

Mayer-Vietoris 完全系列のセンサーネットワーク被覆問題 への応用

荒井迅（京都大学理学研究科／JST さきがけ）

林和則（京都大学情報学研究科）

平岡裕章（広島大学理学研究科）

1 序

無線通信の分野では、対象領域に安価なセンサーを多数配置し互いに無線通信をすることで情報統合を行うユビキタスセンサーネットワーク研究が盛んに行われている。このセンサーネットワーク研究に関しては大きく分けて2つの話題がある。

1. 局所的な各センサー情報からどのような大域情報を抜き出すか
2. 膨大なセンサーからの局所情報をどのようにして統合するか

つまり上記1はアプリケーションの側からの要求に基づく研究対象となり、一方2は通信方式やプロトコル、利用可能な演算量などからの問題意識で信号処理と深く関わってくる。本論文ではセンサーネットワーク研究における最も基本的な領域被覆問題に対して、上記1,2の双方の視点から考察を与える。

このセンサーネットワークの被覆問題に対して、Ghrist 等は近年位相幾何学的手法を提案している [4][5][6]。彼らのアイディアは被覆状態に関する大域情報を、局所的な各センサー間の通信状態から定まるある幾何対象のホモロジー群から捉えることである。この手法の長所はセンサーの絶対位置の情報を全く仮定しない点である。また対象領域内のセンサーに対して一様分布性などの確率的な仮定も必要としない。これらの仮定は実際の設定のもとではいささか非現実的と考えられるが、従来の計算幾何学的手法（e.g.[8][11][13][20]）や確率的手法（e.g.[10][17][19]）では必要とされている。その意味から Ghrist 等が提案した位相幾何学的手法は大変注目を集めている。

ここで論文 [4] に従って我々が考察する問題設定をまとめておく。

仮定

- A1 対象領域 D は $\mathbb{R}^2$ 内の連結なコンパクト集合とする。また P はセンサー（ノードとも呼ぶ）の集合とする。
- A2 2つのセンサー $v, w \in P$ は互いの距離が r_b 以下であるとき通信可能であるとする。
- A3 各センサー $v \in P$ は r_c 円板 $B(v; r_c)$ 内を計測（被覆: covering）できるとする。

ここで r_b と r_c は $r_c \geq r_b/\sqrt{3}$ を満たすものとする.

A4 D の境界 ∂D はフェンスノードと呼ばれる P の部分集合が定める区分線形かつ連結な集合で与えられているとする. また隣り合うフェンスノード間距離は r_b 以下であるとする.

ここで局所的な被覆円板の全ての和集合を $U = \bigcup_{v \in P} B(v; r_c)$ で表すと, 被覆問題は $D \subset U$ を調べる問題として定式化される. この設定のもとで位相幾何学的手法における重要なステップは, 近傍のセンサーとの通信状況を示す r_b によって定まる Rips 複体 [7][18] を構成することである. ここで P の Rips 複体 $\mathcal{R}_{r_b}$ とは次で定められる単体複体のことである: P の全てのノードは 0 単体であり $(k+1)$ 個のノード $v_0, \dots, v_k$ は任意の 2 点間距離が r_b 以下であるときに k 単体 $|v_0 \cdots v_k|$ を定めるものとする. この論文では $\mathcal{R}_{r_b}$ を $\mathcal{R}$ と略記することにし, そのホモロジー群はすべて整数係数で扱うものとする.

ここで仮定 **A4** から境界 ∂D は 1 次元部分複体 $\mathcal{F}$ を定めることに注意する. このとき論文 [4] が与えた被覆達成 $D \subset U$ の十分条件は次のように述べられる:

定理 1 $[\alpha] \in H_2(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ が存在して $\delta_2[\alpha] \neq 0 \in H_1(\mathcal{F})$ となるならば $D \subset U$ である. つまり計測領域は対象領域を被覆している. ここで δ_2 は対 $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ から定まる完全系列

$$\longrightarrow H_2(\mathcal{F}) \longrightarrow H_2(\mathcal{R}) \longrightarrow H_2(\mathcal{R}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_2} H_1(\mathcal{F}) \longrightarrow$$

に現れる連結準同型写像である.

前にも述べたがこの定理の最も重要な点は絶対位置の情報を仮定しない点である. 必要なのは各センサーから得られる半径 r_b の局所的な通信状態のみであり, そこから構成される Rips 複体に被覆状態の情報が込められているのである. この意味からこの定理は非常に重要な結果となるわけであるが, 論文 [4] にも示されているように実用化の為には幾つかの困難な点を含んでいる. 特に, Rips 複体の構成自体は局所的な情報のみでよいが, ホモロジー群を計算する際に以下の問題点を克服しないといけない.

まずはじめにホモロジー群を計算するには Rips 複体の情報が必要になるが, 全てのセンサーが基地局にそれぞれ局所情報を送ることは, バッテリー制限にともなう長距離通信回避の観点から望ましくない. またこれでは結局大域的な情報を仮定していることとほぼ同じになってしまう. 次に何らかの方法で 1ヶ所に Rips 複体の情報が統合された場合でも, 現在のホモロジー群計算は単体数に対して 2 次から 5 次程度 [9] の計算量を必要としている. これは実用化の観点からは無視できない計算負荷となる.

これらの問題点を解決する 1 つの方法は分散型のホモロジー群計算法を開発することである. つまり並列的に計算される局所的なホモロジー群情報を, 何らかの方

法で足しあわせることで大域的なホモロジー群を求めようというのである。これが本論文でとりあつかうテーマである。

我々の主結果は仮定 **A1-A5** のもとで領域被覆の十分条件を並列処理で検証できるアルゴリズムを提案することである (**A5** 及びその検証可能な代用条件 $\widetilde{\mathbf{A5}}$ は3節を参照)。その手法は上記の分散型ホモロジー群計算を基礎としており、数学的な道具としては Mayer-Vietoris 完全系列を用いることになる。提案アルゴリズムは2つの部分からなっている。1つ目は Rips 複体の分割 $\mathcal{R} = \cup_{k=1}^K \mathcal{R}_k$ を与えるもの (アルゴリズム 5) であり、もう1つは局所的なホモロジー群 $H_1(\mathcal{R}_k)$ を足しあわせて $H_1(\mathcal{R})$ を計算するものである (アルゴリズム 7)。

ここで Mayer-Vietoris 完全系列とは $H_*(\mathcal{R}_1), H_*(\mathcal{R}_2), H_*(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)$, および $H_*(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)$ の相互関係を与えるものであり、常にこの完全系列から $H_1(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)$ を計算できるわけではないことに注意する。 $H_1(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)$ の計算可能性は命題 3 に示されるが、それには Rips 複体に関する次の幾何学的な良い性質が大事になってくる。

Rips 複体の各単体を $\mathbb{R}^2$ 内の凸包に対応させる射影を $p : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{R}$ の像を $S := p(\mathcal{R})$ と表す。また $\pi_1(\mathcal{R})$, $\pi_1(S)$ を基点を p により自然に同一視した基本群とし、 p によって誘導される基本群上の準同型写像を $\pi(p) : \pi_1(\mathcal{R}) \rightarrow \pi_1(S)$ とする。このとき次の定理が成り立つ。

定理 2 [2] $\mathcal{R}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列から構成される Rips 複体としたとき、 $\pi(p) : \pi_1(\mathcal{R}) \rightarrow \pi_1(S)$ は同型写像である。特に $H_1(\mathcal{R})$ は自由加群である。

ここで領域被覆の十分条件と1次のホモロジー群の関係について述べておく。定理 2 と付加的な仮定 **A5** もしくは検証可能な代用条件 $\widetilde{\mathbf{A5}}$ を使うと、十分条件が $H_1(\mathcal{R})$ を用いてあらわせることが命題 4 によって示される。よって本論文で提案するアルゴリズム 7 を用いることで分散的に十分条件を検証することが可能となる。一方、仮定 **A5** や $\widetilde{\mathbf{A5}}$ を加えないもとの設定のままだと、 $H_1(\mathcal{R})$ 自身の情報は被覆が達成されていない穴を修復する際に必要になってくる情報であるため [4], その意味でもここで提案する分散計算は重要になってくる。

本論文の構成は以下のとおりである。まず2節において我々の分散計算アルゴリズムで必要になってくる Mayer-Vietoris 完全系列を用いた数学的準備を行う。次の3節では対象領域に対する付加的な条件のもとで幾つかの同値な被覆十分条件を紹介する。中心テーマである分散計算アルゴリズムは4節で解説を与える。最後の5節では計算量の評価や今後の発展についての議論をまとめてある。なお本論文で必要となる位相幾何学の基本的な内容を付録にまとめてあるが、より詳しくは文献 [12][14][15][16] 等を参照されたい。また本論文は論文 [1] をもとにしている。

2 数学的準備

この節では以下の命題を証明する。

3 被覆達成の為の幾つかの十分条件

まず始めにセンサーの位置に関して新たな仮定を加える. この仮定は射影 $p: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ による像 $S = p(\mathcal{R})$ が図 1 のように対象領域に橋をかけない (non-pinching) ことを保証するものであり, 数学的には次を用意しておく.

仮定

A5 S は D に含まれる.

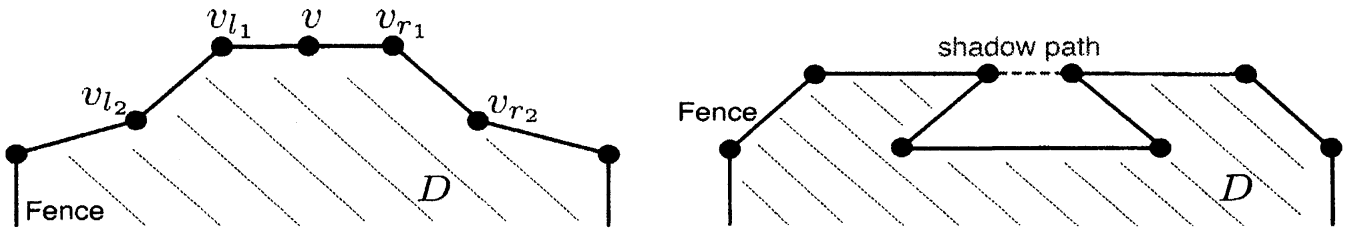


図 1: 左の図は “non-pinching” な状況で右の図はそうでない状況を表している.

しかしすぐにわかるように, この条件は各センサーの局所的な情報だけで検証することは難しい. そこで次の検証可能な少し弱い条件を **A5** の代用として考えよう. まず各フェンスノード v に対してその両隣2つまでのフェンスノードを $v_{l_1}, v_{l_2}, v_{r_1}, v_{r_2}$ と表すことにする. フェンスノード v が non-pinching 条件を満たすとは, $v_{l_1}, v_{l_2}, v_{r_1}, v_{r_2}$ 以外の全てのフェンスノードが v へ辺を持たないことをいう (図 1 参照). このとき **A5** を次の検証可能な条件で置き換えてみよう

$\widetilde{\text{A5}}$ 全てのフェンスノードが non-pinching 条件を満たす.

厳密に言えば図 2 に示しているような **$\widetilde{\text{A5}}$** を満たすが **A5** は満たさない特異な例外を作ることは可能である. そのような例外が現れる原因はフェンスノードの定め方に依存している. よってフェンスノードの集合に若干の修正を加えることで (例えば図 2 では v をフェンスノードとして考える) このような例外的状況は排除される. よって工学的視点からは non-pinching な状況を保証する為には **$\widetilde{\text{A5}}$** で十分であると思われる (もう一つ例外的な状況を考えることができるがそれについては命題 4 の後で説明する).

このとき定理 1 での被覆達成の為の十分条件は次の同値な表現を持つ.

命題 4 仮定 **A1-A5** のもとで次の 4 つの条件は同値である.

1. $H_1(\mathcal{F})$ で $\delta_2[\alpha] \neq 0$ となる $[\alpha] \in H_2(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ が存在する.

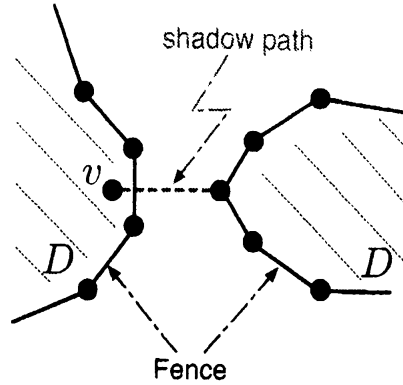


図 2: $\widetilde{\mathbf{A5}}$ は満たすが $\mathbf{A5}$ は満たさない例外的状況.

2. $j_1 : H_1(\mathcal{R}) \rightarrow H_1(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ は同型写像である.
3. $i_1 : H_1(\mathcal{F}) \rightarrow H_1(\mathcal{R})$ は零写像 $i_1 = 0$.
4. $H_1(\mathcal{R}) = 0$.

ここで j_1 と i_1 は対 $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ の完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_2(\mathcal{F}) & \xrightarrow{i_2} & H_2(\mathcal{R}) & \xrightarrow{j_2} & H_2(\mathcal{R}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta_2} \\ & \delta_2 \searrow & & \delta_2 \searrow & & \delta_2 \searrow & \\ & H_1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{i_1} & H_1(\mathcal{R}) & \xrightarrow{j_1} & H_1(\mathcal{R}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta_1} H_0(\mathcal{F}) \xrightarrow{i_0} H_0(\mathcal{R}) \longrightarrow \end{array}$$

に現れる準同型写像である.

Proof. $2 \Rightarrow 3$ と $4 \Rightarrow 1$ は完全性から明らかである.

$(1 \Rightarrow 2)$: $\text{Im } \delta_2$ は $H_1(\mathcal{F}) \cong \mathbb{Z}$ の部分群であるので $\text{Im } \delta_2 \cong c\mathbb{Z}$ と表せる. ここで仮定より c は非零の整数である. ここで

$$H_1(\mathcal{F})/\text{Ker } i_1 \cong H_1(\mathcal{F})/\text{Im } \delta_2 \cong \mathbb{Z}/c\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_c$$

と $H_1(\mathcal{R})$ が自由であることから, c は結局 1 でなければならない. これより $i_1 = 0$, つまり j_1 の単射性が導かれる. 更に $\text{Ker } i_0 = 0$ から $\delta_1 = 0$ がわかり j_1 の全射性が得られる. よって 2 が証明された.

$(3 \Rightarrow 4)$: $H_1(\mathcal{R}) \neq 0$ と仮定してみる. すると定理 2 より対応する基本群 $\pi_1(S)$ が非自明なループ $[l] \in \pi_1(S)$ を持つことになる. 仮定 $\mathbf{A5}$ からこれは D の内部に存在する. 一方, サイクル $\mathcal{F}$ は $H_1(\mathcal{R})$ で零なので $\mathcal{F}$ は $\mathcal{R}$ の 1 点に可縮であり, その対応するホモトピー変形は p を介して ∂D を S 内の 1 点に変形するホモトピーを誘導する. しかしこれは D 内にある非自明なループ $[l] \in \pi_1(S)$ の存在に矛盾する. ■

ここで仮定 **A5** は上の証明において $(3 \Rightarrow 4)$ でのみ使用されている点に注意しよう。この証明より図 3 に示されているようなもう一つの例外的状況 ($\widetilde{\mathbf{A5}}$ は満たすが **A5** は駄目) は、命題 4 の正当性に影響しない。これは D の外側にある S の辺は $\widetilde{\mathbf{A5}}$ の仮定のもとでは ∂D のある部分へ 2 単体を介してホモトピー変形可能であるからである。この意味からも、必要ならフェンスノード集合に若干の修正を加えた条件 $\widetilde{\mathbf{A5}}$ が、non-pinching な状況を保証する為に工学的には適していることがわかっていただけたと思う。

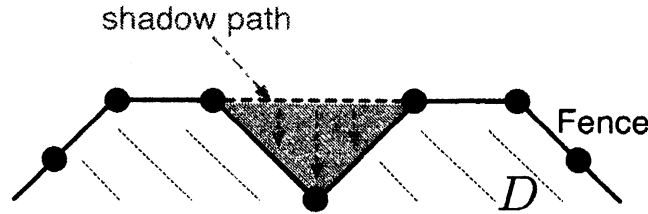


図 3: もう一つの例外的状況。しかしこの場合は点線で描かれた S の辺は常に ∂D のある部分にホモトピー変形可能である。よって命題 4 の主張は成立する。

そもそも non-pinching な状況を仮定したいのは命題 4 に現れている 4 を被覆達成の十分条件として使いたいからである。これは本論文で提案する分散型ホモロジー群計算が $H_1(\mathcal{R})$ に対して用意されているからであるが、この点については 5 節でもう少し詳しく解説する。

4 分散計算アルゴリズム

本節において仮定 **A1-A5**(or $\widetilde{\mathbf{A5}}$) のもとで被覆条件を分散型で検証可能にする 2 つのアルゴリズムを提案する。まず始めにセンサーの集合 P に対して核ノードと呼ばれるセンサーを指定する。適当に番号を付け替えて v_k ($k = 1, \dots, K$), を核ノードとし各核ノードには主 ID= k を割り当てておく。Rips 複体の分割を与えるアルゴリズム 5 は本質的には以下の 2 つの処理からなる：

- (1) 幅優先探索に従って主 ID がまだ未確定のノードに主 ID を割り振る。隣接ノード間で異なる主 ID を持つ場合はそれぞれ他方の主 ID を副 ID として情報を共有する。
- (2) ID= k に対応する木構造の末端ノードから k -シートとよばれる接続情報を随時情報を加えながら上流に伝えていく。

ここで k -シートとは次の 2 つのリストから構成されている：

- (1) 主もしくは副 ID に k を含む 2 つのノードからなる辺のリスト
- (2) リスト (1) に現れる各ノードが有する全ての副 ID 情報

アルゴリズム 5 (Rips 複体の分割)

1. 主 ID が既に確定している (k とする) 各ノード (v_k とする) は次の (a) と (b) を実行し, 以下の処理 2, 3 によりシートが送られてくるまで待機する. ただし (a) も (b) も実行できないノードは処理 2 へ.
 - (a) ノード v_k は主 ID がまだ未確定の隣接ノード $v_{k_1}, \dots, v_{k_l}$ に主 ID = k を割り当てる. ここで新たに主 ID が与えられた隣接ノードは同様の処理を繰り返していく.
 - (b) ノード v_k は既に k 以外の主 ID が定まっている隣接ノード $v_{k_{l+1}}, \dots, v_{k_L}$ に副 ID として k を割り当てる. ここで新たに副 ID が与えられたノードは処理 3 へ.
2. ノード v_k は k -シートを作成し ID = k に関する親ノードに送る. 処理 4 へ.
3. 副 ID = k を与えられたノードは隣接ノードの主 ID が全て確定した後に k -シートを作成し, ID = k に関する親ノードに送る. 処理 4 へ.
4. 各親ノードは全ての子ノードから k -シートを受け取り自身の接続情報をシートに追加した後に, 自分の親ノードに送る. この手順を全ての核ノードが完了するまで繰り返す.

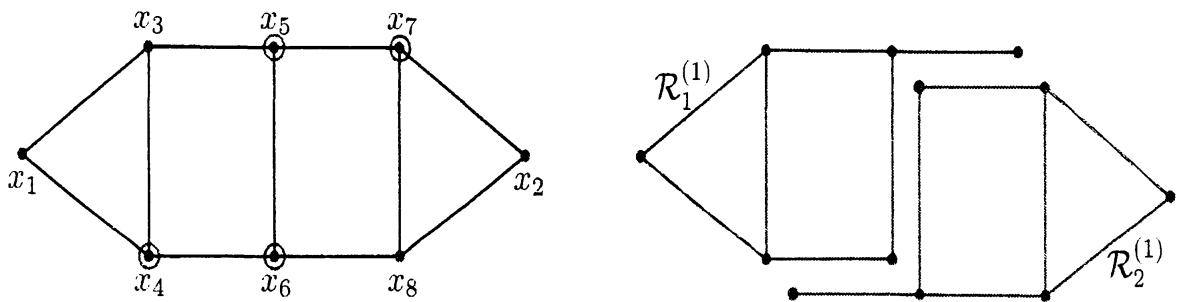


図 4: 左の図は通信ネットワークにおける主 ID と副 ID の割り当て例を示してある. ここで x_1 と x_2 を核ノードとしてある. 点と円周がそれぞれ ID = 1, 2 に対応する主 ID と副 ID を表している. 右の図はこれから定まる 1 次の部分 Rips 複体 $\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2$ である.

ここで各ノードは副 ID を複数持つこともあるため, そのような場合には処理 3 と 4 は並行して実行されることになる. また核ノード v_k 内の k -シートに現れる全ての

1-シート		2-シート	
辺リスト	ID リスト	辺リスト	ID リスト
(1,3)	$x_1: (1)$	(2,7)	$x_2: (2)$
(1,4)	$x_3: (1)$	(2,8)	$x_4: (1,2)$
(3,4)	$x_4: (1,2)$	(4,6)	$x_5: (1,2)$
(3,5)	$x_5: (1,2)$	(5,6)	$x_6: (2,1)$
(4,6)	$x_6: (2,1)$	(5,7)	$x_7: (2,1)$
(5,6)	$x_7: (2,1)$	(6,8)	$x_8: (2)$
(5,7)		(7,8)	

表 1: 図 4 に対応する $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ のシート. 辺リストに現れる数字の対は対応する両端ノードの番号である. ID リストにおける最初に数字は主 ID, それ以降の数字は (この場合は多くて 1 つだが) 副 ID を表す.

ノードは主 ID か副 ID として必ず $ID = k$ を持つことになるが, 当然その逆もなりたつ.

上のアルゴリズムで作成される k -シートは辺リストからグラフ (G_k とする) を定めることに注意する. 更にその部分グラフ G_{kl} を, k -シートに現れる辺であってその両端ノードの主 ID か副 ID が l であるものから構成する. 明らかに $G_{kl} = G_{lk}$ である. ここで $\mathcal{R}_k$ と $\mathcal{R}_{kl}$ をここで定めたグラフ G_k と G_{kl} からそれぞれ定まる Rips 複体とする. このとき次の命題が成り立つ.

命題 6

1. アルゴリズム 5 は有限のステップで終了する.
2. Rips 複体 $\mathcal{R}$ が連結の場合, 全てのノードに主 ID が 1 つ定まる.
3. Rips 複体 $\mathcal{R}$ が連結の場合, $\mathcal{R} = \bigcup_{k=1}^K \mathcal{R}_k$.
4. $\mathcal{R}_k \cap \mathcal{R}_l = \mathcal{R}_{kl}$.

すぐにわかるように副 ID は部分 Rips 複体 $\mathcal{R}_k, k = 1, \dots, K$ の共通部分に関する情報を持つことになる. また Rips 複体が連結でないような場合は各連結成分に少なくとも 1 つ核ノードを割り当てることで同様の命題は得られる. 図 4 は $K = 2$ の場合の主 ID と副 ID の割り当て例を示している. ここで x_1 と x_2 を各ノードとしている. また対応するシートは表 1 を参照してほしい.

以上の準備のもとに, $H_1(\mathcal{R})$ を命題 3 とアルゴリズム 5 をもちいて分散的に計算するアルゴリズムを紹介する.

アルゴリズム 7 ($H_1(\mathcal{R})$ の分散計算)

1. *Rips* 複体 $\mathcal{R}$ をアルゴリズム 5 を用いて部分 *Rips* 複体 $\{\mathcal{R}_k | k = 1, \dots, K\}$ に分割する.
2. $H_1(\mathcal{R}_k), k = 1, \dots, K$, を各核ノードが並列処理で計算.
3. $H_1(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)$ を命題 3 を用いて計算.
4. 全てのシート内の主 $ID=2$, 副 $ID=2$ を 1 に変更.
5. 上記 3 と 4 の処理を $H_1(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_k)$ に対して $k = K$ まで繰り返す.

このアルゴリズムによってホモロジー群 $H_1(\mathcal{R})$ が局所的なホモロジー群 $H_1(\mathcal{R}_k)$ から並列処理を用いて求まることになる. 命題 4 より仮定 A1-A5(or $\widetilde{A5}$) のもとでの被覆達成の十分条件は $H_1(\mathcal{R}) = 0$ で表されていた. よってアルゴリズム 7 により分散的にその条件を検証することが可能になった.

ここでアルゴリズム 7 における $H_1(\mathcal{R}_k)$ の足しあわせの手順はもっとも単純化したものをまとめている. すぐにわかることだが, このままでは核ノード v_1 により多くの計算負担がかかることになる. しかしこれはアルゴリズム 7 のホモロジー群の足しあわせの段階で再度並列化を行うことで回避可能である.

5 まとめ

本論文ではセンサーネットワーク被覆問題に対して分散処理の枠組みで被覆達成条件を検証できるアルゴリズムを提案してきた. ここで提案アルゴリズムに関わる計算量と今後の発展についてまとめておく.

まずアルゴリズム 7 の計算量について考えてみよう. 明らかにホモロジー群計算でもっとも計算コストがかかることになるが, 現在のホモロジー群計算は Smith 標準形を基礎にしておりその計算オーダーは単体の数に関して多項式オーダーであることが知られている. その次数 p は幾何学的設定にも依存するがおおよそ $2 \leq p \leq 5$ で与えられる.

アルゴリズム 7 では各足しあわせの過程ごとに, ホモロジー群計算 $H_1(\mathcal{R}_k)$, $H_1(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_k), k = 1, \dots, K$, および命題 3 に現れた階数 L が必要になる. ここで階数 L についてコメントしておく, 例えば論文 [3] の方法を用いることで階数 L は容易に求めることができる. この方法は我々の設定のもとで, 与えられた k 個の辺からなるサイクルが可縮かどうかを計算オーダー $O(k)$ で判定するものである. ここで m と n を *Rips* 複体の辺と点の数とすると前処理として $O(m \log n)$ の計算が必要になるが, それでもホモロジー群計算に比べると階数の計算は低コストであることがわかる. また工学的な立場からは, アルゴリズム 5 とアルゴリズム 7 をうまくスケジュールすることで $H_1(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_k) = 0$ とすることも考えられる. これにより $\text{rank } L = 0$ が保証されることになるので, そもそもこの計算は除くことも可能である. この意

味からアルゴリズム 7 による並列化は成功しておりその全体の計算時間はおよそ $1/K^p$ に短縮される。より詳しい評価, 計算コストと通信量の比較, および数値計算結果などは今後の課題である。

次にここで提案した分散型計算の今後の展開について議論する。まず最初に考えられるのが $H_1(\mathcal{R})$ 以外のホモロジー群についても分散型計算アルゴリズムを開発することであろう。3 節の議論を用いると, 命題 4 における十分条件 1 と 2 は仮定 A1-A4 のもとで同値であることが容易に示される。しかしながら仮定 A5 やその代用 $\widetilde{A5}$ を用意せざるをえなかった原因は $H_1(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ や準同型写像 j_1 の計算を避けるためである。よって $H_1(\mathcal{R})$ 以外のホモロジー群についても分散型計算の枠組みが提供できれば本論文での付加的な仮定 A5 や $\widetilde{A5}$ は必要でなくなる。

またここでの議論を論文 [4] で扱っているような 3 次元の被覆問題に発展させることも考えられる。この場合に対応する Rips 複体が $\mathbb{R}^3$ 内の有限点列から構成されることになる。いずれの場合もこれらの実現の為に Rips 複体の更なる幾何学的特徴付けが必要となるが ([2] を参照), この問題は工学的にも数学的にも大変興味深い問題であると思われる。

謝辞

本研究は TIN (Topology, Informatics, and Network) 勉強会 [21] での議論をもとにスタートしました。参加メンバーの方々に感謝致します。また定理 2 の証明において高橋宣能氏 (広島大学数学) から助言を頂きました。ここに感謝致します。

参考文献

- [1] Z. Arai, K. Hayashi, and Y. Hiraoka, Mayer-Vietoris sequences and coverage problems in sensor networks, preprint.
- [2] E. Chambers, V. de Silva, J. Erickson, and R. Ghrist, Rips complexes of planar point sets, preprint.
- [3] E. W. Chambers, J. Erickson, and P. Worah, Testing Contractibility in Planar Rips Complexes, preprint.
- [4] V. de Silva and R. Ghrist, Coordinate-free coverage in sensor networks with controlled boundaries via homology, Intl. J. Robotics Research 25 (2006), 1205-1222.
- [5] V. de Silva and R. Ghrist, Coverage in sensor networks via persistent homology, Alg. and Geom. Topology 7 (2007), 339-358.

- [6] R. Ghrist and A. Muhammad, Coverage and hole detection in sensor networks via homology, Proc. IPSN, 2005.
- [7] M. Gromov, Hyperbolic groups, Essays in group theory, Mathematical Sciences Research Institute Publications 8. Springer-Verlag, New York, 1987, 75-263.
- [8] C.-F. Huang and Y.-C. Tseng, The coverage problem in a wireless sensor network, in Proc. of the 2nd ACM international conference on Wireless sensor networks and applications, ACM Press, pp. 115–121 2003.
- [9] T. Kaczynski, K. Mischaikow, and M. Mrozek, Computational homology, Applied Mathematical Sciences, 157. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [10] H. Koskinen, On the Coverage of a Random Sensor Network in a Bounded Domain, Proceedings of 16th ITC Specialist Seminar (2004), 11-18.
- [11] X. Y. Li, P. J. Wan and O. Frieder, Coverage in wireless ad hoc sensor networks, IEEE Trans. on Computers, vol. 52, no. 6, pp. 753–763, 2003.
- [12] 柘田幹也, 代数的トポロジー, 講座<数学の考え方> 15, 朝倉書店, 2002.
- [13] S. Meguerdichian, F. Koushanfar, M. Potkonjak, and M. Srivastava, Coverage Problems in Wireless Ad-hoc Sensor Networks, IEEE INFOCOM (2001), 1380-1387.
- [14] 瀬山士郎, トポロジー：柔らかい幾何学, 日本評論社, 2003.
- [15] E. Spanier, Algebraic Topology, Springer-Verlag, 1966.
- [16] 田中利史, 村上齊, トポロジー入門, サイエンス社, 2005.
- [17] Yuh-Ren Tsai, Sensing coverage for randomly distributed wireless sensor networks in shadowed environments, IEEE Trans. on Vehicular Tech., vol. 57, no. 1, pp. 556–564, Jan. 2008
- [18] L. Vietoris, Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, Math. Ann. 97 (1927), 454-472.
- [19] P.-J. Wan and C.-W. Yi, Coverage by randomly deployed wireless sensor networks, IEEE Trans. on Information Theory, vol. 52, no. 6, pp. 2658–2669, June, 2006.

[20] H. Zhang and J. C. Hou, Maintaining sensing coverage and connectivity in large sensor networks, Ad Hoc & Sensor Wireless Networks, vol. 1, pp. 89–124, March, 2005.

[21] <http://oyosuri.mis.hiroshima-u.ac.jp/hiraoka/tin.htm>

付録

ホモロジー群とは大雑把に言うと幾何学図形の連結成分, 穴, 空洞などの個数を勘定する代数的道具である. それを厳密に定めようとする「幾何学的セッティング」と「代数的セッティング」が必要になる. 以下に幾何学的セッティングを A1 節で, 代数的セッティングを A2 節で解説する. 本論文にでてくる位相幾何学における便利な道具については A3, A4 節にまとめてある.

A1 単体複体

まず始めにホモロジー群を定義する為に必要となる幾何学的設定を明確にしておこう. 本論文で必要となるホモロジー群は以下で説明される単体複体とよばれる幾何学対象に対して定まることになる. より一般的な設定のもとでの解説や豊富な例題・図を伴った解説は [12][14][16] にあるので一読をお勧めする.

十分大きな次元を持つユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ を考えよう. $k+1$ 個の点 $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}^N$ はそれらが定める k 個のベクトル $\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_k}$ が一次独立のとき一般の位置にあると呼ばれる. このとき一般の位置にある $k+1$ 個の点が定める最小凸集合を k 単体といい $|a_0 \cdots a_k|$ と表す. 容易に想像できるように 0 単体は点, 1 単体は区間, 2 単体は三角形, 3 単体は四面体となることから, 単体とは一般次元の三角形であると考えられる. また k 単体 $|a_0 \cdots a_k|$ の面とは部分集合 $\{a_{i_0} \cdots a_{i_l}\} \subset \{a_0 \cdots a_k\}$ が定める単体 $|a_{i_0} \cdots a_{i_l}|$ のことをいう. これらの準備のもとで単体複体は以下のように定義される.

定義 8 次の 2 条件を満たす単体の集まり K を単体複体と定める:

1. K に属する単体 σ の面はまた K に属する.
2. $\sigma, \tau \in K$ かつ $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ ならば $\sigma \cap \tau$ は σ と τ の共通の面となる.

ここで K を単体複体とするとき $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ を多面体と呼ぶことにし, K^i で K 内の i 単体全ての集まりを表すものとする.

図 5 に描かれてある 2 つの図形を考えよう。それぞれの単体の集まりは以下で与えられる：

$$K_1 = \{|a_1a_2a_3|, |a_1a_2|, |a_1a_3|, |a_2a_3|, |a_2a_4|, |a_3a_4|, \\ |a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_4|\},$$

$$K_2 = \{|a_1a_2a_3|, |a_1a_2|, |a_1a_3|, |a_2a_4|, |a_2a_5|, |a_3a_4|, |a_3a_5|, \\ |a_4a_5|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_4|, |a_5|\}.$$

K_1 が単体複体になること、一方 K_2 は単体複体にならないことは定義の条件を調べることで確認できる (K_2 では $|a_1a_2a_3|$ と $|a_4a_5|$ の共通部分が両者の面になっていない)。

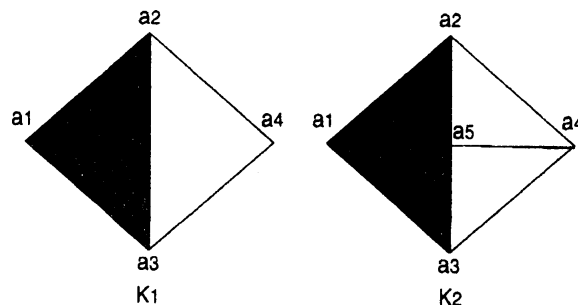


図 5: (1) K_1 : 単体複体 (2) K_2 : 単体複体ではない

A2 ホモロジー群

以上の幾何学的準備のもとに穴や空洞を数え上げる代数的道具であるホモロジー群を定義していこう。さてそもそも穴や空洞という日常的な言葉から想像する幾何学的状況とはどのようなものであろうか？ここでは穴と空洞を次の性質を満たすものとして理解してみる：

穴：境界の無い 1 次元の対象であって 2 次元の対象の境界になっていないもの (図 6 参照)

空洞：境界の無い 2 次元の対象であって 3 次元の対象の境界になっていないもの (3 単体とその表面を想像)

この解釈にもとづくと、穴や空洞の数を勘定するホモロジー群を代数的に定めていくには“境界”の概念が重要になってくることがわかるであろう。そこで境界に着目した代数化を以下に施していく。

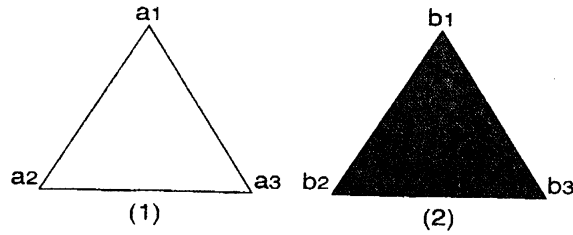


図 6: (1): 穴あり (2): 穴なし

まず各 K^n に対して n 鎖群と呼ばれるベクトル空間 C_n を定める:

$$C_n := \left\{ \sum_i \alpha_i \langle a_{i_0} \cdots a_{i_n} \rangle \mid |a_{i_0} \cdots a_{i_n}| \in K^n, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

つまり各 n 単体 $|a_{i_0} \cdots a_{i_n}|$ を基底とするベクトル空間を C_n とする. ここで頂点の置換に対して $\langle a_0 \cdots a_n \rangle = \text{sgn}(\tau) \langle a_{\tau(0)} \cdots a_{\tau(n)} \rangle$ なる約束を与えておく. C_n の要素を n 鎖と呼ぶ.

このようにして与えられたベクトル空間に対して境界作用素とよばれる線形写像を

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n &\rightarrow C_{n-1}, \\ \partial_n \langle a_0 \cdots a_n \rangle &:= \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_n \rangle \end{aligned}$$

で定める. ここで $\hat{a}_i$ は a_i を取り除くことを意味する. 境界作用素に関する著しい性質は 2 回作用させると零, つまり $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ が恒等的に成り立つことである. これは「境界の境界は空集合」という幾何学的事実を反映しているものである.

さて各 n 鎖群 C_n に対して境界に関する 2 つの重要な部分空間を導入する. まずサイクル $Z_n \subset C_n$ を境界作用素の核, つまり $Z_n := \text{Ker } \partial_n$ で与える. またバウンダリ $B_n \subset C_n$ を C_{n+1} からの境界作用素の像, つまり $B_n := \text{Im } \partial_{n+1}$ で与えられる部分空間とする. 上で述べたように境界作用素は 2 回作用させると零になることから $B_n \subset Z_n$ となっている. いささかくどい気もするがあえて述べておくと, サイクルとは境界作用素の核, つまり境界が無いものを表現し, バウンダリは 1 次元高いものの境界になっているものを表していると理解できる.

このとき本節最初に述べた穴や空洞の解釈を意識すると, それらを代数的に勘定する量であるホモロジー群を以下で定めることは自然であろう:

定義 9 単体複体 K に対してその n 次ホモロジー群 $H_n(K)$ は商ベクトル空間

$$H_n(K) := Z_n / B_n$$

で定められる (つまり境界が無いものの中で 1 次元高い対象の境界になっていないものの集まり).

ここで商ベクトル空間とは、 $u, v \in Z_n$ に対して $u - v \in B_n$ ならば $u \sim v$ なる同一視を導入したベクトル空間である。よって $v \in Z_n$ の要素に対して $v + B_n$ で与えられる集合が $H_n(K)$ の一つの要素を定めることになる（数学的には B_n が定める同値類）。

ここでの説明は鎖群をベクトル空間として導入したが一般には加群としてホモロジー群を導入する方が自然である。その場合、形式的には鎖群 C_n の定義に現れた $\alpha_i \in \mathbb{R}$ を $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ で置き換えればよい。これによりねじれ加群 $\mathbb{Z}_k, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, 等の単体複体のより豊富な情報が手に入ることになる。詳しい解説は [12][14][16] を参照してほしい。

図 6(1) で与えられる単体複体に対してホモロジー群を計算してみる。この場合鎖群は

$$\begin{aligned} C_0 &:= \text{Span}(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_3 \rangle), \\ C_1 &:= \text{Span}(\langle a_1 a_2 \rangle, \langle a_1 a_3 \rangle, \langle a_2 a_3 \rangle), \\ C_i &= 0, \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

で与えられる。対応する境界作用素は

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_i = 0, \quad i \neq 1$$

となる。例えば 1 次ホモロジー群を計算してみると $B_1 = 0$ ($\because C_2 = 0$) より

$$H_1 = Z_1/B_1 = \text{Span}(\langle a_1 a_2 \rangle - \langle a_1 a_3 \rangle + \langle a_2 a_3 \rangle) = \mathbb{R}$$

となる。同様に計算すると $H_0 = \mathbb{R}$ を得る。これらは 1 次ホモロジー群の次元から穴が 1 つ、0 次ホモロジー群の次元から連結成分が 1 つであることに対応している。つまりこの例を拡大して解釈することにより 0 次ホモロジー群の次元は連結成分、1 次ホモロジー群の次元は穴、2 次ホモロジー群の次元は空洞の個数をそれぞれ表すことになり、一般に n 次ホモロジー群の次元は “ n 次元の穴” の個数を勘定する量であることが示せる。

最後にホモロジー群の連続変形に対する不変性を述べておく。本付録の設定では厳密に示すことは出来ないが、与えられた図形のホモロジー群はその図形を連続的に変形しても変化しないことが知られている。つまり図形に切り目を入れてちぎったり穴をあけたり、また空いている穴をふさいだりする操作を禁止した連続的な変形によってホモロジー群は保たれる。例えば図 6(1) のホモロジー群は上で計算したが、図 7 のいずれの図形にも連続変形できることからこれらのホモロジー群は全て等しいことになる。

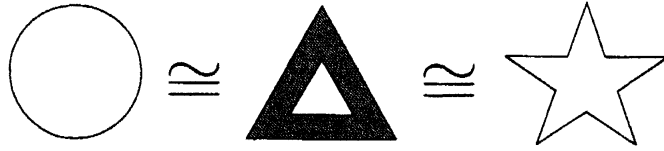


図 7: 連続変形の例

A3 相対ホモロジー群とその完全系列

単体複体対 (K, L) を考えよう. ここで K, L はそれぞれ単体複体であり L は K の部分単体複体 ($L \subset K$) であるとする. このとき 2 つの単体複体の “差” に対応するホモロジー群を計算する必要がある (例えば定理 1). その為に用いられる概念が相対ホモロジー群 $H_n(K, L)$ である. 大雑把に述べると相対ホモロジー群 $H_n(K, L)$ とは多面体 $|K|$ の中で部分多面体 $|L| \subset |K|$ を 1 点に潰した図形のホモロジー群に対応している. 例えば図 6(1), (2) が示す単体複体を K_1, K_2 とそれぞれ表すと $H_n(K_2, K_1)$ は $|K_1|$ を $|K_2|$ 内で 1 点に潰して (連続変形して) 得られる 3 単体の表面のホモロジー群になる. これは空洞が 1 つある図形なので, 結局相対ホモロジー群として $H_2(K_2, K_1) = \mathbb{R}$ を得る.

単体複体対 (K, L) に対して幾何学的な K, L と (K, L) の対応関係は上に述べた通りであるが, それらのホモロジー群 $H_n(K), H_n(L), H_n(K, L)$ の関係はどうなっているのでしょうか. この疑問に対する 1 つの答えとしてホモロジー完全系列:

$$\xrightarrow{j_{n+1}} H_{n+1}(K, L) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(L) \xrightarrow{i_n} H_n(K) \xrightarrow{j_n} H_n(K, L) \xrightarrow{\delta_n}$$

の存在が知られている. まずこの系列では $H_n(L), H_n(K), H_n(K, L)$ がこの順番で次数を下げながら順次現れる. これらのホモロジー群と線形写像 i_n, j_n, δ_n の組が完全系列であるとは, どのホモロジー群を取ってもその前後で定まる線形写像の像と核が一致していることを意味する. 例えば $H_n(K)$ では $\text{Im } i_n = \text{Ker } j_n$ が, また $H_n(K, L)$ では $\text{Im } j_n = \text{Ker } \delta_n$ が成り立つ. ここで δ_n は連結準同型写像とよばれる線形写像でホモロジー群の次数を 1 つ下げる作用素になっていることに注意されたい.

まとめると単体複体対 (K, L) には空間対のホモロジー群 $H_n(K, L)$ とよばれるものが考えられ, ホモロジー群 $H_n(K), H_n(L), H_n(K, L)$ はホモロジー完全系列を満たさなければならない. 相対ホモロジー群, ホモロジー完全系列の導出, 線形写像 i_n, j_n, δ_n の具体形等の詳しい解説は [12][14] を参照されたい.

A4 Mayer-Vietoris 完全系列

Mayer-Vietoris 完全系列を説明する為に, 例として図 6(1)(2) の図形を考えよう (前述のように (1)(2) に対応する単体複体を K_1, K_2 と表す). 両図形を $|a_2 a_3|$ と

$|b_2b_3|$ で接着した和集合も単体複体を与えることに注意しよう．つまり幾何学的には $K_1, K_2, K_1 \cap K_2, K_1 \cup K_2$ という単体複体達が考えられるが，それらのホモロジー群の関係はどうであろう．これに答えるものが次の Mayer-Vietoris 完全系列である．正確な設定としては単体複体 K_1, K_2 は単体複体 $K_1 \cup K_2$ の部分複体であり， $K_1 \cap K_2$ は K_1 および K_2 の部分複体であるとする．このとき Mayer-Vietoris 完全系列とよばれる次の完全系列が存在することが知られている．

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dots & & \xrightarrow{j_{n+1}} & H_{n+1}(K_1 \cup K_2) & \\ \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(K_1 \cap K_2) & \xrightarrow{i_n} & H_n(K_1) \oplus H_n(K_2) & \xrightarrow{j_n} & H_n(K_1 \cup K_2) & \\ \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(K_1 \cap K_2) & \xrightarrow{i_{n-1}} & \dots & & & \end{array}$$

ここで i_n, j_n, δ_n は線形写像であり $H_n(K_1) \oplus H_n(K_2)$ はベクトル空間の直積を表す記号である．Mayer-Vietoris 完全系列の導出，各線形写像の具体形については [14][16] にわかりやすい解説がある．

この Mayer-Vietoris 完全系列の存在により，たとえば $H_n(K_1), H_n(K_2)$ の情報からより大きな単体複体 $K_1 \cup K_2$ のホモロジー群が計算可能になる場合がある．つまり直接定義からホモロジー群を求めることが困難な図形に対しても，単純な構造なものに分割することで計算することが出来るのである．