

2次元 normal singularity について

都立大 理 渡 辺 敬 一

§ 1. 序

特異点の解消の問題が解かれた現在、次の問題は特異点それ自体に注目し、その性質を調べる事である。2次元の normal singularity については、特に良い性質をもつもの (rational singularity) については、かなり古くから、多くの論文があるが、それ以外の singularity についても、最近 Wagreich, Orlik などの研究により進歩が著しい。本稿では、singularity の「グラフ」の話を中心としてそれらの結果を紹介して行きたい。なお、証明は参照する原論文を見て頂きたい。

§ 2. Resolution. とそのグラフ.

$x \in X$ が 2次元 ^(*)normal singularity とする。簡単の為、 $X - \{x\}$ は特異点をもたないとしておく。 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ が $\tilde{X}$ は non-singular singularity の resolution であるとは、 π は proper で、 π は ^(*)complex analytic space のカテゴリーで考える。

$\tilde{X} \rightarrow \pi^{-1}(x)$ と $X \rightarrow x$ の biholomorphic map を引き起す事をいう。このとき、 $\pi^{-1}(x)$ は (一般に reducible で、特異点をもつ) 一次元 compact connected analytic variety になる。このとき、 $\pi^{-1}(x) = \bigcup_{i=1}^n A_i$ と、 $\pi^{-1}(x)$ を既約成分に分解しておく。

(1) π が X の minimal resolution とは、 $\pi = \varphi \circ \pi_1$ と分解するような X の resolution π_1 が存在しない事。よく知られているように、

π が minimal $\Leftrightarrow A_i \cong \mathbb{P}^1$, $A_i^2 = -1$ なるものが存在しない。

X の minimal resolution は unique である。([L], V 章)。

(2) X の resolution π が次の条件をみたとき、 π は good resolution であるという。

(i) A_i は non-singular ($\forall i$)

(ii) A_i と A_j が交わるときは、transversal に交わる。

(iii) $A_i \cap A_j \cap A_k = \emptyset$ (i, j, k は互いに異なる)。

good resolution は必ず存在する。good resolution は一般に minimal ではないが、good resolution たちの中に最小のものが存在する。([L], V 章参照)

(3) $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ 又は resolution π に対応する グラフ を次のように定義する。

(i) 各 curve A_i には頂点 (○であらわす) が対応する。

(ii) A_i と A_j が交わっているとき、 A_i と A_j に対応する頂

点を線で結ぶ (transversal に交わるとき $\bigcirc-\bigcirc$ 、multiplicity 2 の点で交わるとき $\bigcirc \equiv \bigcirc$ と書く。異なる 2 点で transversal に交わっているとき、 $\bigcirc \equiv \bigcirc$)

(iii) A_i に対応する頂点の中に A_i^2 を表わす数字を入れる。
($A_i^2 = -n$ のとき $\textcircled{-n}$ と書く)。但し、 $A_i^2 = -2$ のときは (これが最も多いので) 何も書かない。($\textcircled{-2} = \bigcirc$)。

(iv) A_i の genus が g のとき、 $\bigcirc_{[g]}$ と書く。但し、 A_i が non-singular rational のときは何も書かない ($\bigcirc_{[0]} = \bigcirc$)。

(v) 三つ以上の curve が一点で互いに transversal に交わっているとき、 $\bigcirc \equiv \bigcirc \equiv \bigcirc$ などと書く事にする。

(説明は面倒だが §6. の例を見れば一目瞭然であるう。)

☆ 与えられたグラフに対し、そのグラフをもつ $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ を 2 次元 manifold の中に実現する事ができる。(Hirzebruch [4] 参照)

(4) M が 2 次元 manifold, $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ を M の 1 次元 compact connected subvariety とする。このとき、

A が contractible $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists \pi: M \rightarrow X$, X は 2 次元 analytic variety で、 $\pi(A) = \{x\}$, $\pi|_{M-A}: M-A \xrightarrow{\sim} X - \{x\}$ (biholomorphic).

$\pi(A) = x$ が X の normal point である事を要請すれば、このような π は unique に定まる。

Theorem A. (Grauert).

ACM が contractible $\Leftrightarrow$ 交叉行列 $(A_i, A_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ が負定値.

(5) 与えられたグラフに対して、交叉行列 (A_i, A_j) がきまるが、この行列が負定値である事を判定するのに、次の補題が有用である。

Lemma (Artin, [1])

① (A_i, A_j) が negative semidefinite $\Leftrightarrow \exists Z = \sum n_i A_i > 0, \forall i, Z A_i \leq 0$.

② 更にこのとき、 (A_i, A_j) が negative definite $\Leftrightarrow Z^2 < 0$.

($A = \bigcup A_i$ は連結より、①の Z に於て、 $\forall i, n_i \geq 1$ となる.)

(6) Fundamental cycle.

$Z_1 = \sum n_{1i} A_i, Z_2 = \sum n_{2i} A_i$ があり、 $Z_1 > 0, Z_2 > 0, Z_1 A_i \leq 0, Z_2 A_i \leq 0$ ($i=1, \dots, n$) とする。このとき $Z = \sum n_i A_i$, $n_i = \min(n_{1i}, n_{2i})$ とすると、 $\forall i, Z A_i \leq 0$ である事がわかる。

即ち、 $\{Z > 0 \mid Z = \sum n_i A_i \text{ \& } Z A_i \leq 0 (i=1, \dots, n)\}$ は最小元をもつ。

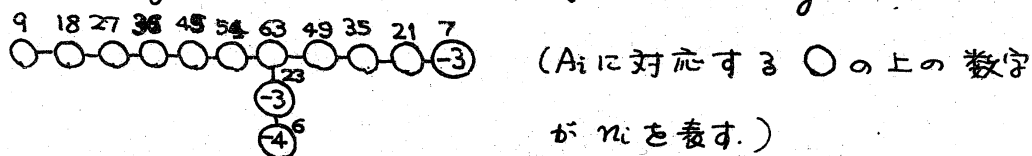
($Z' = \sum n'_i A_i \geq Z = \sum n_i A_i \Leftrightarrow n'_i \geq n_i (\forall i)$)。この最小元

を $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ の (又は対応するグラフの) fundamental cycle

という。グラフに対して fundamental cycle は一意的に決まる

が、グラフが複雑になると、その決め方は易しくないようだ。

例. $x^7 + y^9 + z^{11} = 0$ の resolution の fundamental cycle は



(7) $(X, x), (X', x')$ が x, x' の近傍でそれぞれ $\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^{N'}$ に埋め込まれているとし、 $S_\varepsilon^{2N-1} = \{z \in \mathbb{C}^N \mid |z| = \varepsilon\}$, $K = X \cap S_\varepsilon^{2N-1}$, $K' = X' \cap S_\varepsilon^{2N'-1}$ とする。もし (X, x) と (X', x') のある resolution (別々では minimal resolution) が同じグラフをもつならば、 $K \cong K'$ (diffeo) である。
(K は $A = \pi^{-1}(x)$ の tubular nbd. の boundary である。) この理由から、resolution のグラフで singularity を分類する事を singularity の topological な分類という。

(8) グラフによる基本群 $\pi_1(K)$ の計算.

グラフは K の topology を決めるから、当然 $\pi_1(K)$ を決める訳だが、 $\pi_1(K)$ の生成群と relation はグラフを用いて容易に決る。
(Mumford [7], Wagreich [12] 参照)。Wagreich は [12] で、 $\pi_1(K)$ が solvable となる singularity のグラフをすべて列挙している。

§ 3. Singularity の "genus" について.

Wagreich は [11] に於て singularity について 2 つの "genus" を定義している。彼の "arithmetic genus" については、筆者はその必然性を理解しているとは云い難いのだが、"genus" を最初に定義したのが彼なので、彼に従って定義しておく。

(1) $P_g(\mathcal{O}_x)$ (geometric genus) の定義.

$\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ を X の resolution とし、 $R^1\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ ($U \subset X \mapsto$

$H^1(\pi^!(U), \mathcal{O}_X)$ で定義される sheaf). を考える. π は proper より, $R^1\pi_*(\mathcal{O}_X)$ は coherent で, $\text{Supp}(R^1\pi_*(\mathcal{O}_X)) \subset \{x\}$. 故に,

$\dim_{\mathbb{C}}(R^1\pi_*(\mathcal{O}_X))_x < \infty$ だが, $P_g(\mathcal{O}_x) = \dim_{\mathbb{C}}(R^1\pi_*(\mathcal{O}_X)_x)$ と定義する. $(R^1\pi_*(\mathcal{O}_X))_x = \varprojlim_{\substack{Z \supset x \\ \text{Supp } Z \subset \pi^{-1}(x)}} H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ となる.

$P_g(\mathcal{O}_x) = \sup(\dim_{\mathbb{C}} H^1(Z, \mathcal{O}_Z))$ となる.)

(2) $P_a(\mathcal{O}_x)$ (arithmetic genus) の定義.

Z が $\text{supp}(Z) \subset \pi^{-1}(x)$ なる cycle のとき, $P_a(Z) = \frac{Z^2 + KZ}{2} + 1$.

(K は $\tilde{X}$ の canonical bundle) * Z の arithmetic genus が定まる.

定義 $P_a(\mathcal{O}_x) = \sup_{\substack{Z \supset x \\ \text{supp}(Z) \subset \pi^{-1}(x)}} P_a(Z)$.

$KA_i = 2(P_a(A_i) - 1) - A_i^2$ で, $P_a(A_i), A_i^2$ は グラフ より わかるから, KA_i は グラフ より わかる. ゆえに, $P_a(\mathcal{O}_x)$ は グラフ から 計算可能な, 全く「算術的」な種数である.

(3) 更に, 我々は §2.(7) で, "fundamental cycle" Z_0 を定義した. $P_a(Z_0)$ も 'genus' の候補者に採用しよう. これもグラフから決まる「算術的」な量である. ($P_a(Z_0) \geq 0$ である.)

(4) Singularity (X, x) に対して resolution はたくさんあるから, 上の3つの定義が resolution によらずに well-defined である事を云っておく必要がある. すべての resolution は minimal (最小な) resolution から, 有限回の quadratic transform (一点を blow-up する事) によって得られるから, $\tilde{X}_1 \xrightarrow[\pi_1]{\theta} \tilde{X}_2 \xrightarrow{\pi_2} X$ の時, $\tilde{X}_1$ を用いて定義したものと, $\tilde{X}_2$ を用い

で定義したものが同じである事を示せば良い。以下の証明は容易である。(Wagreich [11] に書いてある。なお、 $Z_0 = \sum n_i A_i$ が $\tilde{X}_2$ の fundamental cycle, θ が $p \in Z_0$ を中心とする blow-up, p に於ける Z_0 の multiplicity が μ のとき、 $\tilde{X}_1$ の fundamental cycle は $\tilde{Z}_0 = \sum n_i \tilde{A}_i + \mu E$ ($E = \theta^{-1}(p)$, $\tilde{A}_i = \overline{\theta^{-1}(A_i - p)}$).

$$\star \quad p_g(\mathcal{O}_x) \geq p_a(\mathcal{O}_x) \geq p_a(Z_0)$$

$$(\because p_a(Z) = (1 - \dim H^0(Z, \mathcal{O}_Z)) + \dim H^1(Z, \mathcal{O}_Z) \leq \dim H^1(Z, \mathcal{O}_Z) \leq p_g(\mathcal{O}_x)$$

(5) "genus 0" の場合は上の三つの "genus" は一致し、更にこの時この singularity はいさゝか "良い" 性質をもつ。

定理 B. (Artin [1], Storch [13], D. Kirby [5], Brieskorn [2], Tyurin^[10])
singularity (X, x) に関して次の性質は同値である。

$$(i) \quad p_g(\mathcal{O}_x) = 0$$

$$(ii) \quad p_a(\mathcal{O}_x) = 0$$

$$(iii) \quad p_a(Z_0) = 0$$

$$(iv) \quad \forall Z > 0, \text{Supp}(Z) \subset \pi^{-1}(x), \quad p_a(Z) \leq 0.$$

$$(v) \quad C(\mathcal{O}_x) \text{ は有限群 } (C(\mathcal{O}_x): \mathcal{O}_x \text{ の divisor class group}).$$

(vi) (X, x) の resolution は一点を中心とする blow-up を繰り返す事によって得られる。(Absolute isolatedness).

定義 この性質をもつ特異点を rational singularity という。

(6) 13.1. $f: X' \rightarrow X$ は finite, X', X は normal, $x' \in X', f(x') = x$.
この時、 $\mathcal{O}_{x'}$ が rational singularity (又は regular) $\Rightarrow \mathcal{O}_x$ も so.

13.2. $\mathbb{C}^2$ に作用する有限群 G に対し、 $\mathbb{C}^2/G$ の singularity と同型 (biholo.) な singularity を quotient singularity とする。

(i) quotient singularity は rational singularity.

(ii) (X, x) が quotient singularity $\Leftrightarrow \pi_1(K)$ は有限群. ([3])
quotient singularity は Brieskorn [3] に全部分類されている。

(7) $\star p_a(z_0)=1 \Leftrightarrow p_a(\mathcal{O}_x)=1$ (Wagreich [1], Prop. 4.3).

(8) $(X, x), (X', x')$ が同じ resolution のグラフをもち、更に $\pi^!(x) \cong \pi^!(x')$ (analytic variety として) ならば $p_g(\mathcal{O}_x) = p_g(\mathcal{O}_{x'})$ とは限らない。(後述の例参照)。

§ 4. Multiplicity と fundamental cycle の関係.

$\mathcal{O}_x$ の極大イデアルを m_x とする. ($m_x = \{f \in \mathcal{O}_x \mid f(x)=0\}$)

$H_x(n) = \dim_{\mathbb{C}} m_x^n / m_x^{n+1}$ と定義すると、 $n \gg 0$ のとき、

$$H_x(n) = a_0 \binom{n+2}{2} - a_1 \binom{n+1}{1} + a_2 \quad (a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z})$$

と書ける事が知られている。このとき a_0 を $\mathcal{O}_x$ の multiplicity (重複度) と呼び、 $\mu(\mathcal{O}_x)$ と書く。 $X = V(f) \subset \mathbb{C}^3_{\overbrace{x=0}}$ のときは、

$\mu(\mathcal{O}_x) = \text{ord}_0(f)$ である。($f = \sum a_{ijk} x^i y^j z^k$ と書くとき、
 $\text{ord}_0(f) = \min \{i+j+k \mid a_{ijk} \neq 0\}$)。

$\mathcal{O}_x$ の fundamental cycle を Z_0 とするとき、次の定理が成立する。

定理 C. ($\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ を resolution とする).

$$(i) \quad \mu(\mathcal{O}_x) \geq -Z_0^2.$$

$$(ii) \quad p_a(Z_0)=0 \text{ のとき, } \mu(\mathcal{O}_x) = -Z_0^2.$$

$$(iii) \quad m_x(\mathcal{O}_x) \cong \mathcal{O}(-Z_1) \text{ (divisor } Z_1 \text{ を定義する ideal) のとき,}$$

$$Z_1 \geq Z_0 \text{ で, } \mu(\mathcal{O}_x) = -Z_1^2. (\because \text{もし } Z_1 > Z_0 \text{ なら, } -Z_1^2 > -Z_0^2).$$

((i), (iii) は Wagreich [11], (ii) は Artin [1] 参照).

以上の結果によって、 $-Z_0^2$ をグラフに対する multiplicity のようなものと考えても良いと云える。 $\mu(\mathcal{O}_x) = -Z_0^2$ となる為のもう少し精密な条件が Wagreich [11] §5 に見られる。大雑把に云って、 $-Z_0^2$ が "十分大きい" 時、 $\mu(\mathcal{O}_x) = -Z_0^2$ である。

⑧ "十分大きい" を精密に定式化できないか。例えば、 $p_a(Z_0)$ のみで決まる数 N があって、 $-Z_0^2 \geq N \Rightarrow \mu(\mathcal{O}_x) = -Z_0^2$ とか。

§5. グラフの分類.

与えられた数 $p, n > 0$ に対して、 $p_a(Z_0) = p$, $-Z_0^2 = n$ となる、グラフをすべて示す事は (理論的には) 可能である。

$\bigcirc - \dots - \bigcirc$ の差を除けば、グラフは有限個である。以下にいくつかの例をならべる。(minimal resolution のグラフを示す。).

グラフの分類ができたとすると、次の問題は1つのグラフは "何種類" の (同型でない) $\mathcal{O}_x$ に対応するか? という事である。Tyurina [9] は、 $A = \bigcup A_i \cong A' = \bigcup A'_i$ なるとき、 $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{x'}$ が常に成立する為の条件を求めているがまだ完全とは言えない。しかし、*rational singularity* で、 $-Z_0^2 \leq 3$ のものに対しては1つのグラフに対して、1つの $\mathcal{O}_x$ しか対応しない事を示している。*quotient singularity* は同じ性質をもつ事が Brieskorn [3] に、また $\pi_1(K)$ が solvable であるグラフに対して Wagreich [12] がある。

★ グラフの分類の具体的な計算方法について。

$z < z_0$ とすると、*fundamental cycle* の定義から、 $\exists A_i, z \cdot A_i > 0$.
 $\therefore p(z + A_i) = p_a(z) + p_a(A_i) + (z \cdot A_i) - 1 \geq p_a(z) + p_a(A_i)$
より、 $p_a(z_0)$ なる事と、 $p_a(z_0)$ に至る chain に次のような事が起る度に、 $p_a(z_0)$ が増して行く事がわかる。

- 1°. $p_a(A_i) \geq 1$ なる A_i が存在する。
- 2°. $A_i \cdot A_j \geq 2$ なる i, j が存在する。(又は $z \cdot A_i \geq 2$ となる.)
- 3°. $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \emptyset$ なる (i, j, k) が存在する。
- 4°. グラフが cycle をもつ。

故に、例えば $p_a(z_0) = 0$ のときは、1° ~ 4° は起らない。また、例えば $-z_0^2 = 2 \Rightarrow Kz_0 = 0$. $A_i^2 \leq -2$ より $K \cdot A_i = 0$ がわかる。あとは Kodaira [6] §6 と同様にすれば良い。

§ 6. 例.

(1) Weighted homogeneous polynomial で定義された singularity のグラフは、Orlik-Wagreich [8] で計算方法が示されている。

グラフは星型 (一つの頂点から何本かの直線がのびてゐる形)

である。実際に計算してみると色々な面白い図形があらわれ

る。(c) は $x^2 - y^3 = 0$ の cusp をもつ rational curve をあらわす。

$$x^2 + y^2 + z^n = 0 \quad \text{Graph: } n-1 \text{ nodes in a line} \quad p_a(z_0) = 0, \quad z_0^2 = -2.$$

$$x^2 + y^3 + z^3 = 0 \quad \text{Graph: } 2 \text{ nodes, } 2 \text{ on } x, 3 \text{ on } y, 3 \text{ on } z \quad p_a(z_0) = 0, \quad z_0^2 = -2.$$

$$x^2 + y(z^2 + y^n) = 0 \quad \text{Graph: } 2 \text{ nodes, } 2 \text{ on } x, 2 \text{ on } z, n-1 \text{ nodes in a line} \quad p_a(z_0) = 0, \quad z_0^2 = -2.$$

$$x^2 + y^3 + z^4 = 0 \quad \text{Graph: } 2 \text{ nodes, } 2 \text{ on } x, 3 \text{ on } y, 4 \text{ on } z \quad p_a(z_0) = 0, \quad z_0^2 = -2.$$

$$x^2 + y^3 + z^5 = 0 \quad \text{Graph: } 2 \text{ nodes, } 2 \text{ on } x, 3 \text{ on } y, 5 \text{ on } z \quad p_a(z_0) = 0, \quad z_0^2 = -2.$$

$$x^2 + y(y^2 + z^3) = 0 \quad \text{Graph: } 2 \text{ nodes, } 2 \text{ on } x, 3 \text{ on } y, 3 \text{ on } z \quad p_a(z_0) = 0, \quad z_0^2 = -2.$$

$$x^2 + y^3 + z^{6n} = 0 \quad \text{Graph: } (-1) \text{ on } x, n-1 \text{ nodes in a line} \quad p_a(z_0) = 1, \quad z_0^2 = -1.$$

$$x^2 + y^3 + z^{6n+1} = 0 \quad \text{Graph: } (-1) \text{ on } x, n-1 \text{ nodes in a line} \quad p_a(z_0) = 1, \quad z_0^2 = -1.$$

$$x^2 + y^3 + z^{6n+2} = 0 \quad \text{Graph: } 3 \text{ on } x, n-1 \text{ nodes in a line} \quad p_a(z_0) = 1, \quad z_0^2 = -1.$$

$$x^2 + y^3 + z^{6n+3} = 0 \quad \text{Graph: } 3 \text{ on } x, n \text{ nodes in a line} \quad p_a(z_0) = 1, \quad z_0^2 = -1.$$

$$x^2 + y^3 + z^{6n+4} = 0 \quad \text{Graph: } 2 \text{ on } x, 2 \text{ on } y, 2 \text{ on } z, n-1 \text{ nodes in a line} \quad p_a(z_0) = 1, \quad z_0^2 = -1.$$

$$x^2 + y^3 + z^{6n+5} = 0 \quad \text{Graph: } 2 \text{ on } x, 4 \text{ on } y, 5 \text{ on } z, n-1 \text{ nodes in a line} \quad p_a(z_0) = 1, \quad z_0^2 = -1.$$

$$x^2 + y^4 + z^{4n} = 0 \quad \text{Graph: } (-1) \text{ on } x, n-1 \text{ nodes in a line} \quad p_a(z_0) = 1, \quad z_0^2 = -2.$$

$$x^2 + y^4 + z^{4n+1} = 0 \quad \text{Diagram: } \underbrace{\bigcirc \cdots \bigcirc}_{n-1} \text{---} \textcircled{-3} \text{---} \textcircled{-3} \text{---} \underbrace{\bigcirc \cdots \bigcirc}_{n-1} \quad p_a(z_0)=1, z_0^2=-2.$$

$$x^p + y^q + z^{pq} = 0 \quad \text{Diagram: } \textcircled{-1} \text{ with } \frac{(p-1)(q-1)}{2} \text{ below it} \quad (\text{但し, } (p, q)=1) \quad p_a(z_0)=\frac{(p-1)(q-1)}{2}, z_0^2=-1.$$

$$x^p + y^q + z^{pq+1} = 0 \quad \text{Diagram: } \textcircled{-1} \text{ with } \frac{(p-1)(q-1)}{2} \text{ below it} \quad (\text{但し, } (p, q)=1) \quad p_a(z_0)=\frac{(p-1)(q-1)}{2}, z_0^2=-1.$$

[$x^p - y^q = 0$ の cusp 点]
 [rational curve]

$$x^2 + y^5 + z^5 = 0 \quad \text{Diagram: } \textcircled{-3} \text{ with 5 circles around it} \quad p_a(z_0)=1, z_0^2=-2.$$

$$x^2 + y^3 + yz^{4n+1} = 0 \quad \text{Diagram: } \textcircled{-3} \text{ with } \underbrace{\bigcirc \cdots \bigcirc}_{n-1} \text{ to its right} \quad p_a(z_0)=1, z_0^2=-1.$$

(2) weighted homogeneous 7 なる場合、埋め込み次元が
高い場合. (但し、与えられた elliptic curve の P -3 数に対し.)
 $p^2 = 4p^3 - g_2p + g_3$

$$\textcircled{-n} \quad \left\{ z_0/z_1 = z_1/z_2 = \cdots = z_{n-1}/z_n \right\} \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

$$\textcircled{-3} \text{ [1]} \quad \{ x^2z - 4y^3 - g_2yz^2 - g_3z^3 = 0 \} \subset \mathbb{C}^3$$

$$\textcircled{-4} \text{ [1]} \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1^2 - 4z_0z_3 - g_2z_0z_1 - g_3z_0^2 = 0 \\ z_1^2 - z_0z_3 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{C}^4$$

$$\textcircled{-5} \text{ [1]} \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1^2 - z_0z_3 = 0 \\ z_2z_4 - 4z_1^2 - g_2z_0z_3 - g_3z_0z_1 = 0 \\ z_1z_2 - z_0z_4 = 0 \\ z_2^2 - 4z_1z_3 - g_2z_0z_1 - g_3z_0^2 = 0 \\ z_1z_4 - z_2z_3 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{C}^5.$$

($\textcircled{-6}$, $\textcircled{-7}$, ...) について 時間さえかければ計算できる ... [12]

$$\text{Diagram: } \textcircled{-3} \text{ with 2 circles around it} \quad x^2 + y^3 - 3yz^4 + yz^5 + 2z^6 - z^7 = 0.$$

$$\text{Diagram: } \textcircled{-3} \text{ with 3 circles around it} \quad z^2 - (x+y^2)(x^2+y^7) = 0.$$

$$\text{Diagram: } \textcircled{-4} \text{ with 4 circles around it} \quad z^2 + x^3y + x^2y^2 + ty^n = 0 \quad n \geq 5, \text{頂点の数 } n-4 \text{ 可.}$$

(3) $P_a(\mathcal{O}_x) > P_a(\mathcal{O}_0)$ なるグラフ. $\textcircled{-1}$ に於て.

$P_a(\mathcal{O}_0)=3 < P_a(2\mathcal{O}_0)=4=P_a(\mathcal{O}_x)$ (こんな例はいくらでも作れる.)

(4) $P_g(\mathcal{O}_x) > P_a(\mathcal{O}_x)$ なる例. (Wagreich [11])

1°. $\textcircled{n}$ で, $-g \leq -n \leq 2-2g$ とすると, $P_g(\mathcal{O}_x)$ は,

$3g-n-1$ と g の間のすべての値をとらせる事ができる.

$$P_a(\mathcal{O}_x) = g.$$

2°. $\textcircled{1}$ で, $2=P_g(\mathcal{O}_x)=\dim H^1(\mathcal{O}_{\mathcal{O}_0+\mathcal{O}_1}) > P_a(\mathcal{O}_x)=1.$

§6. あとがき.

Singularity の genus を正当化する材料は今のところ, genus 0 を除いて余りないようと思われる。Kodaira [6] の §7 以下に対応する事は言えないだろうか? また, グラフを与えた時, そのグラフをもつ ~~graph~~ singularity を特徴づける事もまだ一般には出来ていないようだ。問題は事欠かないが, 解けるかどうか?

References.

[L] Laufer: Normal 2-dimensional singularities.

(Princeton, 1971).

[1]. Artin: On isolated rational singularities of surfaces.

Amer. J. 88 (1966) 129~136.

[2] Brieskorn : Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen. Math. Ann. 166 (1966) 76~102.

[3] Brieskorn : Rational Singularitäten komplexen Flächen. Invention 4 (1968) 336~58.

[4] Hirzebruch 10 : Quadratic forms and differential manifolds. Dekker 4 (1971).

[5] D. Kirby : The structure of an isolated multiple point of a surface. I, II, III. Proc. London Math. Soc. 4 (1956)

[6] K. Kodaira : On compact analytic surfaces II. Annals of math. 77 (1963)

[7] Mumford : The topology of normal singularities of an algebraic surface. Bull. I.H.E.S. 9 (1961)

[8] Orlik-Wagreich : Isolated singularities with $\mathbb{C}^*$ -action. Annals of Math. 93 (1971) 205~228.

[9] G.N. Tyurina : On the tautness of rationally contractible curves on a surface. Izv. 2 (1968) 907~34.

[10] ——— : Absolute isolatedness of rational singularities and triple rational points. Func. anal. & its app. 2 (1968).

[11] Wagreich : Elliptic singularities of surfaces.

Amer. J. 92 ('70) 419~454.

[12] — : Singularities of complex surfaces with
solvable local fundamental groups. *Topology* 11 ('72)
51~72.

[13] Storch : Fastfaktorielle Ringe. Schriftenreihe
Math. Inst. Univ. Münster ('67).