

Stokes 方程式の一つの近似解法

電気通信大学 渡辺 二郎

1. Stokes 方程式の定常問題

2次元または3次元空間の有界領域 Ω において Stokes 方程式に対する定常問題を考える:

$$(1.1) \quad -\nu \Delta u = \text{grad } p + f \quad (x \in \Omega)$$

$$(1.2) \quad \text{div } u = 0 \quad (x \in \Omega)$$

$$(1.3) \quad u = 0 \quad (x \in S).$$

ここで S は Ω の境界であり, ν は正定数である. u と f は N 次元 ($N=2$ または 3) ベクトル値関数であり, p はスカラー値関数である. f が与えられたとき, u と p を求めることがわれわれの問題である.

ヒルベルト空間

$$V = \{v; v \in (H_0^1(\Omega))^N \text{ かつ } \text{div } v = 0\}$$

において考える. V における内積は

$$[v, w] = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i} dx.$$

任意の $f \in (H^{-1}(\Omega))^N$ に対して Stokes 方程式の定常問題 (1.1)–(1.3) の一般化された解 $u \in V$:

$$(1.4) \quad \nu [u, v] = \langle f, v \rangle \quad (\forall v \in V)$$

が一意的に存在する.

2 関数空間 V の直和分解

Ω を $\mathbb{R}^N$ ($N=2$ または 3) の有界な連結開集合とする. Ω の境界 S はたがいにまじわらない有限個の C^{m+2} 級 (m は正整数) の連結閉曲面 (ただし $N=3$ のとき, $N=2$ のときは閉曲線) $S_0, S_1, \dots, S_q$ からなり ($q \geq 0$), Ω は S_0 で囲まれる領域に含まれるとする. $N=3$ のとき, S_i の 1 次元 Betti 数を $2p_i$ とする ($p_i \geq 0$). Ω の 1 輪体の基を $c_1, c_2, \dots, c_r$ とする. ただし, $N=3$ のとき $r = p_0 + p_1 + \dots + p_q$; $N=2$ のとき $r = q$. 各 c_i に対して, Ω 内のなめらかな境界をもつ細いドーナツ型領域 d_i で, c_i の台を含み, $d_i \cap d_j = \emptyset$ ($i \neq j$) をみたすものをとる. d_i をある個所で輪切りにして得られる切口口を σ_i とし, σ_i に向きを定めておく. 各 d_i に対して, $v_i \in V \cap (C_0^\infty(\Omega))^N$ で, $\text{supp } v_i \subset d_i$ かつ

$$(2.1) \quad \int_{\sigma_i} v_i \cdot n_i \, d\sigma = 1$$

をみたすものをとる. ここで n_i は σ_i の正の向きの単位法

線ベクトルであり, $d\sigma$ は面積素である. 各 i ($1 \leq i \leq r$) に対してこのような v_i を一つずつとる. $v_1, \dots, v_r$ で張られる線形空間を R とする. このとき次の定理がなりたつことを証明する.

定理 1 上のような Ω で, 境界 S が C^{m+2} 級ならば ($m \geq 1$)

$$V \cap (H_0^m(\Omega))^N = R \oplus \text{rot}(H_0^{m+1}(\Omega))^M \quad (\text{直和}).$$

$$\text{ただし, } M = \begin{cases} 1 & (N=2 \text{ のとき}) \\ 3 & (N=3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明 $N=3$ の場合に証明する. $v \in V \cap (H_0^m(\Omega))^3$ に対して適当に実数 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ をとれば, Ω の任意の“切断面” Σ に対して

$$(2.2) \quad \int_{\Sigma} \left(v - \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i \right) \cdot n \, d\sigma = 0$$

がなりたつようにできる. ここで, Ω の“切断面”とは Ω に含まれる曲面で, その境界は S に含まれるもののことである. $u = v - \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$ とおく. u を Ω の外 $\Omega^c \cap \mathbb{R}^3$ で拡張したものを $\tilde{u}$ とかく. $\tilde{u} \in H_0^m(\mathbb{R}^3)^3$ かつ $\text{div } \tilde{u} = 0$ である. したがって

$$\psi(x) = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{u}(y)}{|x-y|} \, dy$$

とおけば, $\psi \in H_{\text{loc}}^{m+1}(\mathbb{R}^3)^3$ (したがって $\mathbb{R}^3$ で連続)で

あり,

$$(2.3) \quad \tilde{u}(x) = \operatorname{rot} \psi(x) \quad \text{a.e.}$$

がなりたつ。したがって, Ω^c で $\operatorname{rot} \psi(x) = 0$ a.e.

いま, 固定点 $x_0 \in \Omega^c$ から任意の点 $x \in \Omega^c$ への Ω^c 内の折れ線を C_x とし, その上の単位接線ベクトルを t とする.

$$g(x) = \int_{C_x} \psi \cdot t \, ds \quad (x \in \Omega^c)$$

とおけば, $g(x)$ の値は C_x によらず一意的に定まり, $g \in H_{\text{loc}}^{m+2}(\Omega^c)$ であることが, (2.2) と (2.3) からわかる. 明らかに, Ω^c において $\operatorname{grad} g = \psi$ がなりたつ. g の $\mathbb{R}^3$ 上への一つの拡張を $\tilde{g} \in H_{\text{loc}}^{m+2}(\mathbb{R}^3)$ とする.

$$(2.4) \quad w = \psi - \operatorname{grad} \tilde{g}$$

とおけば, $w \in H_{\text{loc}}^{m+1}(\mathbb{R}^3)^3$ かつ Ω^c で $w = 0$. ゆえに $w \in H_0^{m+1}(\Omega)^3$. (2.4) と (2.3) から Ω において

$$\operatorname{rot} w = \operatorname{rot} \psi = u = v - r$$

がなりたつことがわかる. ただし, $r = \sum \alpha_i v_i \in \mathbb{R}$.

次に, もし $r \in \mathbb{R}$ と $w \in (H_0^{m+1}(\Omega))^M$ に対して

$$r + \operatorname{rot} w = 0$$

ならば, $r = \operatorname{rot} w = 0$. なぜならば, Ω の "切断面" Σ で, 切り口 σ_i を含み, σ_i 以外ではすべてのドーナツ型領域 d_j と交わらないようなものに対して, (2.1), (2.2) より

$$0 = \int_{\Sigma} (r + \operatorname{rot} w) \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma} r \cdot n \, d\sigma = r \text{ の } v_i \text{ 成分}$$

したがって, $r=0$ がわかる. $N=3$ の場合に定理1が証明された. $N=2$ の場合も同様にして証明される.

補題1 ($[1]$, 38-41ページ) 境界 S は C^2 級とする. 任意の $\beta \in H^{1/2}(S)^N$, $\beta \cdot n|_S = 0$, に対して $d \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^M$ で

$$\operatorname{rot} d|_S = \beta$$

をみたすものが存在する.

補題2 境界 S は C^3 級とする. 任意の $v \in V \cap H^2(\Omega)^N$ に対して, $\psi \in (H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega))^M$ で

$$v - \operatorname{rot} \psi \in V \cap H_0^2(\Omega)^N$$

をみたすものが存在する.

証明 $v \in V \cap H^2(\Omega)^N$ とする. $\partial v / \partial n|_S \in H^{1/2}(S)^N$ かつ $\partial v / \partial n \cdot n|_S = 0$ である. 後者は $v|_S = 0$ と $\operatorname{div} v = 0$ からわかる. 補題1により, $d \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^M$ が存在して, $\operatorname{rot} d|_S = \partial v / \partial n|_S$ をみたす. さて, $\psi \in (H^3(\Omega))^M$ で

$$\psi|_S = \frac{\partial \psi}{\partial n}|_S = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}|_S = \frac{\partial d}{\partial n}|_S$$

をみたすものをとれば, ψ は

$$\frac{\partial}{\partial n} \operatorname{rot} \psi \Big|_S = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_S$$

をみたすことが容易に示される。証明終り。

定理 2 境界 S は C^4 級であるとする。このとき

$$V \cap (H^2(\Omega))^N = \mathbb{R} \oplus \operatorname{rot} (H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega))^M \text{ (直和)}$$

がなりたつ。

証明 補題 2 により, 任意の $v \in V \cap H^2(\Omega)^N$ に対して

$$\psi \in (H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega))^M \text{ で}$$

$$v - \operatorname{rot} \psi \in V \cap H_0^2(\Omega)^N$$

をみたすものが存在する。このとき定理 1 により, $r \in \mathbb{R}$ と

$$\varphi \in (H_0^3(\Omega))^M \text{ が存在して}$$

$$v - \operatorname{rot} \psi = r + \operatorname{rot} \varphi.$$

$\varphi + \psi \in (H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega))^M$ であるから, 定理が証明された。

3 関数空間 V の近似

関数空間 $(H^m(\Omega))^N$ (m は非負整数) の内積とノルムを次のようにとる:

$$(v, w)_{m,N} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial^\alpha w}{\partial x^\alpha} dx, \quad \|v\|_{m,N} = \sqrt{(v, v)_{m,N}}.$$

さて, 直積空間

$$X = \mathbb{R} \times (H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega))^M$$

の各元 (r, ψ) , $r \in R$, $\psi \in (H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega))^M$, のノルムを

$$(3.1) \quad \|(r, \psi)\| = \|r\|_{2,N} + \|\psi\|_{3,M}$$

により定義する. X から $V \cap (H^2(\Omega))^M$ の上への連続な線形作用素 K を

$$K(r, \psi) = r + \text{rot } \psi$$

により定義する. ある定数 $C(N) > 0$ が存在して

$$(3.2) \quad \|K(r, \psi)\|_{2,N} = \|r + \text{rot } \psi\|_{2,N} \\ = \|r\|_{2,N} + \|\text{rot } \psi\|_{2,N} \leq C(N) \|(r, \psi)\|.$$

$\bar{K}$ を商空間 $X / \ker K$ から $V \cap (H^2(\Omega))^N$ の上への, K から導入された写像とする:

$$\bar{K}\bar{x} = Ky \quad (y \in \bar{x} = x + \ker K).$$

各 $\bar{x} \in X / \ker K$ のノルムは

$$(3.3) \quad \|\bar{x}\| = \inf_{y \in \bar{x}} \|y\|$$

により定義される. (3.2) と (3.3) から

$$\|\bar{K}\bar{x}\|_{2,N} \leq C(N) \|\bar{x}\|.$$

$\bar{K}$ はヒルベルト空間 $X / \ker K$ からヒルベルト空間 $V \cap (H^2(\Omega))^N$ の上への連続な線形写像であり, しかも 1対1 である. したがって $\bar{K}$ は逆写像 $\bar{K}^{-1}$ をもち, $\bar{K}^{-1}$ は全空間 $V \cap (H^2(\Omega))^N$ で定義された閉作用素であるから, 閉グラフ定理により $\bar{K}^{-1}$ は連続である. その作用素ノルムを $\|\bar{K}^{-1}\|$ とかけは

$$(3.4) \quad \|\bar{K}^{-1}v\| \leq \|\bar{K}^{-1}\| \cdot \|v\|_{2,N} \quad (\forall v \in V \cap (H^2(\Omega))^N).$$

ところで (3.3) から

$$\|\bar{K}^{-1}v\| = \inf \{ \|(r, \psi)\|; K(r, \psi) = v \}.$$

したがって (3.1) と (3.4) から, 任意の $v \in V \cap (H^2(\Omega))^N$ に対して

$$(3.5) \quad \inf_{v=r+\operatorname{rot} \psi} (\|r\|_{2,N} + \|\psi\|_{3,M}) \leq \|\bar{K}^{-1}\| \cdot \|v\|_{2,N}$$

がなりたつ。

さて, $(H_0^2(\Omega))^M$ に対する有限要素空間 E^h , $h > 0$, が与えられているとする。すなわち E^h は $(H_0^2(\Omega))^M$ の有限次元部分空間であり, $(H_0^2(\Omega))^M$ から E^h の上への連続な線形写像 π^h があって, 次の条件をみたすとする: $0 \leq k < m \leq 3$ のとき, 正定数 C が存在して, 各 $\psi \in (H_0^2(\Omega) \cap H^m(\Omega))^M$ に対して

$$(3.6) \quad \|\pi^h \psi - \psi\|_{k,M} \leq C h^{m-k} \|\psi\|_{m,M} \quad (h > 0)$$

および各 $\psi \in (H_0^2(\Omega))^M$ に対して

$$\lim_{h \downarrow 0} \|\pi^h \psi - \psi\|_{2,M} = 0$$

がなりたつ。

このとき各 $h > 0$ に対して, 次のように S^h を定義する:

$$S^h = R \oplus \operatorname{rot} E^h \quad (\text{直和}).$$

V から S^h の上への, 内積 $[\cdot, \cdot]$ に関する直交射影を P_V^h とかく。また, $(L^2(\Omega))^N$ から S^h の上への, 内積 $(\cdot, \cdot)_{0,N}$ に

関する直交射影を P_0^h とかく. このとき次の定理がなりたつ.

定理 3 境界 S は C^4 級であるとする. ある正定数 C が存在して, すべての $v \in V \cap H^2(\Omega)^N$ に対して

$$(3.7) \quad \|P_V^h v - v\|_V \leq C h \|v\|_{2,N} \quad (h > 0)$$

$$(3.8) \quad \|P_0^h v - v\|_{0,N} \leq C h^2 \|v\|_{2,N} \quad (h > 0)$$

がなりたつ. また, S が C^3 級であるとき, 正定数 C が存在して, すべての $v \in V$ に対して

$$(3.9) \quad \|P_0^h v - v\|_{0,N} \leq C h \|v\|_V \quad (h > 0)$$

がなりたつ.

証明 (3.7) の証明. 定理 1 により, $v \in V \cap H^2(\Omega)^N$ は

$$v = r + \text{rot } \psi, \quad r \in R, \quad \psi \in (H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega))^M$$

と表わされる. したがって

$$\begin{aligned} \|P_V^h v - v\|_V &= \inf \{ \|(r' - r) + \text{rot}(\psi' - \psi)\|_V; r' \in R, \psi' \in E^h \} \\ &\leq \|\text{rot}(\pi^h \psi - \psi)\|_V \\ &\leq C(N) \|\pi^h \psi - \psi\|_{2,M}. \end{aligned}$$

したがって (3.6) と (3.5) により

$$\begin{aligned} \|P_V^h v - v\|_V &\leq C \cdot C(N) \cdot h \cdot \inf_{v=r+\text{rot}\psi} \|v\|_{3,M} \\ &\leq C \cdot C(N) \cdot \|K^{-1}\| \cdot h \cdot \|v\|_{2,N}. \end{aligned}$$

(3.7) が示された. 同様にして, (3.8) と (3.9) を示すことができる. しかし (3.9) の証明には, (3.5) の代り

に次の(3.10)を用いる。ある正定数 C が存在して、すべての $v \in V$ に対して

$$(3.10) \quad \inf_{v=r+\operatorname{rot} \psi} (\|r\|_V + \|\psi\|_{2,M}) \leq C \|v\|_V$$

がなりたつ。

次の定理は、近似解の誤差評価の際に基本的である。

定理4 境界 S が C^3 級ならば、ある正定数 C が存在して、すべての $v \in V$ に対して

$$(3.11) \quad \|P_V^h v - v\|_{0,N} \leq C h \|v\|_V \quad (h > 0)$$

がなりたつ。また、 S が C^4 級ならば、すべての $v \in V \cap (H^2(\Omega))^N$ に対して

$$(3.12) \quad \|P_V^h v - v\|_{0,N} \leq C h^2 \|v\|_{2,N} \quad (h > 0)$$

がなりたつ。

証明 まず次のことに注意する。任意の $g \in (L^2(\Omega))^N$ に対して、 $w \in V \cap (H^2(\Omega))^N$ で

$$(3.13) \quad [w, u] = (g, u)_{0,N} \quad (\forall u \in V)$$

をみたすものが存在し

$$(3.14) \quad \|w\|_{2,N} \leq C' \|g\|_{0,N}$$

がなりたつ。ここで C' は g, w によらない正定数である。

例えば、[1], 102 ページ, 定理 3 または [2], 33 ページ, 定理 2.4 をみよ。

さて、 $v \in V$ とする。 $[P_V^h w, P_V^h v - v] = 0$ と (3.13)

から

$$(g, P_V^h v - v)_{0,N} = [w - P_V^h w, P_V^h v - v].$$

したがって

$$(3.15) \quad |(g, P_V^h v - v)_{0,N}| \leq \|w - P_V^h w\|_V \cdot \|P_V^h v - v\|_V$$

がなりたつ。一方, w に対して (3.7) を適用して, (3.14) を用いれば

$$\|w - P_V^h w\|_V \leq Ch \|g\|_{0,N}.$$

したがって (3.15) から容易に

$$\|P_V^h v - v\|_{0,N} \leq Ch \|P_V^h v - v\|_V$$

が得られるが, これから, (3.7) と

$$\|P_V^h v - v\|_V \leq \|v\|_V \quad (\forall v \in V)$$

とを考慮にあれば, (3.11) が得られる. (3.12) も同様にして, (3.8) を適用することにより得られる. 証明終り.

4. 近似解と誤差評価

第1節の (1.4) で与えられる真の解 u に対して, S^h にあける近似解 u^h は

$$u^h \in S^h, \quad \nu [u^h, v^h] = \langle f, v^h \rangle \quad (\forall v^h \in S^h)$$

で与えられる. 容易に $u^h = P_V^h u$ であることがわかる.

さて, $f \in (H^{-1}(\Omega))^N$ のとき, 真の解 u が存在して V に属する. したがって, 境界 S が C^3 級ならば, 定理4により

近似解 u^h に対する次のような誤差評価がなりたつ:

$$\|u^h - u\|_{0,N} \leq Ch \|u\|_V \quad (h > 0).$$

さらに, 境界 S が C^2 級で, $f \in (L^2(\Omega))^N$ ならば, 真の解 u は $(H^2(\Omega))^N$ に属する ([1], 102 ページ 定理 3 または [2], 33 ページ 定理 2.4). したがって境界 S が C^4 級ならば, $f \in (L^2(\Omega))^N$ のとき, 近似解 u^h に対する次のような誤差評価がなりたつことが定理 4 と定理 3 からわかる:

$$\|u^h - u\|_{0,N} \leq Ch^2 \|u\|_{2,N} \quad (h > 0)$$

$$\|u^h - u\|_V \leq Ch \|u\|_{2,N} \quad (h > 0).$$

文 献

1. Ладыженская, О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, Издание второе, Наука, 1970.
2. Temam, R., On the theory and numerical analysis of the Navier - Stokes equations, Lecture note, Université Paris XI, 1973.