$ の2次元T-S波の振幅に依存した不安定性を3次元攪乱を含めな

いて調べた結果で、縦軸の

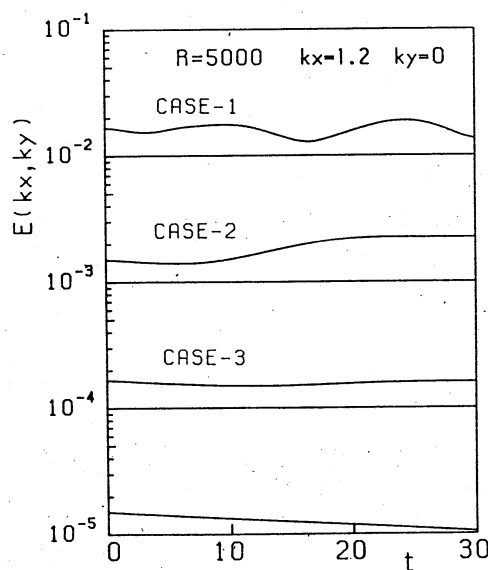


図2. 有限振幅T-S波の発達

$$E(k_x, k_y) = \sum_{k_z} |U(k_x, k_y, k_z)|^2 \quad (3.3)$$

で、 (k_x, k_y) 成分に含まれるエネルギー（の2倍）である。計算結果は初期のT-S波のエネルギー（または振幅）

に依存して増幅、減衰が生じ、Case-3ではほぼ一定値となっている。この傾向は非線型安定理論とよく一致し、¹¹⁾ Case-3はほぼ中立安定曲線の下枝に対応している。これによって、この程度の振幅のT-S波は流れの中に残存出来る事がわかったので、次に、流れにこのようなT-S波が存在する時の3次元微小擾乱の2次不安定性について調べる。

図3はT-S波の初期値を図2のCase-3と等しく置いた場合の3次元微小擾乱の増幅を調べた結果 (Case-4A) である。(本図および以下の図5～図7は講義ではカラー表示であったものを白黒表示に直した。) たゞし、T-S波はそのsubharmonicの役割を調べるため、 $n_x=2$ ($k_x=4\pi/L_x=1.2$) の成分に与えてある。また、3次元微小擾乱は n_x が $-1 \leq n_x \leq 1$ の範囲で、全ての n_y について

$$E(k_x, k_y) = 10^{-12} \quad (3.4)$$

と与え、その他の n_x 成分は零と置いた。図中点線は2次元擾乱 ($n_y=0$)、実線は3次元擾乱 ($k_y \neq 0$) を表わし、T-S波は特にPrimaryと書かれている。計算結果は時間と共にいろいろな3次元擾乱が増幅し、 $t \leq 150$ の範囲ではほぼ

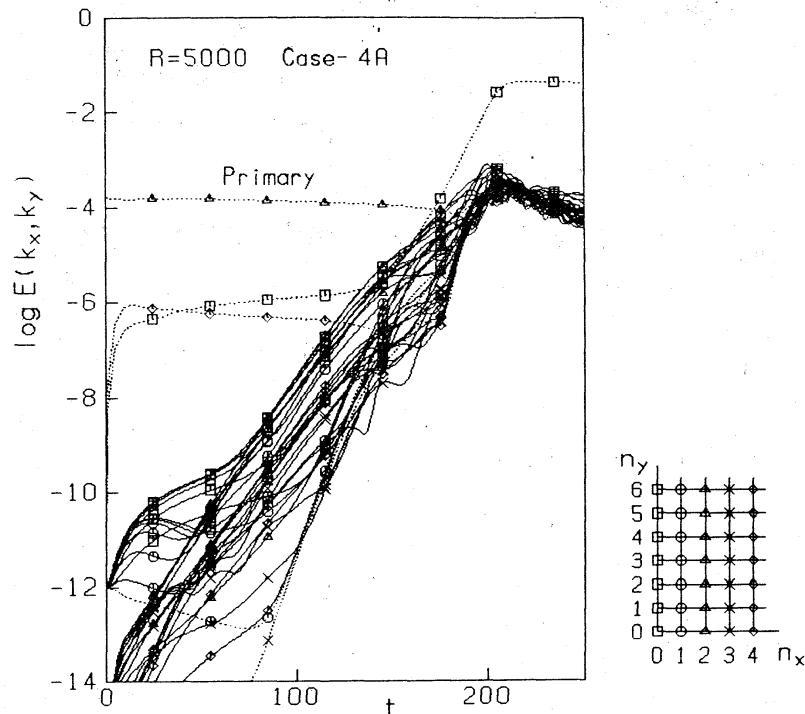


図3. 3次元微小攪乱の二次不安定性による
増幅 Case-4A

指数関数的増幅となる事を示しているが、後述の様に、この指数関数的増幅に寄与するのは主として基本流との相互作用である。 $t \sim 180$ では、3次元攪乱のエネルギーはほぼT-S波と同程度となり、各モードの非線型相互作用が著るしくなるので、流れは急速に乱流へ遷移する。この遷移を特徴づけるのが平均流の補正成分 ($n_x = n_y = 0$) で、 $t \sim 180$ で急激に増幅すると共に、その後はほとんど一定値となっている。これはこの時点で平均流が層流分布から乱流分布に大きく変換した事に対応しているので(図8参照)、この時刻を層流

から乱流への遷移点と見る
事が出来る。

図4は図3の $k_x=1.2$,
 $k_y=1.2$ 成分の増幅率

$$\begin{aligned} \omega_n(k_x, k_y) \\ = \frac{1}{E(k_x, k_y)} \frac{d}{dt} E(k_x, k_y) \end{aligned} \quad (3.5)$$

を計算した結果で、図中の

Δ , $\circ$, $\square$ はそれぞれ

(2.8) 式から $dE(k_x, k_y)/dt$

を作った場合の粘性項, 基本流を含む項および u の非線型項からの寄与を表わす。計算結果は $30 \leq t \leq 120$ では ω_n に寄与するのは主として基本流からのエネルギー流入であって, T-S波との干渉を含む非線型相互作用は小さい事を示し, これは遷移におけるT-S波の触媒作用を示している。

図5はT-S波は図3と同じであるが, 3次元擾乱の初期値を n_x はそのまま, n_y を ± 1 , ± 2 だけに限定した場合の計算結果 (Case-4B) を示す。計算結果は3次元擾乱の中で特別に $n_x=1$, $n_y=2$ の成分, すなわち, T-S波の subharmonic, が先導して増幅する遷移の過程を示し,

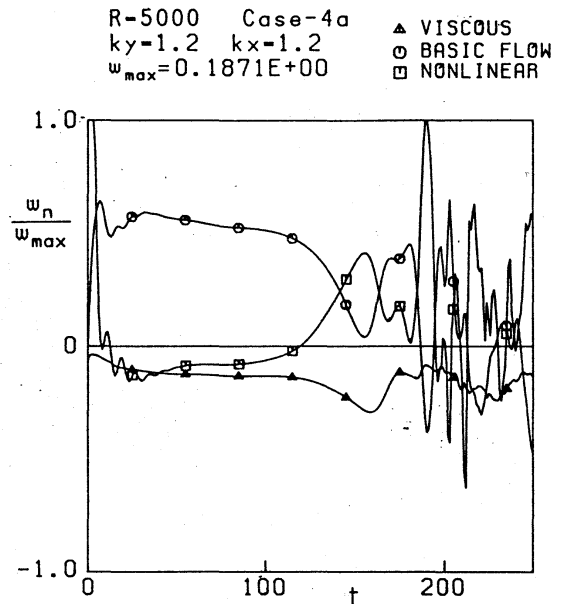


図4. 3次元微小擾乱の
増幅率 ω_n
Case-4A

一方、図3ではこの様な特別な成分は見られないので、これは図3とは明らかに異なる遷移の機構である。これらの二つの遷移の機構は3次元擾乱の初期値のわずかな与え方の違いによって生じたものであるが、この違いの生ずる力学的説明は現在の所まだ明らかではない。一方、 $t \sim 200$ では図3と同様に乱流に遷移するが、遷移した後の流れの構造は図3とほぼ同じである。

図6はT-S波の初期エネルギー値を Case-4A (図3) の場合の $1/2$ にした計算結果 (Case-5) で、この場合はT-S波自身も減衰する領域にある。しかし、その途中においていろいろな3次元擾乱を増幅し、最終的には乱流への遷移が実現する。たゞ、遷移の時刻は図3とは大きく遅れ、 $t \sim 620$ で乱流へ遷移している。

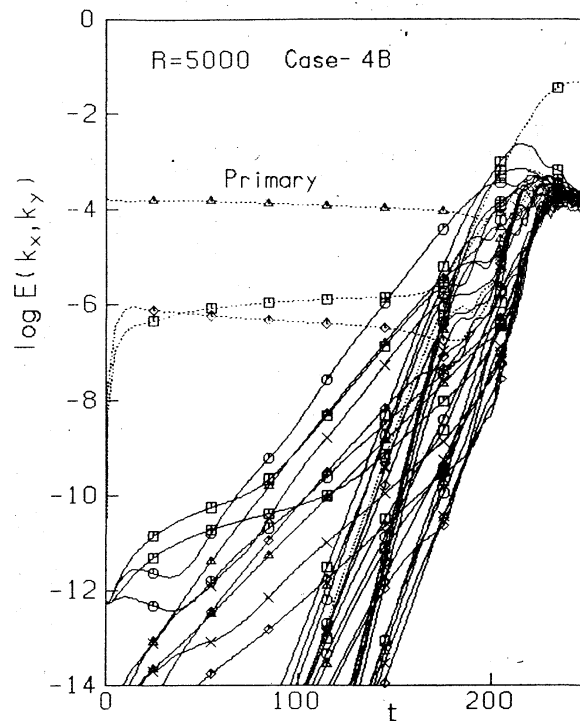


図5. 3次元微小擾乱の2次不安定性による増幅
Case-4B

図6. 3次元微小攪
乱の2次不安定
性による増幅
Case-5

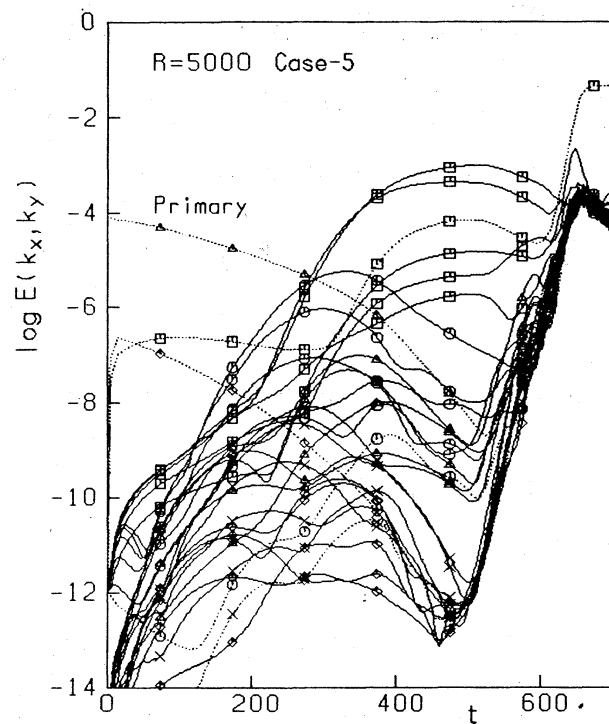


図7. 3次元微小攪
乱の2次不安定
性による増幅
Case-6

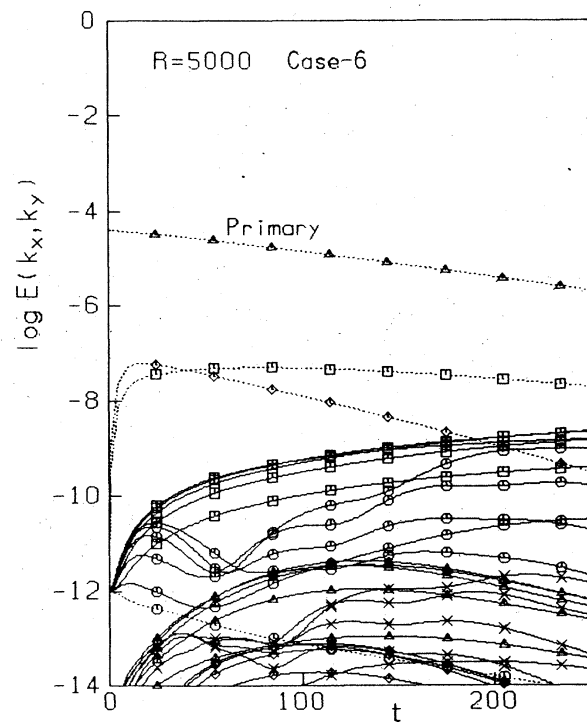


図7はT-S波の初期エネルギー値を Case-5 (図6) のさらに $1/2$ にした場合の計算結果で, この場合はもはや乱流への遷移は生じない。したがって, T-S波の2次不安定機構によって乱流への遷移が起るT-S波のエネルギー値の下限はほぼ Case-5 (中立安定曲線の下枝の約 $1/2$) の程度であると言える。

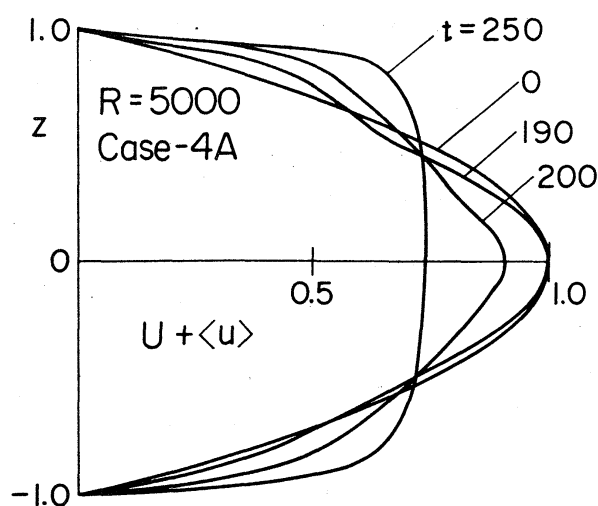


図8. 平均流 $U + \langle u \rangle$ の時間的発達

図8は流れの x 方向の平均流 $U + \langle u \rangle$ の時間的発達を示す。ここで $\langle u \rangle$ は x, y 方向の空間平均

$$\langle u \rangle = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} u(x, y, z) dx dy \quad (3.6)$$

である。計算結果は $t \sim 200$ で層流から乱流へ急激に変化する事を示し, $t = 250$ ではほとんど乱流型の分布となっている。

図9は乱れの x 成分 u の等高線分布の時間的変化を示す。実線と点線は正負の符号の違いを表わす。 $t = 100$ ではT-S波の分布にわずかな乱れが重っている。 $t = 150$ では y 軸

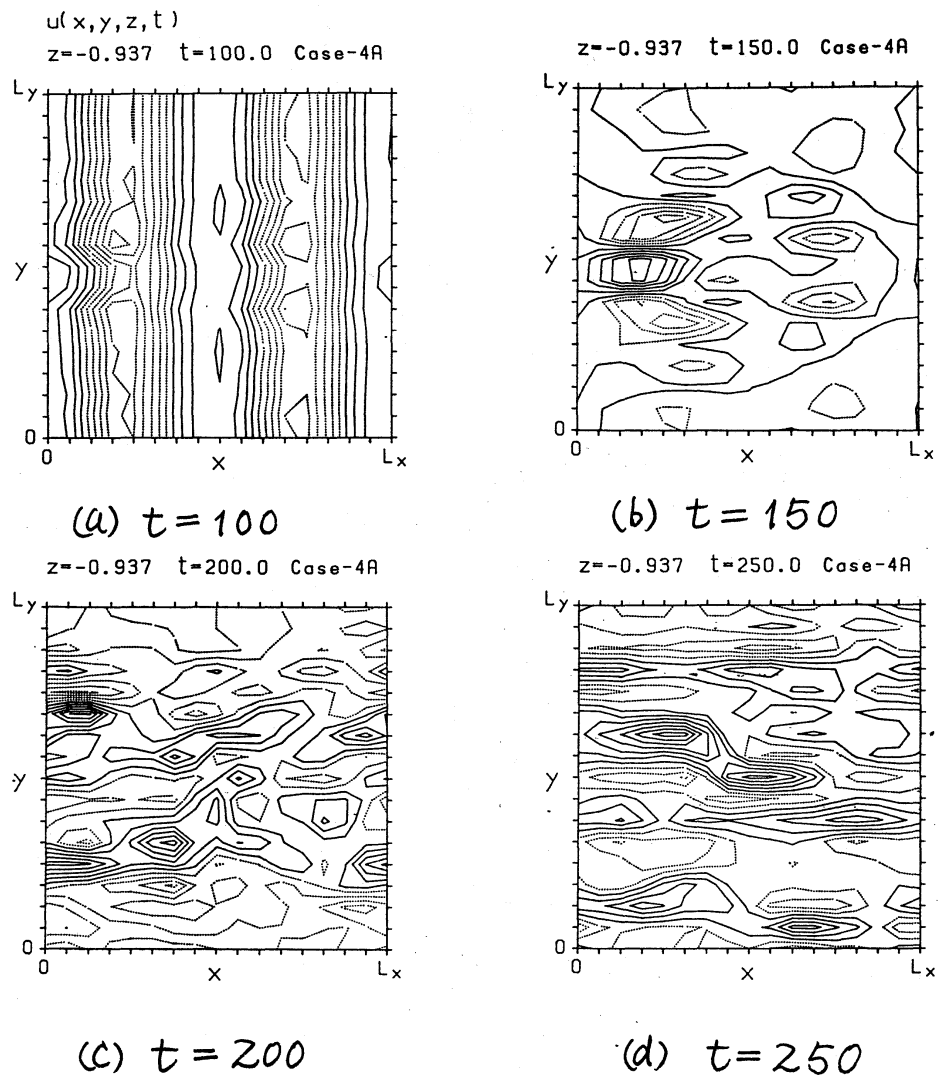


図9. 乱れのx成分uの等高線分布の発達

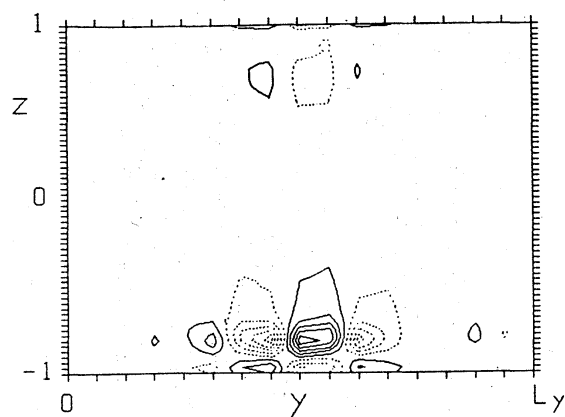
Case-4A

の中央部分に大きな変動が現われているが、これは符号の異なる渦対によって生ずる変動を示す。この位置の異なる結果で調べて見ると、これは粘性底層から立上るヘアピン渦である事がわかる。時間がさらに大きくなって $t = 250$ になると分布はx方向に streaky な分布に変っていく事を示し、この傾向

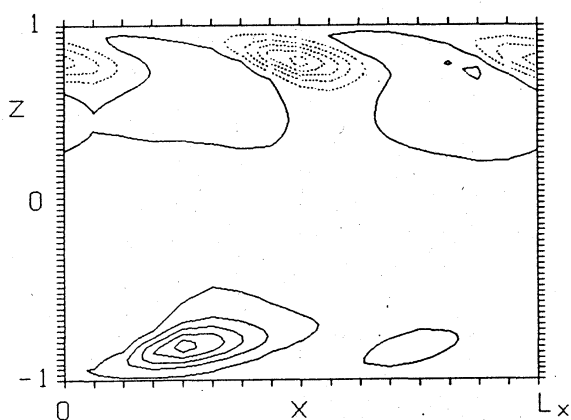
は実験ともよく一致する。

図10は図9で見られたヘアピン渦の形状を渦度 w_x と w_z の分布で示した結果である。ただし、本図で z 方向は x 、 y 方向に比べて4倍に拡大して描かれている。

図(a)はヘアピン渦を w_x について上流側から見た図で、図(b)は z 成分 w_z を y 方向に見た図である。ヘアピン渦が x 軸と成す角は約 15° で、これはこれまでの数値計算⁵⁾や実験¹⁹⁾とほぼ一致する。



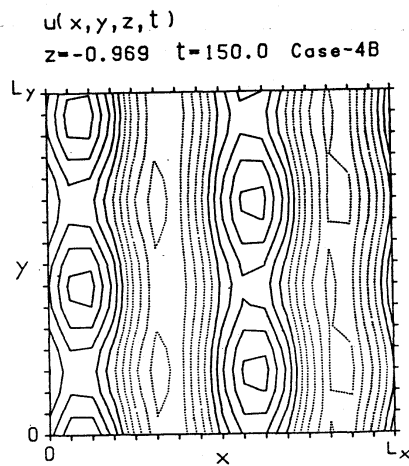
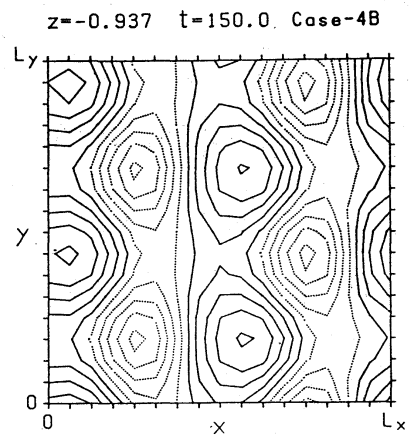
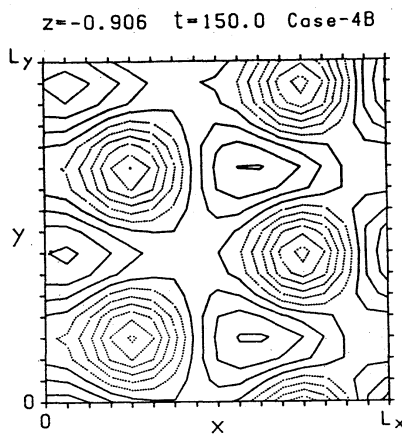
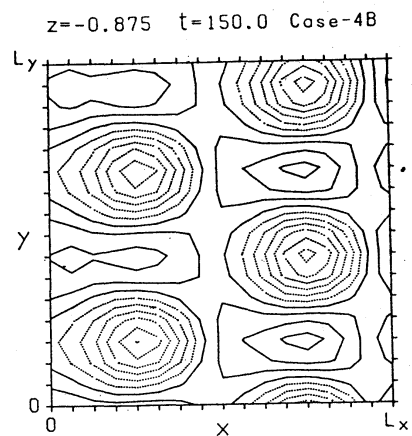
(a) w_x



(b) w_z

図10. 渦度の x 、 z 成分 w_x 、 w_z の等渦度線

図11はCase-4Bの u の等高線分布を示したものである。図9とは明らかに異なるstaggeredな分布を示し、この形状はSaric & Thomas¹⁴⁾の実験におけるT-S波のsubharmonicの主導する遷移の流れの分布に対応している。

(a) $z = -0.969$ (b) $z = -0.937$ (c) $z = -0.906$ (d) $z = -0.875$ 図 11. 乱れの x 成分 u の等高線分布Case-4B $t = 150$

4. むすび

フーリエ・スペクトル法から導出した新しいスペクトル法を平面 Poiseuille 流の遷移の数値シミュレーションに応用し、レイノルズ数が 5000 における有限振幅 T-S 波による亜臨界非線形遷移機構を調べた。計算結果から明らかとなった主

な結果は次の通りである。

- (1) 有限振幅T-S波による2次不安定機構におけるT-S波の触媒的作用が明らかとなった。
- (2) 乱流の発生を誘性づける遷移の時刻はT-S波の振幅が小さくなると遅くなる。その極限として、遷移の生じない振幅の下限がほぼ明らかとなった。
- (3) 遷移の力学機構として、実験的に観測されているヘアピン渦を経由する機構とT-S波のsubharmonicが先導する機構の二つが存在する事がわかった。これらは3次元微小擾乱の初期値のわずかな違いによって生ずる。
- (4) 乱流へ遷移すると速度分布には流れ(X)方向にstreakyな分布が現われて来る。

これらの計算結果は、前述の様に、フーリエ成分の数が $16 \times 16 \times 64$ 個の計算で得られたものであるが、この数は発達した乱流を記述するにはまだ不十分である。このため、現在これをさらに拡張した計算を行っているが、その結果はまた別の機会に報告する予定である。

文献

- 1) D. Gottlieb and S. A. Orszag : NSF-CBMS Monograph No. 26, Soc. Ind. and Appl. Mech. (1977).
- 2) S. A. Orszag : Stud. in Appl. Math. 50 (1971) 293.
- 3) S. A. Orszag and G. S. Patterson, Jr. : Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 76.
- 4) I. Hosokawa and K. Yamamoto : Phys. Fluids 29 (1986) 2013.
- 5) S. A. Orszag and A. T. Patera : J. Fluid Mech. 128 (1983) 347.
- 6) L. Kleiser and E. Laurien : AIAA Paper No. 85-0566 (1985).
- 7) I. Hosokawa and K. Yamamoto : J. Phys. Soc. Japan 55 (1986) 1030.
- 8) 山本稀義, 細川巖 : 第18回乱流シンポジウム講演論文集, なぎれ, 5巻別冊 (1986) 220.
- 9) S. A. Orszag : J. Fluid Mech. 50 (1971) 689.
- 10) V. C. Patel and M. R. Head : J. Fluid Mech. 38 (1969) 181.
- 11) T. Herbert : AGARD CP-224 (1976) 3-1.
- 12) M. Nishioka, S. Iida and Y. Ichikawa : J Fluid Mech. 72 (1975) 731.
- 13) P. S. Klebanoff, K. D. Tidstrom and L. M. Sargent : J. Fluid Mech. 12 (1962) 34.
- 14) W. S. Saric and A. S. W. Thomas : Proc. IUTAM Symposium "Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids", Kyoto, Japan (1983) 117.
- 15) A. D. D. Craik : J. Fluid Mech. 50 (1971) 393.
- 16) T. Herbert : Phys. Fluids 26 (1983) 871.
- 17) K. Yamamoto and I. Hosokawa : J. Phys. Soc. Japan 50 (1981) 343.
- 18) N. Itoh : Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 117 (1974) 65, 160.
- 19) S. Rajagopalan and R. A. Antonia : Phys. Fluids 22 (1979) 614.