

多次元格子上的擬似可積分系

神吉雅崇 (関西大学システム理工学部)

時弘哲治 (東京大学大学院数理科学研究科)

間瀬崇史 (東京大学大学院数理科学研究科)

Masataka Kanki

(Faculty of Engineering Science, Kansai University)

Tetsuji Tokihiro

(Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo)

Takafumi Mase

(Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo)

概要

近年, 2次元格子上で定義された離散方程式であって特異点閉じ込めを通過する非可積分系が発見された。本稿では, この方程式に特異点パターンに応じた従属変数変換を施して得られる方程式の Laurent 性と既約性を, 一般の領域に対して証明する。これを利用して, 変換前の方程式が coprimeness 条件を満たすことを示す。さらに, この方程式のリダクションによって得られる方程式についても, coprimeness 条件が成立することを証明する。

1. はじめに

離散系における可積分性判定テストとして最初に提唱されたのは特異点閉じ込めである [3]。特異点閉じ込めによるテストは, 系の発展に伴って現れる特異点がある後打ち消しあって消えるかどうかを見るものであり, 具体的な方程式に適用するのも容易である。

しかし, 特異点閉じ込めを通過するにもかかわらず非可積分となるような例として, Hietarinta-Viallet 方程式

$$y_m = y_{m-1} + \frac{a}{y_{m-1}^2} - y_{m-2}$$

が発見され, 特異点閉じ込めだけでは可積分性の判定テストとしては不十分であることがわかった [5]。そこで, 可積分性をより厳密に判定するために提唱されたのが代数的エントロピーによるテストである [2]。方程式 y_n の代数的エントロピーは

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\deg y_n)$$

で定義される。すなわち, エントロピーとは, 一般項 y_n を初期値の有理関数と見たときその次数がどの程度の増大度を持つか調べる量であり, この値が 0 になる方程式が可積分だと判定する。代数的エントロピーによる判定は精度がよいことが経験的にわかっており, 現在では, エントロピーが 0 になることをもって離散系の可積分性を定義する人も多い。

特異点閉じ込めの代数的再解釈として提唱されたのが, coprimeness 条件である [6, 7, 8]。このテストでは, 方程式の一般項を初期値の有理関数と考えた際の因子の打ち消しに注目する。単項式成分を除いた任意の因子の出現が有限の範囲にとどまるとき, 方程式は coprimeness 条件を満たすという。この条件は, Laurent 性を持つ方程式への従属変数変換と関係する。近年では, 可積分性判定テストとしてだけではなく, エントロピーを求める方法としても役立つことがわかってきている [9]。

本稿では, 特異点閉じ込めを通過するものの, 次数増大 (代数的エントロピー) の意味で非可積分となるような方程式に着目する。現在では, Hietarinta-Viallet 方程式以外にもそのような例は数多く知られているが [1, 13, 4],

それらはいずれも 1 次元格子上の方程式であった。多次元格子上の方程式における具体例は長年の間知られてこなかったが、近年、次のような具体例が発見された [10]:

$$(1.1) \quad x_{t,n} = -x_{t-1,n-1} + \frac{a}{x_{t,n-1}^k} + \frac{b}{x_{t-1,n}^k}.$$

ただし k は 2 以上の偶数であり, $a, b \neq 0$ である。方程式は, (t, n) -平面で右上の方向に発展させる。

定理 1.1 ([10]). 方程式 (1.1) は次のような特異点パターンを持つ:

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
init	REG	REG	REG	...
init	ε^{-k}	ε^1	REG	...
init	ε^1	ε^{-k}	REG	...
	init	init	init	...

ただし「init」は一般的な初期値であり, 「REG」は初期値に依存する有限の値である。すなわち, 「init」に対応する $x_{t,n}$ と $x_{1,1} = \varepsilon$, を初期値とみなして方程式を進展させ, ε に関する展開を見ている。

この特異点パターンから考えられる従属変数の変換は

$$x_{t,n} = \frac{f_{t,n} f_{t-1,n-1}}{f_{t-1,n}^k f_{t,n-1}^k}$$

であり, 方程式 (1.1) の $x_{t,n}$ にこの従属変数変換を施して得られる方程式は

$$(1.2) \quad f_{t,n} = \frac{-f_{t-2,n-2} f_{t-1,n}^k f_{t,n-1}^k + a f_{t-1,n-1}^{k^2-1} f_{t,n-2}^k f_{t-1,n}^k f_{t-2,n-1}^k + b f_{t-1,n-1}^{k^2-1} f_{t-2,n}^k f_{t,n-1}^k f_{t-1,n-2}^k}{f_{t-2,n-1}^k f_{t-1,n-2}^k}$$

である。本稿の第一の目的は, この方程式の Laurent 性と既約性を証明することである (定理 2.7)。この結果を用いて, 方程式 (1.1) が coprimeness 条件を満たすことが証明できる (定理 3.2)。

多次元格子上の方程式に対しては, その解に何らかの方向への平行移動不変性を課すリダクション (簡約) という操作によって, 定義されている格子の次元を下げる操作が可能である。リダクションによって, 方程式 (1.1) や (1.2) から新たな方程式が得られるが, それらの方程式が coprimeness 条件を満たすことについては, 文献 [10] の段階では予想でしかなかった。本稿 §4 では, 方程式の標数が 0 であり, a, b が何ら関係式を持たない文字変数であるという条件のもと, この予想を証明する (定理 4.2)。

2. 方程式 (1.2) の LAURENT 性と既約性

この章では, 方程式 (1.2) の Laurent 性と既約性を一般のよい領域に対して証明する (定理 2.7)。

まず, 領域に関する用語の導入と, 帰納法を用いるための準備をする。

定義 2.1. 格子 $\mathbb{Z}^2$ 上に直積順序を入れる。すなわち, $h = (t, n), h' = (t', n') \in \mathbb{Z}^2$ に対して

$$h \leq h' \Leftrightarrow t \leq t' \text{ かつ } n \leq n'$$

である。

定義 2.2 (よい領域 [11]). 空でない部分集合 $H \subset \mathbb{Z}^2$ が (方程式 (1.2) に関して) よい領域であるとは, 次の 2 条件を満たすことである:

- $(t, n) \in H$ ならば $(t+1, n), (t, n+1) \in H$ である。
- すべての $h \in H$ に対して, 集合

$$\{h' \in H \mid h' \leq h\}$$

の元は有限個である。

$H \subset \mathbb{Z}^2$ がよい領域のとき

$$H_0 = \{(t, n) \in H \mid (t-2, n-2) \notin H\}$$

とおき, H_0 に対する初期領域と呼ぶ。 H_0 に初期値を与えると, 方程式は H 全体に一意的に発展してゆく。

例 2.3 (L 字型領域).

$$H = \{(t, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid t, n \geq 0\}$$

はよい領域である. $t = 0, 1, n = 0, 1$ に対応する部分が初期領域となる. この領域は後の証明で用いる.

定義 2.4 ($d_H(h)$). H をよい領域とすると, $d_H: H \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$d_H(h) = \#\{h' \in H \mid h' \leq h\}$$

で定める. ただし $\#$ は集合の元の個数を表す. 以後, 混乱の恐れがない場合は d_H を単に d とかく.

補題 2.5. $h_1, h_2 \in H$ が $h_1 \leq h_2$ を満たすならば, $d(h_1) \leq d(h_2)$ である. 等号は $h_1 = h_2$ のときのみ成立する.

証明. d の定義に用いた集合に

$$\{h \in H \mid h \leq h_1\} \subset \{h \in H \mid h \leq h_2\}$$

という包含があるので $d(h_1) \leq d(h_2)$ は明らかである. $h_1 \neq h_2$ のとき, h_2 は右側の集合にのみ含まれるので, 元の個数が一致することはない. $\square$

定義 2.6. f を Laurent 多項式とする. f は, monic な Laurent 単項式 g と, 単項式で割れない多項式 h を用いて

$$f = gh$$

と一意的に書ける. このとき, h を f の多項式成分と呼ぶことにする.

定理 2.7. R を UFD とし, $a, b \in R$ を 0 でない元とする. このとき, 方程式 (1.2) は任意のよい領域上で Laurent 性を持ち, さらに各項はすべて既約になる.

証明. $H \subset \mathbb{Z}^2$ を任意のよい領域とし, 初期値を文字とする Laurent 多項式環を

$$A = R[f_{h_0}^{\pm} \mid h_0 \in H_0]$$

とおく. $f_{h_0}(h_0 \in H_0)$ を初期値とし, $h = (t, n) \in H$ に対して方程式 (1.2) を考える:

$$f_{t,n} = \frac{-f_{t-2,n-2}f_{t-1,n}^kf_{t,n-1}^k + af_{t-1,n-1}^{k^2-1}f_{t,n-2}^kf_{t-1,n}^kf_{t-2,n-1}^k + bf_{t-1,n-1}^{k^2-1}f_{t-2,n}^kf_{t,n-1}^kf_{t-1,n-2}^k}{f_{t-2,n-1}^kf_{t-1,n-2}^k}.$$

このとき,

- $f_h \in A$
- f_h は A の元として既約

となることを, $d_H(h)$ に関する帰納法で示す. なお, 証明の過程では h だけでなく H も動かす. すなわち, 他によい領域 H' と $h' \in H$ があって $d_{H'}(h') < d_H(h)$ だったならば, 「帰納法の仮定」とは「 $f_{h'}$ が $f_{h_0}(h_0 \in H'_0)$ たちの既約な Laurent 多項式となる」ということを含む.

Step 1

$h \in H_0$ ならば f_h は初期値である. よって $f_h \in A$ であり, f_h は既約である. 特に $d(h) = 1$ のとき $h \in H_0$ となるので, 帰納法の出発点では主張は成立している. 以後, $h \in H \setminus H_0$ のときを考える.

Step 2

$f_h \in A$ となることを示す.

$$F = -f_{t-2,n-2}f_{t-1,n}^kf_{t,n-1}^k + af_{t-1,n-1}^{k^2-1}f_{t,n-2}^kf_{t-1,n}^kf_{t-2,n-1}^k + bf_{t-1,n-1}^{k^2-1}f_{t-2,n}^kf_{t,n-1}^kf_{t-1,n-2}^k$$

とおく. $f_h = \frac{F}{f_{t-2,n-1}^kf_{t-1,n-2}^k}$ なので, F が A において $f_{t-2,n-1}^kf_{t-1,n-2}^k$ で割れることを示せばよい. 帰納法の仮定より $f_{t-2,n-1}$ と $f_{t-1,n-2}$ は既約であり, 特に互いに素である (片方の多項式成分にしか登場しない文字がある). よって, F が $f_{t-2,n-1}^k$ と $f_{t-1,n-2}^k$ でそれぞれ割り切れることを示せばよい. t と n に関する対称性があるので, $f_{t-2,n-1}^k$ で割れることだけを言えば十分である.

$(t-2, n-1) \in H_0$ のときは自明なので, $(t-2, n-1) \notin H_0$ のときだけを考える. このとき, よい領域の条件より $f_{t-1,n}$ と $f_{t-1,n-1}$ はどちらも初期値でない.

$$F \equiv f_{t,n-1}^k \left(-f_{t-2,n-2}f_{t-1,n}^k + bf_{t-1,n-1}^{k^2-1}f_{t-2,n}^kf_{t-1,n-2}^k \right) \pmod{f_{t-2,n-1}^k}$$

なので,

$$F' = -f_{t-2,n-2}f_{t-1,n}^k + b f_{t-1,n-1}^{k^2-1} f_{t-2,n}^{k^2} f_{t-1,n-2}^k$$

とおいたとき $F' \equiv 0 \pmod{f_{t-2,n-1}^k}$ となることを示せばよい. 帰納法の仮定より $f_{t-2,n-1}$ は $f_{t-3,t-1}$, $f_{t-2,t-2}$, $f_{t-2,t-3}$ と互いに素なので, A を局所化したあと $f_{t-2,n-1}^k$ (の生成するイデアル) で割った環

$$A[f_{t-3,n-1}^{-1}, f_{t-2,n-2}^{-1}, f_{t-2,n-3}^{-1}] / (f_{t-2,n-1}^k)$$

において $F' = 0$ になることを言えばよい. 以後, この Step ではすべての計算をこの環の上で行う.

$f_{t-2,n-1}^k = 0$ を用いると

$$f_{t-1,n} = -\frac{f_{t-3,n-2}f_{t-2,n}^k f_{t-1,n-1}^k}{f_{t-3,n-1}^k f_{t-2,n-2}^k}$$

なので,

$$\begin{aligned} F' &= -\frac{f_{t-3,n-2}f_{t-2,n}^{k^2} f_{t-1,n-1}^{k^2}}{f_{t-3,n-1}^{k^2} f_{t-2,n-2}^{k^2-1}} + b f_{t-1,n-1}^{k^2-1} f_{t-2,n}^{k^2} f_{t-1,n-2}^k \\ &= \frac{f_{t-2,n}^{k^2} f_{t-1,n-1}^{k^2-1}}{f_{t-3,n-1}^{k^2} f_{t-2,n-2}^{k^2-1}} \left(-f_{t-3,n-2}f_{t-1,n-1}^k + b f_{t-1,n-2}f_{t-3,n-1}^{k^2} f_{t-2,n-2}^{k^2-1} \right) \\ &= \frac{f_{t-2,n}^{k^2} f_{t-1,n-1}^{k^2-1}}{f_{t-3,n-1}^{k^2} f_{t-2,n-2}^{k^2-1} f_{t-2,n-3}^k} \left(-f_{t-3,n-2}f_{t-1,n-1}^k f_{t-2,n-3}^k + b f_{t-1,n-2}f_{t-3,n-1}^{k^2} f_{t-2,n-2}^{k^2-1} f_{t-2,n-3}^k \right) \end{aligned}$$

となる. ここで, 方程式 (1.2) を使うと

$$\begin{aligned} &-f_{t-3,n-2}f_{t-1,n-1}^k f_{t-2,n-3}^k + b f_{t-1,n-2}f_{t-3,n-1}^{k^2} f_{t-2,n-2}^{k^2-1} f_{t-2,n-3}^k \\ &= -f_{t-3,n-3}f_{t-2,n-1}^k f_{t-1,n-2}^k + a f_{t-2,n-2}^{k^2-1} f_{t-1,n-3}^{k^2} f_{t-2,n-1}^k f_{t-3,n-2}^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

なので, 結局 $F' = 0$ である.

これで f_h の Laurent 性の証明が完了した. 以後, f_h の既約性を証明する.

Step 3

環 A において, f_h が $f_{t-1,n}$, $f_{t,n-1}$, $f_{t-1,n-1}$ のどれでも割り切れないことを示す. ただし, これらが初期値のときは考えない.

方程式 (1.2) より

$$f_{t,n}f_{t-2,n-1}^k f_{t-1,n-2}^k = -f_{t-2,n-2}f_{t-1,n}^k f_{t,n-1}^k + a f_{t-1,n-1}^{k^2-1} f_{t,n-2}^{k^2} f_{t-1,n}^k f_{t-2,n-1}^k + b f_{t-1,n-1}^{k^2-1} f_{t-2,n}^{k^2} f_{t,n-1}^k f_{t-1,n-2}^k$$

である. もし f_h が $f_{t-1,n}$ で割れたと仮定すると, 両辺の $f_{t-1,n}$ による剰余を取ることで

$$b f_{t-1,n-1}^{k^2-1} f_{t-2,n}^{k^2} f_{t,n-1}^k f_{t-1,n-2}^k \equiv 0 \pmod{f_{t-1,n}}$$

となる. しかし, 帰納法の仮定より $f_{t-1,n-1}$, $f_{t-2,n}$, $f_{t,n-1}$, $f_{t-1,n-2}$ はいずれも $f_{t-1,n}$ と互いに素なので矛盾である. $f_{t,n-1}$ や $f_{t-1,n-1}$ で割れないことも完全に同様である.

Step 4

集合 S を

$$S = \{h' \in H \mid h' \leq h\}$$

で定める. S が順序 $\leq$ に関して 2 つ以上の極小元を持つ場合に, f_h が R の元として既約となることを示す.

$N \geq 2$ を極小元の個数とする. $h^{(i)} = (t^{(i)}, n^{(i)}) \in S$ を相異なる N 個の極小元とする. 領域 $H^{(i)} \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$H^{(i)} = H \setminus \{h_i\}$$

で定める. $h^{(i)}$ は H の $\leq$ に関する極小元でもあるので, $H^{(i)}$ はいずれもよい領域である. このとき

$$d_{H^{(i)}}(h) = d_H(h) - 1$$

なので, 帰納法の仮定より

$$f_h \in A^{(i)} := R \left[f_{h_0}^{\pm} \mid h_0 \in H_0^{(i)} \right]$$

であり, f_h は $A^{(i)}$ において既約である ($i = 1, \dots, N$). ただし $H_0^{(i)}$ は $H^{(i)}$ の初期領域であり, 具体的に

$$H_0^{(i)} = \{(t^{(i)} + 2, n^{(i)} + 2)\} \cup H_0 \setminus \{h^{(i)}\}$$

とかける.

環の局所化の包含関係

$$A \subset A \left[f_{t^{(i)}+2, n^{(i)}+2}^{-1} \right] = A^{(i)} \left[f_{h^{(i)}}^{-1} \right] \supset A^{(i)}$$

に注目する. f_h は $A^{(i)}$ における既約元であり, 局所化は既約性を保つので, f_h は $A \left[f_{t^{(i)}+2, n^{(i)}+2}^{-1} \right]$ における既約元である. よって, 既約元 $F^{(i)} \in A$ と非負整数 r_i を用いて

$$(2.1) \quad f_h = f_{t^{(i)}+2, n^{(i)}+2}^{r_i} F^{(i)}$$

と N 通りの表示ができる. f_h が既約でなくなる可能性は, $N = 2$ で

$$(2.2) \quad f_h = u f_{t^{(1)}+2, n^{(1)}+2} f_{t^{(2)}+2, n^{(2)}+2}$$

となる場合のみに絞られる ($u \in A$ は可逆元). 以下, この可能性を排除する.

もし $i = 1, 2$ のいずれかに対して $t^{(i)} + 2 > t$ か $n^{(i)} + 2 > n$ の少なくとも一方が成り立つ場合, 文字 $f_{h^{(i)}}$ は f_h に登場しない. 例えば, $t^{(i)} + 2 > t$ のときを考えると, $h_i \in S$ の極小性より

$$(t^{(i)}, n^{(i)} + 1), \quad (t^{(i)}, n^{(i)} + 2), \quad (t^{(i)} + 1, n^{(i)} + 1), \quad (t^{(i)} + 1, n^{(i)} + 2)$$

はすべて H_0 に属する. よって, $t' \leq t$ の範囲で $f_{t', n'}$ が文字 $f_{h^{(i)}}$ を含むのは, 初期値である $f_{h^{(i)}}$ 自身のみである. 当然, 文字 $f_{h^{(i)}}$ は $f_{t^{(i)}+2, n^{(i)}+2}$ の多項式成分に登場するので, f_h に文字 $f_{h^{(i)}}$ が登場しないのであれば, 式 (2.1) において $r_i = 0$ となるしかない. 以上より, $i = 1, 2$ に対し $(t^{(i)} + 2, n^{(i)} + 2) \leq h$ が成立する場合に, 式 (2.2) の可能性を排除すればよい.

$(t - m, n) \in H_0$ となる最小の m をとる. このとき $f_{t-m, n}$ は領域 H で方程式を考えた場合の初期値である. 文字 $f_{t-m, n}$ は f_h の多項式成分に登場することが容易にわかるので, $f_{t^{(1)}+2, n^{(1)}+2}, f_{t^{(2)}+2, n^{(2)}+2}$ のうち少なくとも一方は文字 $f_{t-m, n}$ を多項式成分に含む. $f_{t^{(1)}+2, n^{(1)}+2}$ がそうであるとしてよい. このとき, $(t - m, n) \leq (t^{(1)} + 2, n^{(1)} + 2)$ であり, 特に $n \leq n^{(1)} + 2$ である. 一方, $n^{(1)} + 2 \leq n$ を仮定していたので, 結局 $n = n^{(1)} + 2$ となるしかない.

同様に $(t, n - \ell) \in H_0$ となる最小の ℓ をとって議論することにより, $t = t^{(i)} + 2$ となる i が存在することがわかる. もし $i = 1$ ならば, $h = (t^{(1)} + 2, n^{(1)} + 2)$ となるが, これは Step 3 で既に終えたケースである (なお, 実際にはこの場合は $h^{(2)}$ が存在できないので, そもそも $i = 2$ のケースしかない). 以上より

$$n = n^{(1)} + 2, \quad t = t^{(2)} + 2$$

となることがわかった.

集合 S には 2 つしか極小元が存在しなかったので, $(t-3, n-3) \notin H$ である. なぜならば, もし $(t-3, n-3) \in H$ だったとすると, 集合

$$\{h' \in H \mid h' \leq (t-3, n-3)\}$$

の極小元が新たな S の極小元を与えてしまうからである. よって, $(t-1, n-1) \in H_0$ である.

方程式 (1.2) より, f_h は文字 $f_{t-1, n-1}$ を多項式成分に含む. よって, (2.2) の分解を考えると, $f_{t^{(1)}+2, n^{(1)}+2}, f_{t^{(2)}+2, n^{(2)}+2}$ の少なくとも一方は文字 $f_{t-1, n-1}$ を多項式成分に含まなければならない. $f_{t^{(1)}+2, n^{(1)}+2}$ がそうであるとしてよい. このとき

$$\begin{aligned} (t-1, n-1) &\leq (t^{(1)} + 2, n^{(1)} + 2) \leq (t, n), \\ n &= n^{(1)} + 2, \\ (t^{(1)} + 2, n^{(1)} + 2) &\neq (t, n) \end{aligned}$$

なので, 可能なケースは

$$t^{(1)} = t - 3, \quad n^{(1)} = n - 2$$

しかない. このとき分解 (2.2) は

$$f_h = u f_{t-1, n} f_{t, n^{(2)}+2}$$

となるが, Step 3 より f_h は $f_{t-1, n}$ で割り切れないため矛盾である.

以上より, S に極小元が 2 個以上存在する場合に, f_h の既約性を証明することができた. 以後, S の極小元が 1 個であると仮定して f_h の既約性を示す.

Step 5

格子全体を平行移動することで, S の唯一の極小元は原点 $(0, 0)$ であるとしてよい. このとき, 集合 S は

$$S = \{(t', n') \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq t' \leq t, 0 \leq n' \leq n\}$$

と具体的に表示できる. すなわち, S と L 字型領域 (例 2.3) は h 以下の部分で完全に一致する. f_h の既約性はそれ以外の部分には全く依存しないので, 最初から H が L 字型領域であったとして f_h の既約性をいえば十分である.

Step 6

$$H' = H \setminus \{(0, 0)\}$$

とおく. 帰納法の仮定より f_h は $A' := R[f_{h_0}^\pm \mid h_0 \in H']$ の元として既約である. 局所化の包含関係

$$A \subset A[f_{22}^{-1}] = A'[f_{00}^{-1}] \supset A'$$

を用いると, f_h は, 既約元 $F \in A$ と $r \geq 0$ を用いて

$$(2.3) \quad f_h = f_{22}^r F$$

とかける. よって, f_h が環 A において f_{22} で割れないことを示せばよい. Step 3 より f_{23}, f_{32}, f_{33} は f_{22} で割れないので, これらの既約性は証明が完了した.

Step 7

f_h が f_{22} で割れるかどうかは, 係数の拡大で不変である. よって, R を R の商体の代数閉包に取りかえることで, 最初から R は代数閉体であったとしてよい.

Step 8

f_{24} と f_{42} が f_{22} で割れないことを示す. t と n に関する対称性があるので, f_{24} についてのみ示せばよい. 初期値 f_{h_0} の一部に 0 でない具体的な数値 (R の元) を代入し, 残った文字について f_{24} が f_{22} で割れないことを示せばよい.

以下のような初期値を取る:

γ	1	
$b^{-\frac{1}{k^2}}$	1	
1	1	
1	1	1
f_{00}	1	δ

ただし, t が右方向, n が上方向であり, γ, δ はそれぞれ

$$\gamma^{k^2} \neq \frac{1}{b}, \quad \delta^{k^2} \neq -\frac{b}{a}$$

を満たす R の元である (R は代数閉体なのでそのような元は必ず存在する). この初期値のもとで

$$f_{22} = -f_{00} + a\delta^{k^2} + b$$

だが, $a\delta^{k^2} + b \neq 0$ となるように δ をとったので, f_{22} は f_{00} の一次式であり, A の可逆元ではない. よって, $\epsilon = f_{22}$ において計算したとき, f_{24} が ϵ で割り切れないことを示せばよい.

$f_{23} = a$ となるように初期値を取ってあることを用いて計算をすると

$$\begin{aligned} f_{24} &= \frac{1}{b^{-\frac{1}{k}}} \left(-a^k + a\epsilon^{k^2} b^{-\frac{1}{k}} + b\gamma^{k^2} a^k \right) \\ &= a^k b^{\frac{1}{k}} \left(b\gamma^{k^2} - 1 \right) + a\epsilon^{k^2} \end{aligned}$$

となる. よって f_{24} は f_{22} で割り切れない.

Step 9

f_{34} と f_{43} が f_{22} で割れないことを示す. t と n に関する対称性があるので, f_{34} についてのみ示す.

以下のような初期値を取る:

$b^{-\frac{1}{k^2}}$	1		
$b^{-\frac{1}{k^2}}$	1		
1	1		
1	1	1	1
f_{00}	1	δ	$a^{-\frac{1}{k^2}}$

ただし, δ は

$$\delta^{k^2} \neq -\frac{b}{a}$$

を満たす R の元である.

Step 8 と同様 f_{22} は f_{00} の一次式であり, A の可逆元ではない. よって, $\epsilon = f_{22}$ において計算したとき, f_{34} が ϵ で割り切れないことを示せばよい.

Step 8 と同様, $f_{23} = a$ を用いて計算すると

$$f_{24} = a\epsilon^{k^2} = \mathcal{O}(\epsilon^{k^2})$$

がわかる. Landau 記号を用いて素直に計算すると

$$\begin{aligned} f_{33} &= -a^k b^k + a\epsilon^{k^2-1}a^k + b\epsilon^{k^2-1}b^k \\ &= -a^k b^k + \mathcal{O}(\epsilon^{k^2-1}), \\ f_{34} &= \frac{1}{\epsilon^k} \left(-\left(\mathcal{O}(\epsilon^{k^2-1})\right)^k \left(-a^k b^k + \mathcal{O}(\epsilon^{k^2-1})\right)^k + aa^{k^2-1}b^{k^2} \left(\mathcal{O}(\epsilon^{k^2})\right)^k \right. \\ &\quad \left. + ba^{k^2-1} \left(-a^k b^k + \mathcal{O}(\epsilon^{k^2-1})\right)^k \epsilon^k \right) \\ &= a^{2k^2-1}b^{k^2+1} + \mathcal{O}(\epsilon^{k^2-1}) \end{aligned}$$

となるので, f_{34} は f_{22} で割り切れない.

Step 10

f_{44} が f_{22} で割れないことを示す. Step 9 の初期値を拡張して, 次のような初期値を取る:

$b^{-\frac{1}{k^2}}$	1			
$b^{-\frac{1}{k^2}}$	1			
1	1			
1	1	1	1	1
f_{00}	1	δ	$a^{-\frac{1}{k^2}}$	γ

ただし δ の条件は Step 9 と同じであり, γ としては条件

$$a\gamma^{k^2} \neq \delta$$

を満たすものをとる.

このとき

$$f_{42} = \frac{1}{a^{-\frac{1}{k}}} \left(-\delta b^k + a\gamma^{k^2} b^k + b\epsilon^{k^2} a^{-\frac{1}{k}} \right)$$

なので, f_{42} は ϵ で割り切れない. Step 9 の結果を用いて計算すると, この初期値での時間発展は

$b^{-\frac{1}{k^2}}$	1	$\mathcal{O}(\epsilon^{k^2})$	$a^{2k^2-1}b^{k^2+1} + \mathcal{O}(\epsilon^{k^2-1})$	
$b^{-\frac{1}{k^2}}$	1	a	$-a^k b^k + \mathcal{O}(\epsilon^{k^2-1})$	f_{43}
1	1	ϵ	b	f_{42}
1	1	1	1	1
f_{00}	1	δ	$a^{-\frac{1}{k^2}}$	γ

となることがわかる. f_{44} を計算すると

$$\begin{aligned} f_{44} &= \frac{1}{a^k b^k} \left(-\epsilon \left(a^{2k^2-1} b^{k^2+1} + \mathcal{O}(\epsilon^{k^2-1}) \right)^k f_{43} \right. \\ &\quad + a \left(-a^k b^k + \mathcal{O}(\epsilon^{k^2-1}) \right)^{k^2-1} f_{42}^{k^2} \left(a^{2k^2-1} b^{k^2+1} + \mathcal{O}(\epsilon^{k^2-1}) \right)^k a^k \\ &\quad \left. + b \left(-a^k b^k + \mathcal{O}(\epsilon^{k^2-1}) \right)^{k^2-1} \left(\mathcal{O}(\epsilon^{k^2}) \right)^{k^2} f_{43}^k b^k \right) \\ &= -a^{3k^3-2k+1} b^{2k^3-k} f_{42}^{k^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

となるが, f_{42} は ϵ で割り切れないので f_{44} も ϵ で割り切れない.

以上で, $t, n \leq 4$ のときは f_h の既約性が証明できた. ここからは, t が n の少なくとも一方が 4 より大きい場合に f_h が既約であることを証明する.

Step 11

残りのケースで f_h が既約であることを示す. $i, j = 0, 1, 2$ に対し $(t-i, n-j) \neq (2, 2)$ となることが重要である.

領域 H' を

$$H' = H \setminus \{(i, j) \mid i, j = 0, 1, 2\}$$

で定めると, 明らかに H' はよい領域である. H' は, H を左下から順番に 9 回発展させたものだと考えるとよい. 2 つの集合

$$\begin{aligned} E &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1)\}, \\ E' &= \{(2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\} \end{aligned}$$

を用意すると,

$$H_0 \setminus H'_0 = E, \quad H'_0 \setminus H_0 = E'$$

となる. $(2, 2)$ が E, E' のどちらにも含まれないことと, $E \cap E' = \emptyset$ となることが重要である.

$d_{H'}(h) < d_H(h)$ なので, 帰納法の仮定より f_h は環

$$A' := R[f_{h_0}^{\pm} \mid h_0 \in H']$$

の元として既約である. 局所化の間の包含関係

$$A \subset A[f_{h_0}^{-1} \mid h_0 \in E'] = A'[f_{h_0}^{-1} \mid h_0 \in E] \supset A'$$

に注目すると, f_h は, 既約元 $F' \in A$ と $r'_{ij} \geq 0$ ($(i, j) \in E'$) を用いて

$$f_h = F' \prod_{(i,j) \in E'} f_{ij}^{r'_{ij}}$$

とかける. $(2, 2) \notin E'$ なので, 式 (2.3) の表示とあわせると, f_h が既約でなくなる可能性は

$$(2.4) \quad f_h = u f_{22} f_{ij}$$

のみである. ただし, $u \in A$ は可逆元であり, $(i, j) \in E'$ である.

今, t, n のうち少なくとも一方が 5 以上であることを仮定している. t と n に関する対称性より, $t \geq 5$ だとしよ. $(t, n-m) \in H_0$ となる最小の m をとる. このとき, 文字 $f_{t,n-m}$ は f_h の多項式成分に登場する. しかし, この文字 $f_{t,n-m}$ は f_{22} には登場しない. さらに, $i \leq 4$ なので, この文字 $f_{t,n-m}$ は f_{ij} にも登場しない. よって式 (2.4) のような分解は不可能である.

以上で, すべてのパターンに対し f_h の既約性が証明できた. □

3. 方程式 (1.1) の COPRIMENESS 条件

この章では、一般のよい領域に対して方程式 (1.1) の coprimeness を証明する。

定義 3.1. 空でない部分集合 $G \subset \mathbb{Z}^2$ が (方程式 (1.1) に関して) よい領域であるとは、次の 2 条件を満たすことである:

- $(t, n) \in G$ ならば $(t+1, n), (t, n+1) \in G$ である.
- すべての $h \in G$ に対して、集合

$$\{h' \in G \mid h' \leq h\}$$

の元は有限個である.

$G \subset \mathbb{Z}^2$ がよい領域のとき

$$G_0 = \{(t, n) \in G \mid (t-1, n-1) \notin G\}$$

とおき、 G に対する初期領域と呼ぶ。 G_0 に初期値を与えると、方程式は G 全体に一意的に発展してゆく。

なお、 G_0 の定義以外はすべて定義 2.2 と同じである。

定理 3.2. $G \subset \mathbb{Z}^2$ を方程式 (1.1) に関してよい領域とし、 x_h を x_{h_0} ($h_0 \in G_0$) たちの有理関数とみる。このとき、既約 Laurent 多項式 $f'_h(h \in H)$ が存在して、 x_h は

$$x_{t,n} = \frac{f'_{t,n} f'_{t-1,n-1}}{f'^k_{t-1,n} f'^k_{t,n-1}}$$

と分解する。さらに、 $h \neq h'$ ならば f'_h と $f'_{h'}$ は Laurent 多項式として互いに素である。特に

$$|t-t'| > 1 \text{ or } |n-n'| > 1 \Rightarrow x_{t,n} \text{ と } x_{t',n'} \text{ は有理関数として互いに素}$$

が成立し、方程式 (1.1) は任意のよい領域上で coprimeness 条件を満たす。

証明. 方程式 (1.1) の初期値問題を方程式 (1.2) の初期値問題と対応させ、定理 2.7 に帰着させる。

Step 1

$$H = G - (1, 1)$$

とおく。なお、 H は G を左下に 1 マス平行移動したものである。 H は方程式 (1.2) に関してよい領域であり、初期領域は

$$H_0 = G_0 \cup (G_0 - (1, 1))$$

で与えられる。よって、 $(t_0, n_0) \in G_0$ のとき

$$(t_0, n_0), (t_0 - 1, n_0), (t_0, n_0 - 1), (t_0 - 1, n_0 - 1)$$

はいずれも H_0 の元である。この H 上で方程式 (1.2) を考える。

Step 2

x の初期値がうまく出るように、 f の初期値を決定する。条件は

$$x_{t_0, n_0} = \frac{f_{t_0, n_0} f_{t_0-1, n_0-1}}{f^k_{t_0-1, n_0} f^k_{t_0, n_0-1}} \quad ((t_0, n_0) \in G_0)$$

である。

$h_0 \in H_0 \setminus G_0$ に対し、文字 Y_{h_0} をそれぞれ用意する。このとき、 $f'_{t,n}((t, n) \in H_0)$ に関する無限個の連立方程式

$$(3.1) \quad f'_{t,n} = \begin{cases} Y_h & (h \in H_0 \setminus G_0) \\ \frac{x_{t,n} f'^k_{t-1,n} f'^k_{t,n-1}}{f'_{t-1,n-1}} & (h \in G_0) \end{cases}$$

はただひとつの解を持つ。なぜならば、右辺の f' の添え字は順序 $\leq$ に関して (t, n) 以下のものしかなく、順序 $\leq$ に関して f' が小さいほうから順番に決まってゆくからである。 $h \in H \setminus H_0$ に対しても、初期値 f_{h_0} ($h_0 \in H_0$) に上の解から決まる初期値 f'_{h_0} を代入したものを f'_h とかくことにする。このとき、構成方法より任意の $(t, n) \in G$ に対して

$$x_{t,n} = \frac{f'_{t,n} f'_{t-1,n-1}}{f'^k_{t-1,n} f'^k_{t,n-1}}$$

が成立する。なお、右辺にある f' たちはそれぞれ Y に依存するが、 x までいくと Y の依存性が打ち消しあって消える。

Step 3

Step 2 の変換が可逆であることを示す。

$h_0 \in H_0$ (初期値の部分) では、 f'_{h_0} は $Y_h (h \in H_0 \setminus G_0)$ と $x_h (h \in G_0)$ の Laurent 単項式になる。このとき f'_{h_0} に登場する文字の添え字は h_0 以下のものだけであり、さらに

$$f'_{h_0} = x_{h_0} F_{h_0} \quad (F_{h_0} \text{ には文字 } x_{h_0} \text{ が出てこない})$$

とかける。よって、同様に順序の小さいほうから順番に

$$Y_{h_0} = f'_{h_0}, \quad x_{h_0} = \frac{f'_{h_0}}{F_{h_0}}$$

と解いていけば、変換 (3.1) の逆が得られる。

Step 4

定理 2.7 より f_h は $f_{h_0} (h_0 \in H_0)$ たちの既約 Laurent 多項式である。上で行った変換は Laurent 単項式でかける可逆なものだったので、 f'_h は Y_{h_0} たちと x_{h_0} たちの既約 Laurent 多項式になる。よって、分解

$$x_{t,n} = \frac{f'_{t,n} f'_{t-1,n-1}}{f'^k_{t-1,n} f'^k_{t,n-1}}$$

を得る。 □

4. リダクション

方程式 (1.1) において、 t 方向が m 方向での p 個分、 n 方向が m 方向での q 個分というリダクションを考え

$$(4.1) \quad x_m = -x_{m-p-q} + \frac{a}{x^k_{m-q}} + \frac{b}{x^k_{m-p}}$$

という方程式を得る ($p, q > 0$)。この方程式に

$$x_m = \frac{f_m f_{m-p-q}}{f^k_{m-p} f^k_{m-q}}$$

という従属変数変換を施すと

$$(4.2) \quad f_m = \frac{-f_{m-2p-2q} f^k_{m-p} f^k_{m-q} + a f^{k^2-1}_{m-p-q} f^{k^2}_{m-2q} f^k_{m-p} f^k_{m-2p-q} + b f^{k^2-1}_{m-p-q} f^{k^2}_{m-2p} f^k_{m-q} f^k_{m-p-2q}}{f^k_{m-2p-q} f^k_{m-p-2q}}$$

という方程式が得られる。今後の都合上、この方程式の初期値は $f_{2q-2p-2}, \dots, f_{-1}$ だと考えることにする。

方程式 (1.2) が一般の領域の上で Laurent 性を持つことと、リダクションが Laurent 性を保つことから、次の命題が従う [12]。

命題 4.1. 方程式 (4.2) は Laurent 性を持つ。

この章の目的は、次の定理を証明することである。

定理 4.2. a, b は関係式を持たない不定元であるとする。 $p \neq q$ ならば、方程式 (4.2) の解は $\mathbb{Z}[a, b]$ 係数の Laurent 多項式として既約になる。特に、このとき方程式 (4.1) は coprimeness 条件を満たす。

注意 4.3. $p = q$ のときは、方程式の項の数が減ってしまうので、他の場合と比べて大きな違いが生じる。なお、この場合は $p = q = 1$ のケースに帰着させることが可能であり、幾何学的手法を用いて方程式 (4.1) の代数的エントロピーを厳密に求めると、エントロピーは

$$\frac{1}{p} \log \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

となることがわかる。

以後, 本稿では $p \neq q$ の場合のみを考えるが, p と q に関する対称性があるので, $p < q$ を仮定してもよい. さらに, p, q が共通因子を持つ場合は, 格子自体が複数の軌道に分解し, 各軌道上で方程式を考察することになる. よって, p と q は互いに素であると仮定して一般性を失わない.

定理 4.2 の証明は, p, q に関する場合分けをすることによって行うが, 証明に入る前に, 今後何度も用いる補題を復習しておく. なお, 補題の証明は [7] で与えられている.

補題 4.4 ([7], Lemma 2). R を UFD とする. 2 つの独立変数の組 $(p_1, \dots, p_m)$ と $(q_1, \dots, q_m)$ の間に

- 各 p_j は $q_1, \dots, q_m$ の R 係数 Laurent 多項式である
- 各 q_j は $p_1, \dots, p_m$ の R 係数 Laurent 多項式であり, Laurent 多項式として既約である

という関係があったとする. さらに, p_j に関する既約 Laurent 多項式 $f \in R[p_1^\pm, \dots, p_m^\pm]$ が, 変数 q_j では

$$f = g(q_1, \dots, q_m)$$

と表示できたとする ($g \in R[q_1^\pm, \dots, q_m^\pm]$). このとき, 整数 $r_1, \dots, r_m$ と, q_j に関する既約 Laurent 多項式 $\tilde{g} \in R[q_1^\pm, \dots, q_m^\pm]$ があって

$$g = p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m} \tilde{g}$$

が成り立つ.

4.1. $p = 1, q = 2$ の場合. この場合, 方程式は

$$(4.3) \quad f_m = \frac{-f_{m-1}^k f_{m-2}^k f_{m-6} + a f_{m-1}^k f_{m-3}^{k^2-1} f_{m-4}^{k^2+k} + b f_{m-2}^{k^2+k} f_{m-3}^{k^2-1} f_{m-5}^k}{f_{m-4}^k f_{m-5}^k}$$

となる.

補題 4.5. $f_m (m \geq 0)$ は f_{-6} の多項式であり, 定数項は 0 ではない.

証明. $x_m = \frac{f_{m-1}^k f_{m-2}^k}{f_m f_{m-3}}$ なので, $x_{-3} = 0$ を代入した際, 任意の $m \geq -2$ に対して x_m が 0 にならないことを言えばよい. $x_{-3} = 0$ と $a = 0$ を代入すると, x_m は

$$x_m = \frac{b}{x_{m-1}^k} - x_{m-3}$$

を満たす. この x_m を, x_{-2}, x_{-1} の有理関数と思い, 次数 c_m を計算すると

$$c_{-2} = c_{-1} = 1, \quad c_0 = k, \quad c_1 = k^2 + 1$$

であり,

$$c_m \geq k c_{m-1} - c_{m-3}$$

なので, $c_m > 0$ である. よって x_m に $x_{-3} = 0, a = 0$ を代入したものは 0 とはならない. □

補題 4.6. 方程式 (4.3) に

$$a = b = 0, \quad f_{-6} = t, \quad f_{-5} = \cdots = f_{-1} = 1$$

を代入したものを考える. このとき, f_m は $f_m = \pm t^{\alpha_m}$ という形になり, α_m は

$$\alpha_m = k(\alpha_{m-1} + \alpha_{m-2} - \alpha_{m-4} + \alpha_{m-5}) + \alpha_{m-6} \quad (m \geq 0),$$

$$\alpha_{-6} = 1, \quad \alpha_{-5} = \cdots = \alpha_{-1} = 0$$

を満たす. 特に, $m \geq 6$ では $\alpha_m > (k-1)\alpha_{m-1}$ である.

証明. 前半は f_m の満たす方程式から明らかであり, 後半は帰納的に証明される. □

定理 4.2 の証明 ($p = 1, q = 2$). m に関する帰納法と, 補題 4.4 を用いて証明する.

Step 1

f_0 は f_{-6} の 1 次式なので既約であり, 明らかに可逆元でない.

Step 2

補題 4.4 より, f_1 は, 既約元 F と非負整数 r を用いて

$$f_1 = f_0^r F$$

と表せる. しかし

$$f_1 \equiv \frac{bf_{-1}^{k^2+k}f_{-2}^k}{f_{-3}^k} \pmod{f_0}$$

であり, f_0 は f_{-6} の 1 次式なので, f_1 が f_0 で割れることはない. よって $r=0$ でなければならず, f_1 は既約であり, f_0 と互いに素である.

Step 3

同様にして, f_2 は既約元 F と非負整数 r を用いて $f_2 = f_0^r F$ と表せるが,

$$f_2 \equiv \frac{af_1^k f_{-1}^{k^2-1} f_{-2}^{k^2}}{f_{-3}^k} \not\equiv 0 \pmod{f_0}$$

なので, f_2 は既約である. なお, f_2 が f_1 と互いに素であることは, 後でまとめて証明する.

同様にして

$$f_3 \equiv -\frac{f_2^k f_1^k f_{-3}}{f_{-1}^k f_{-2}^k} \not\equiv 0 \pmod{f_0}$$

なので f_3 は既約である.

Step 4

f_4 の既約性を示す. 計算すると

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{(-f_{-1}^k f_{-5} + af_{-3}^{k^2+k} f_{-2}^{k^2-1}) f_0^k + bf_{-1}^{k^2+k} f_{-2}^{k^2-1} f_{-4}^k}{f_{-3}^k f_{-4}^k}, \\ f_2 &= \frac{(-f_0^k f_{-4} + af_{-2}^{k^2+k} f_{-1}^{k^2-1}) f_1^k + \mathcal{O}(f_0^{k^2+k})}{f_{-2}^k f_{-3}^k}, \quad f_3 = \frac{-f_{-3} f_2^k f_1^k + \mathcal{O}(f_0^{k^2+k})}{f_{-1}^k f_{-2}^k} \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} -f_3^k f_2^k f_{-2} + bf_2^{k^2+k} f_1^{k^2-1} f_{-1}^k &\equiv \frac{f_1^{k^2-1} f_2^{k^2+k}}{f_{-1}^{k^2} f_{-2}^{k^2-1}} (-f_1 f_{-3}^k + bf_{-1}^{k^2+k} f_{-2}^{k^2-1}) \pmod{f_0^{k+1}} \\ &\equiv \frac{f_1^{k^2-1} f_2^{k^2+k}}{f_{-1}^{k^2} f_{-2}^{k^2-1}} \left(\frac{f_2^k f_{-2} - af_0^{k^2+k} f_{-2}^{k^2-1}}{f_{-4}^k} f_0^k \right) \pmod{f_0^{k+1}} \end{aligned}$$

である. よって

$$\begin{aligned} f_4 &= \frac{-f_3^k f_2^k f_{-2} + bf_2^{k^2+k} f_1^{k^2-1} f_{-1}^k + \mathcal{O}(f_0^{k^2+k})}{f_0^k f_{-1}^k} \\ &\equiv \frac{f_1^{k^2-1} f_2^{k^2+k}}{f_{-1}^{k^2+k} f_{-2}^{k^2-1} f_{-4}^k} (f_{-1}^k f_{-5} - af_{-3}^{k^2+k} f_{-2}^{k^2-1}) \not\equiv 0 \pmod{f_0} \end{aligned}$$

なので, f_4 は既約である.

Step 5

f_5 の既約性を示す. Step 4 の結果を用いて, f_0^{k+1} による剰余を取りながら計算すると

$$\begin{aligned}
 -f_4^k f_3^k f_{-1} + a f_4^k f_2^{k^2-1} f_1^{k^2+k} &\equiv f_4^k \left(- \left(\frac{-f_{-3} f_2^k f_1^k}{f_{-1}^k f_{-2}^k} \right)^k f_{-1} + a f_2^{k^2-1} f_1^{k^2+k} \right) \\
 &\equiv \frac{f_4^k f_2^{k^2-1} f_1^{k^2}}{f_{-1}^{k^2-1} f_{-2}^{k^2}} \left(-f_2 f_{-3}^k + a f_1^k f_{-1}^{k^2-1} f_{-2}^{k^2} \right) \\
 &\equiv \frac{f_4^k f_2^{k^2-1} f_1^{k^2}}{f_{-1}^{k^2-1} f_{-2}^{k^2}} \left(- \frac{(-f_0^k f_{-4} + a f_{-2}^{k^2+k} f_{-1}^{k^2-1}) f_1^k}{f_{-2}^k f_{-3}^k} f_{-3}^k + a f_1^k f_{-1}^{k^2-1} f_{-2}^{k^2} \right) \\
 &\equiv \frac{f_4^k f_2^{k^2-1} f_1^{k^2+k} f_0^k f_{-4}}{f_{-1}^{k^2-1} f_{-2}^{k^2+k}} \pmod{f_0^{k+1}}
 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
 f_5 &\equiv \frac{f_4^k f_2^{k^2-1} f_1^{k^2} f_{-4}}{f_{-1}^{k^2-1} f_{-2}^{k^2+k}} + b \frac{f_3^{k^2+k} f_2^{k^2-1}}{f_1^k} \pmod{f_0} \\
 &= \frac{f_2^{k^2-1}}{f_{-1}^{k^2-1} f_{-2}^{k^2+k} f_1^k} \left(f_4^k f_1^{k^2+k} f_{-4} + b f_3^{k^2+k} f_{-1}^{k^2-1} f_{-2}^{k^2+k} \right)
 \end{aligned}$$

である. よって, $F = f_4^k f_1^{k^2+1} f_{-4} + b f_3^{k^2+k} f_{-1}^{k^2-1} f_{-2}^{k^2+k}$ とおいたときに $F \not\equiv 0 \pmod{f_0}$ となることを示せばよい.

f_m に特別な初期値 $f_{-6} = a + b, f_{-5} = \dots = f_{-1} = 1$ を代入し, さらにパラメータを $a > 1, b > 0$ と取ったものを g_m とおく. このとき $g_0 = 0$ であり

$$g_1 = b > 0, \quad g_2 = ab^k > 0, \quad g_3 = -a^k b^{k^2+k} < 0, \quad g_4 = b^{k^3+2k^2-1} a^{k^2+k} (a-1) > 0$$

となる. よって

$$g_4^k g_1^{k^2+k} g_{-4} > 0, \quad b g_3^{k^2+k} g_{-1}^{k^2-1} g_{-2}^{k^2+k} > 0$$

であり, この初期値とパラメータのもとで $F > 0$ となるため, F は f_0 で割り切れない. よって f_5 は既約である.

Step 6

同様に f_6 を計算すると

$$f_6 \equiv \frac{f_3^{k^2-1}}{f_2^k f_1^k} \left(a f_5^k f_2^{k^2+k} + b f_4^{k^2+k} f_1^k \right) \pmod{f_0}$$

となる. よって, $F = a f_5^k f_2^{k^2+k} + b f_4^{k^2+k} f_1^k$ とおいたとき, $F \not\equiv 0 \pmod{f_0}$ であることを示せばよい. Step 5 と同じ初期値とパラメータを代入すると $F > 0$ となることがすぐにわかるので, F は f_0 で割り切れない. よって f_6 は既約である.

Step 7

$f_0, \dots, f_6$ のうちの 2 つも互いに素であることを示す. f_i と $f_j (i > j)$ が互いに素でなかったとすると, $f_i = u f_j (u \text{ は可逆元})$ とかける. しかし, 補題 4.6 より u は因子 $t^{\alpha_i - \alpha_j}$ を含む. したがって, f_j を t の多項式と見ると定数項は 0 ということになってしまうが, これは補題 4.5 に反する. よって f_i と f_j は互いに素である.

Step 8

$m \geq 7$ で f_m が既約となることを示す. 補題 4.4 より, 既約元 F, F' と非負整数 r_j を用いて

$$f_7 = f_0^{r_0} F = f_1^{r_1} \dots f_6^{r_6} F'$$

と表示できる. よって, f_7 が既約でなければ $f_7 = u f_0 f_j (u \text{ は可逆元}, j = 1, \dots, 6)$ という形になるしかない. 簡単な計算により

$$\alpha_7 > (k-1)\alpha_6 + 1 \geq \alpha_j + \alpha_3$$

となるが, これは補題 4.5 に反する.

Step 9

Step 7 と完全に同様の議論によって, $i > j$ に対し f_i と f_j は互いに素であることがわかる.

Step 10

方程式 (4.1) が coprimeness 条件を満たすことを示す。すなわち, $x_m \in \mathbb{Q}(x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, a, b)$ と考えたとき, $|m - m'| > 3$ ならば x_m と $x_{m'}$ は互いに素であることを示す。

f の方程式において, 初期値を

$$f_{-3} = x_{-3} f_{-6}^{-1} (f_{-5} f_{-4})^k, \quad f_{-2} = x_{-2} f_{-5}^{-1} (f_{-4} f_{-3})^k, \quad f_{-1} = x_{-1} f_{-4}^{-1} (f_{-3} f_{-2})^k$$

ととったものを考える。このとき

$$f_m \in \mathbb{Z}[f_{-6}^{\pm}, f_{-5}^{\pm}, f_{-4}^{\pm}, x_{-3}^{\pm}, x_{-2}^{\pm}, x_{-1}^{\pm}, a, b]$$

となるが, これまでの結果より f_m は既約であり, f_m と $f_{m'}$ は互いに素である。あとは, x_m を構成するのに必要な f の番号を見ればよい。□

4.2. $p = 1, q = 2$ 以外の場合。 $p = 1, q = 2$ でなければ, 方程式に登場するシフト $p, q, 2p, p+q, 2q, 2p+q, p+2q$ の中に一致するものはないことに注意する。

今後さらに細かい場合分けを行うが, その前にいくつかの補題を準備する。

補題 4.7. $s \geq 0$ に対し f_s は $f_{-2p-2q}, f_{-2p-2q+1}, \dots, f_{-p-2q-1}$ の多項式であり, 定数項は 0 でない。この性質は, $a = 0$ あるいは $b = 0$ を代入した場合にも成立する。

証明. 補題 4.5 の証明と同様である。 x_m の式において $x_{-p-q} = \dots = x_{-q-1} = 0$ とおき, さらに $a = 0$ あるいは $b = 0$ を代入した場合, x_m のほかの初期値に対する次数を調べると, 任意の m に対して $x_m \neq 0$ となることから従う。□

補題 4.8. $a = b = 0$ を代入したときの f_s の $f_{-2p-2q+j}$ ($j = 0, \dots, p-1$) に関する次数を $c_s^{(j)}$ とし, $c_s = (c_s^{(0)}, \dots, c_s^{(p-1)})$ とおく。

- (i) $s \geq j$ に対し $c_s^{(j)} = c_{s-j}^{(0)}$ である。
- (ii) $f_s = u \prod_{j \in J} f_j$ (u は可逆元) という関係式が成立すれば, $c_s = \sum_{j \in J} c_j$ である。
- (iii) f_s と f_r がどちらも Laurent 多項式として既約なとき, $c_s \neq c_r$ であれば, f_s と f_r は互いに素である。

証明. (i) $a = b = 0$ では

$$f_s = -\frac{f_{s-p}^k f_{s-q}^k f_{s-2p-2q}}{f_{s-2p-q}^k f_{s-p-2q}^k}$$

なのでよい。

(ii) u は可逆元なので a, b を含まない。さらに, 補題 4.7 より u は文字 $f_{-2p-2q}, \dots, f_{-p-2q-1}$ を含まない。よって, 関係式 $f_s = u \prod_{j \in J} f_j$ に $a = b = 0$ を代入し, 次数に着目することで $c_s = \sum_{j \in J} c_j$ を得る。

(iii) f_s と f_r がどちらも既約だが互いに素でないとすると, 可逆元 u が存在して $f_s = u f_r$ となるので, (ii) より $c_s = c_r$ となる。対偶を取ることで, $c_s \neq c_r$ ならば f_s と f_r は互いに素であることがわかる。□

補題 4.9. $s \neq ip + jq$ ($i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) または $0 \leq s \leq p+q$ であれば, f_s は既約である。

証明.

Step 1

$s = 0, \dots, p-1$ のときを考える。 f_s は定数項が 0 でない $f_{-2p-2q+s}$ の 1 次式なので, 既約であり可逆元でない。なお, f_s は初期値 $f_{-2p-2q+i}$ ($0 \leq i \leq p-1, i \neq s$) を含まない。

Step 2

$s \neq ip + jq$ ($i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) のときを考える。 f_m ($m \geq 0$) が初期値 f_{-2p-2q} を含むのは, $m = ip + jq$ (i, j は非負整数) と書けるときのみであることが帰納的にわかるので, f_s は初期値 f_{-2p-2q} を含まない。補題 4.4 より, 既約元 F と非負整数 r を用いて $f_s = f_0^r F$ と表示できるが, f_s は初期値 f_{-2p-2q} を含まないので $r = 0$ でなければならない。よって f_s は既約である。

Step 3

$1 \leq s \leq p+q$ のときを考える. パラメータを $a, b > 0$ と取り, 初期値として

$$\begin{aligned} f_{-2p-2q} &= \frac{f_{-p-q}^{k^2-1}}{f_{-p}^k f_{-q}^k} \left(a f_{-p}^k f_{-2q}^{k^2} f_{-2p-q}^k + b f_{-q}^k f_{-2p}^{k^2} f_{-p-2q}^k \right), \\ f_m &< 0 \quad (-2p-2q \leq m \leq -p-q), \\ f_m &> 0 \quad (-p-q+1 \leq m \leq -1) \end{aligned}$$

を代入したものを g_m とおく. このとき $g_0 = 0$ であり

$$g_s = \frac{-g_{s-2p-2q} g_{s-p}^k g_{s-q}^k + \left(a g_{s-p}^k g_{s-2q}^{k^2} g_{s-2p-q}^k + b g_{s-q}^k g_{s-2p}^{k^2} g_{s-p-2q}^k \right) g_{s-p-q}^{k^2-1}}{g_{s-p-2q}^k g_{s-2p-q}^k}$$

となるが, 分子の第 1 項が非負, 第 2 項が正となるので $g_s > 0$ である.

Step 2 と同様, 既約元 F と非負整数 r を用いて $f_s = f_0^r F$ と表示できるが, $g_0 = 0, g_s > 0$ なので, $r = 0$ でなければならない. 以上より f_s は既約である. $\square$

補題 4.10. $C_{p,q}, \tilde{C}_{p,q}$ を

$$C_{p,q} = \frac{f_p^{k^2-1} f_q^{k^2} f_{2p}^k}{f_{-q}^{k^2-1} f_{-p}^{k^2} f_{-2q}^k f_{p-q}^k}, \quad \tilde{C}_{p,q} = \frac{f_p^{k^2} f_q^{k^2-1} f_{2q}^k}{f_{-p}^{k^2-1} f_{-q}^{k^2} f_{-2p}^k f_{-p+q}^k}$$

で定義する. このとき

$$\begin{aligned} f_{2p+q} &\equiv C_{p,q} \left(f_{p-q}^k f_{-p-2q}^k - a f_{p-2q}^{k^2} f_{-p-q}^k f_{-q}^{k^2-1} \right) + \frac{a f_{p+q}^k f_{2p-q}^{k^2} f_p^{k^2-1}}{f_{p-q}^k} \pmod{f_0}, \\ f_{p+2q} &\equiv \tilde{C}_{p,q} \left(f_{-p+q}^k f_{-2p-q}^k - b f_{-2p+q}^{k^2} f_{-p-q}^k f_{-p}^{k^2-1} \right) + \frac{b f_{p+q}^k f_{-p+2q}^{k^2} f_q^{k^2-1}}{f_{p+q}^k} \pmod{f_0} \end{aligned}$$

となる.

証明. f_0^{k+1} による剰余を取りながら計算すると

$$\begin{aligned} -f_{p+q}^k f_{-q}^k + b f_p^{k^2-1} f_q^{k^2} f_{p-q}^k &\equiv -\frac{f_p^{k^2} f_q^{k^2} f_{p-q}^k}{f_{-q}^{k^2} f_{-p}^{k^2}} f_{-q}^k + b f_p^{k^2-1} f_q^{k^2} f_{p-q}^k \\ &= \left(\frac{f_p^{k^2-1} f_q^{k^2}}{f_{-q}^{k^2-1} f_{-p}^{k^2}} \right) \left(-f_p f_{p-q}^k + b f_{p-q}^k f_{-q}^{k^2-1} f_{-p}^{k^2} \right) \\ &\equiv \left(\frac{f_p^{k^2-1} f_q^{k^2}}{f_{-q}^{k^2-1} f_{-p}^{k^2}} \right) \frac{\left(f_{p-q}^k f_{-p-2q}^k - a f_{p-2q}^{k^2} f_{-p-q}^k f_{-q}^{k^2-1} \right) f_0^k}{f_{-2q}^k} \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} f_{2p+q} &= \frac{\left(-f_{p+q}^k f_{-q}^k + b f_p^{k^2-1} f_q^{k^2} f_{p-q}^k \right) f_{2p}^k}{f_{p-q}^k f_0^k} + \frac{a f_{p+q}^k f_{2p-q}^{k^2} f_p^{k^2-1}}{f_{p-q}^k} \\ &\equiv \left(\frac{f_p^{k^2-1} f_q^{k^2} f_{2p}^k}{f_{-q}^{k^2-1} f_{-p}^{k^2} f_{-2q}^k f_{p-q}^k} \right) \left(f_{p-q}^k f_{-p-2q}^k - a f_{p-2q}^{k^2} f_{-p-q}^k f_{-q}^{k^2-1} \right) + \frac{a f_{p+q}^k f_{2p-q}^{k^2} f_p^{k^2-1}}{f_{p-q}^k} \end{aligned}$$

である。同様に, f_0^{k+1} による剰余を取りながら計算すると

$$\begin{aligned}
 -f_{p+q}^k f_{-p}^k + a f_p^{k^2} f_{-p+q}^k f_q^{k^2-1} &\equiv -\frac{f_p^{k^2} f_q^{k^2} f_{-p-q}^k}{f_{-p}^{k^2} f_{-q}^{k^2}} f_{-p}^k + a f_p^{k^2} f_{-p+q}^k f_q^{k^2-1} \\
 &= \left(\frac{f_p^{k^2} f_q^{k^2-1}}{f_{-p}^{k^2-1} f_{-q}^{k^2}} \right) \left(-f_{-p-q}^k f_q^k + a f_{-p+q}^k f_{-p}^{k^2-1} f_{-q}^{k^2} \right) \\
 &\equiv \left(\frac{f_p^{k^2} f_q^{k^2-1}}{f_{-p}^{k^2-1} f_{-q}^{k^2}} \right) \frac{(f_{-p+q}^k f_{-2p-q}^k - b f_{-2p+q}^{k^2} f_{-p-q}^k f_{-p}^{k^2-1}) f_0^k}{f_{-2p}^k} \pmod{f_0^{k+1}}
 \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
 f_{p+2q} &\equiv \frac{(-f_{p+q}^k f_{-p}^k + a f_p^{k^2} f_{-p+q}^k f_q^{k^2-1}) f_{2q}^k}{f_{-p+q}^k f_0^k} + \frac{b f_{p+q}^k f_{-p+2q}^{k^2} f_q^{k^2-1}}{f_{-p+q}^k} \\
 &\equiv \left(\frac{f_p^{k^2} f_q^{k^2-1} f_{2q}^k}{f_{-p}^{k^2-1} f_{-q}^{k^2} f_{-2p}^k f_{-p+q}^k} \right) (f_{-p+q}^k f_{-2p-q}^k - b f_{-2p+q}^{k^2} f_{-p-q}^k f_{-p}^{k^2-1}) + \frac{b f_{p+q}^k f_{-p+2q}^{k^2} f_q^{k^2-1}}{f_{-p+q}^k}
 \end{aligned}$$

である。 □

4.2.1. $p=1, q \geq 3$ の場合. $p=1, q \geq 3$ の場合, 方程式は

$$f_s = \frac{f_{s-1}^k f_{s-q}^k (-f_{s-2-2q}) + (a f_{s-1}^{k^2} f_{s-2q}^{k^2} f_{s-2-q}^k + b f_{s-q}^{k^2} f_{s-2}^{k^2} f_{s-1-2q}^k) f_{s-1-q}^{k^2-1}}{f_{s-1-2q}^k f_{s-2-q}^k}$$

とかける。

定理 4.2 の証明 ($p=1, q \geq 3$). 補題 4.9 より, $0 \leq s \leq q+1$ では f_s は既約である。

方程式 f_s の初期値に

$$f_m = \begin{cases} 2 & (m = -2q - 2) \\ -1 & (m = -2q) \\ 1 & (-2q - 1 \leq m \leq -1, m \neq -2q) \end{cases}$$

を代入し, さらにパラメータとして $a=b=1$ ととったものを g_s とおく. $g_0=0$ である. s に関する帰納法と g_s を用いて既約性を示してゆく。

Step 1

$g_s \neq 0$ ならば f_s は既約であることを示す。

補題 4.4 より, 非負整数 r と既約元 F が存在して $f_s = f_0^r F$ とかける. $r > 0$ だと仮定すると, 両辺に上記の初期値を代入することで $g_s = 0$ となってしまう. よって, $g_s \neq 0$ ならば f_s は既約である。

以降, 計算によって $g_s \neq 0$ であることを示す。

Step 2

最初のいくつかの項を計算すると

$$g_s = \begin{cases} g_{s-2}^{k^2} & (3 \leq s \leq q-1) \\ g_{s-1}^k & (s = q) \\ -g_{s-1}^k & (s = q+1) \end{cases}$$

となることがわかる. よって

$$g_s = \begin{cases} 1 & (3 \leq s \leq q-1, s: \text{奇数}) \\ 2^{k^{s-2}} & (3 \leq s \leq q-1, s: \text{偶数}) \\ g_{q-1}^k & (s = q) \\ -g_{q-1}^{k^2} & (s = q+1) \end{cases}$$

である. 特に, q が奇数のとき

$$g_{q-1} = 1, \quad g_q = 1, \quad g_{q+1} = -1$$

であり, q が偶数のとき

$$g_{q-1} = 2^{k^{q-3}}, \quad g_q = 2^{k^{q-2}}, \quad g_{q+1} = -2^{k^{q-3}}$$

である.

Step 3

$s = q + 2$ の場合, 補題 4.10 より

$$g_{q+2} = g_{q-1}^{k^3} \neq 0$$

である. よって f_{q+2} は既約である.

Step 4

$q + 3 \leq s \leq 2q - 1$ の場合を考える. なお, $q = 2$ の場合, この範囲は存在しないので考える必要はない.

Step 2 の計算結果より, $1 \leq r \leq q - 3$ では

$$g_{q+r+2} = \frac{-g_{s-1}^k g_{s-q}^k + (g_{s-1}^k g_{s-q-2}^k + g_{s-q}^k g_{s-2}^{k^2}) g_{s-1-q}^{k^2-1}}{g_{s-2-q}^k}$$

となるので, N_r を

$$N_r = 2^{k^{r-1}(k^2-1)}$$

と定義すると

$$g_{q+r+2} = \begin{cases} (N_r - 1) g_{q+r+1}^k + N_r g_{q+2}^{k^2} & (r : \text{奇数}) \\ (1 - N_r) g_{q+r+1}^k + N_r g_{q+r}^{k^2} & (r : \text{偶数}) \end{cases}$$

となる. Step 2 の計算結果とあわせることで, r が奇数のときに $g_{q+r+2} > 0$ となり, r が偶数のときに $g_r < 0$ となることがわかる. この事実は, r が奇数の場合は上の式より自明であり, r が偶数の場合, 例えば

$$\begin{aligned} g_{q+r+2} &= -(N_r - 1) \left((N_{r-1} - 1) g_{q+r}^k + N_{r-1} g_{q+r-1}^{k^2} \right)^k + N_r g_{q+r}^{k^2} \\ &< -((N_r - 1)(N_{r-1} - 1)^k - N_r) g_{q+r}^{k^2} \end{aligned}$$

などと計算すればよい.

以上より, $q + 3 \leq s \leq 2q - 1$ の場合に $g_s \neq 0$ となる. よって, この範囲で f_s は既約である.

Step 5

$g_{2q} \neq 0$ となることを示す.

$$f_{2q} \equiv \frac{-f_{2q-1}^k f_q^k f_{-2} + b f_q^k f_{2q-2}^{k^2} f_{-1}^k f_{q-1}^{k^2-1}}{f_{-1}^k f_{q-2}^k} \pmod{f_0}$$

なので, Step 2 の計算結果を用いると

$$g_{2q} = \frac{g_q^k}{g_{q-2}^k} \left(-g_{2q-1}^k + g_{q-1}^{k^2-1} g_{2q-2}^{k^2} \right)$$

となる. よって, $G = -g_{2q-1}^k + g_{q-1}^{k^2-1} g_{2q-2}^{k^2}$ とおいたとき $G \neq 0$ となることを示せばよい.

q が偶数のとき $q \geq 4$ かつ $g_{q-1} = 1$ なので, $G = 0$ となるためには $g_{2q-1} = \pm g_{2q-2}^{k^2}$ となるしかない. しかし

$$g_{2q-1} = (N_{q-3} - 1) g_{2q-2}^k + N_{q-3} g_{2q-3}^{k^2} > g_{2q-2}^k$$

なので $G = 0$ とはならない.

q が奇数のとき, $g_{q-1} = 2^{k^{q-3}}$, $g_{q-1}^{k^2-1} = N_{q-2}$ なので

$$G = -g_{2q-1}^k + N_{q-2} g_{2q-2}^{k^2}$$

である. $q = 3$ のとき, 直接計算で $G \neq 0$ がわかる. $q \geq 5$ のとき, $N_{q-2} = N_{q-3}^k$ なので, $G = 0$ となるためには $g_{2q-1} = \pm N_{q-3} g_{2q-2}^k$ となるしかない. しかし, $g_{2q-1} = (N_{q-3} - 1) f_{2q-2}^k + N_{q-3} f_{2q-3}^{k^2}$ なので, このとき $g_{2q-2}^k = N_{q-3} g_{2q-3}^{k^2}$ となる. これを繰り返すと, 結局 $G = 0$ のためには $g_{q+2}^k = N_1 g_{q+1}^{k^2}$, つまり $2^{k^{q+1}} = 2^{k^2-1} 2^{k^{q+2}}$ が必要となるが, これはどのような正の偶数 k に対しても成り立たない. よって $G = 0$ となることはない.

以上より $g_{2q} \neq 0$ であり, f_{2q} は既約である.

Step 6

$g_{2q+1} \neq 0$ となることを示す.

補題 4.10 より

$$g_{2q+1} = g_q^{k^2-1} g_{2q}^k (g_{q-1}^k - g_{q-2}^{k^2}) + \frac{g_{q+1}^k g_{2q-1}^{k^2} g_q^{k^2-1}}{g_{q-1}^k}$$

である. q が奇数ならば, $g_{q-2} = 1, g_{q-1} = 2^{k^{q-3}}$ なので, $g_{2q+1} > 0$ となることがすぐにわかる.

q が偶数のとき, Step 4 の関係式を用いると, $2 \leq r \leq q-3$ において

$$g_{q+r+2} \equiv 1 \pmod{3}, \quad g_{2q} \equiv -1 \pmod{3}$$

となることがわかる. $g_{q-1}^k - g_{q-2}^{k^2} \equiv 0 \pmod{3}$ であり, $g_{q+1}, g_{2q-1}, g_q, g_{q-1}$ はいずれも 3 の倍数でないので, 上の式を 3 で割ったあまりを見ることで

$$g_{2q+1} \not\equiv 0 \pmod{3}$$

となる.

以上より $g_{2q+1} \neq 0$ であり, f_{2q+1} は既約である.

Step 7

$s = 2q + 2$ のとき

$$g_{2q+2} = \frac{g_{q+1}^{k^2-1}}{g_1^k g_q^k} (g_{2q+1}^k g_2^{k^2} g_q^k + g_{q+2}^k g_{2q}^{k^2} g_1^k)$$

だが, 括弧の中は正なので $g_{2q+2} \neq 0$ である. よって f_{2q+2} は既約である.

Step 8

$s > r \geq 0$ のとき f_s と f_r が互いに素であることを示す. 補題 4.8 の $c_j^{(0)}$ は

$$\begin{aligned} c_0^{(0)} &= c_{-2q-2}^{(0)} = 1, \quad c_{-1}^{(0)} = \cdots = c_{2q-1}^{(0)} = 0, \\ c_j^{(0)} &= k \left(c_{j-1}^{(0)} + c_{j-q}^{(0)} - c_{j-2-q}^{(0)} - c_{j-1-2q}^{(0)} \right) + c_{j-2-2q}^{(0)} \quad (j \geq 1) \end{aligned}$$

を満たすので, $j \geq -2q-1$ で $c_j^{(0)} \geq k c_{j-1}^{(0)}$ が成り立つことが帰納的にわかる. よって $c_s^{(0)} > c_r^{(0)}$ となるため, 補題 4.8 の (iii) より f_s と f_r は互いに素である.

Step 9

方程式 (4.1) が coprimeness 条件を満たすことは, $p = 1, q = 2$ の場合の Step 10 と完全に同様である. $\square$

4.2.2. $p = 2$ の場合. $p = 2$ の場合, q は奇数となり, 方程式は

$$f_s = \frac{f_{s-2}^k f_{s-q}^k (-f_{s-2q-4}) + (a f_{s-2}^k f_{s-2q}^{k^2} f_{s-q-4}^k + b f_{s-q}^k f_{s-4}^{k^2} f_{s-2q-2}^k) f_{s-q-2}^{k^2-1}}{f_{s-2q-2}^k f_{s-q-4}^k}$$

とかける.

定理 4.2 の証明 ($p = 2$). 方程式 f_s の初期値に

$$f_m = \begin{cases} 2 & (m = -2q-4) \\ -1 & (m = -2q) \\ 1 & (-2q-3 \leq m \leq -1, m \neq -2q) \end{cases}$$

を代入し, さらにパラメータとして $a = b = 1$ としたものを g_s とおく. $g_0 = 0$ である. $p = 1, q = 2$ の場合と同様, $s \geq 1$ に対し $g_s \neq 0$ であることを示せばよい.

Step 1

$1 \leq s \leq q+4$ に対し $g_s \neq 0$ となることを示す.

計算をすると

$$g_1 = g_2 = g_3 = 1, \quad g_4 = 2, \quad g_5 = g_6 = g_7 = 1, \quad g_8 = 2^{k^2}$$

となる。ここからわかるように、 N_i を

$$N_i = 2^{k^2(i-1)}$$

で定義すると、 $1 \leq s \leq q-1$ に対して

$$g_s = \begin{cases} N_i & (s = 4i) \\ 1 & (s \neq 4i) \end{cases}$$

となる。簡単な計算により、 $s = q, q+1, q+2, q+3$ では

$$g_q = g_{q-2}^k = 1, \quad g_{q+1} = g_{q-3}^{k^2}, \quad g_{q+2} = -g_q^k = -1, \quad g_{q+3} = g_{q-1}^{k^2}$$

となることがわかる。補題 4.10 より

$$g_{q+4} = \frac{f_{q+2}^k f_{-q+4}^{k^2} f_2^{k^2-1}}{f_{2-q}^k} = 1 \neq 0$$

である。以上より、 $1 \leq s \leq q+4$ に対し $g_s \neq 0$ となる。

Step 2

$q+5 \leq s \leq 2q-1$ に対し $g_s \neq 0$ となることを示す。 $s = q+r+4$ となる r を用いると、この範囲では

$$g_{q+r+4} = \frac{(-g_{r+4}^k + g_{r+4-q}^{k^2} g_r^{k^2-1}) g_{q+r+2}^k + g_{r+4}^{k^2-1} g_{r+2}^{k^2} g_{q+r}^{k^2}}{g_r^k}$$

となるので

$$g_{q+5} = g_{q+1}^{k^2}, \quad g_{q+6} = -1 + 2^{k^2-1} + 2^{k^2-1} = 2^{k^2} - 1 = N_2 - 1, \quad g_{q+7} = g_{q+3}^{k^2}$$

である。同様にして、 $3 \leq r \leq q-5$ の範囲で

$$g_{q+r+4} = \begin{cases} \left(-\frac{N_{i+1}^k}{N_i^k} + 1 \right) g_{q+r+2}^k + \frac{N_{i+1}^k}{N_i^k} g_{q+r}^{k^2} & (r = 4i) \\ g_{q+r}^{k^2} & (r = 4i+1, 4i+3) \\ \left(N_{i+1}^{k^2-1} - 1 \right) g_{q+r+2}^k + N_{i+1}^{k^2-1} g_{q+r}^{k^2} & (r = 4i+2) \end{cases}$$

となることがわかる。 r が奇数であれば、上の式から明らかに $g_{q+r+4} \neq 0$ である。 r が偶数のとき $N_{i+1}^k/N_i^k = N_{2i+1}$ は 2 で割り切れるので、 $g_{q+r+4} \equiv g_{q+r+2} \pmod{2}$ となり、帰納的に

$$g_{q+r+4} \equiv 1 \pmod{2}$$

となる。よって、いずれの場合も $g_s \neq 0$ である。

Step 3

$s = 2q, 2q+1$ に対し $g_s \neq 0$ となることを示す。

$$g_{2q} = -g_{2q-2}^k + g_{2q-4}^{k^2}$$

だが、 q は奇数なので、Step 2 より、 g_{2q-2} と g_{2q-4} のうち一方が 1 で残りは $2^\alpha (\alpha > 0)$ の形である。よって $g_{2q} \neq 0$ である。

$s = 2q+1$ の場合、方程式から

$$g_{2q+1} \equiv f_{2q-3} \equiv 1 \pmod{2}$$

となるので $g_{2q+1} \neq 0$ である。

Step 4

$g_{2q+2} \neq 0$ を示す。補題 4.10 にこれまでの初期値を代入する。 $g_{q+2} = -1, g_q = g_{q-2} = g_{q-4} = 1$ となることに注意すると、 $\tilde{C}_{p,q}$ のかかっている項は 0 になり、

$$g_{2q+2} = \frac{g_{q+2}^k g_{2q-2}^{k^2} g_q^{k^2-1}}{g_{q-2}^k} = g_{2q-2}^{k^2} \neq 0$$

となる。

Step 5

$g_{2q+3} \neq 0$ を示す.

$$\begin{aligned} g_{2q+3} &= \frac{g_{2q+1}^k g_{q+3}^k (-g_{-1}) + (g_{2q+1}^k g_3^{k^2} g_{q-1}^k + g_{q+3}^k g_{2q-1}^{k^2} g_1^k) g_{q+1}^{k^2-1}}{g_1^k g_{q-1}^k} \\ &= -g_{2q+1}^k g_{q-1}^{k(k^2-1)} + (g_{2q+1}^k + g_{q-1}^{k(k^2-1)} g_{2q-1}^{k^2}) g_{q+1}^{k^2-1} \end{aligned}$$

だが, 2 で割ったあまりを考えると $g_{2q+1} \equiv g_{2q-1} \equiv 1, g_{q-1} \neq g_{q+1}$ なので $g_{2q+3} \equiv 1$ である. よって $g_{2q+3} \neq 0$ である.

Step 6

$g_{2q+4} \neq 0$ を示す.

$$g_{2q+4} = \frac{(g_{2q+2}^k g_4^{k^2} g_q^k + g_{q+4}^k g_{2q}^{k^2} g_2^k) g_{q+2}^{k^2-1}}{g_2^k g_q^k}$$

だが, 分子の括弧の中は正なので $g_{2q+4} \neq 0$ である.

ここまでで, $0 \leq s \leq 2p+4$ に対し f_s が既約となることが示せた.

Step 7

$0 \leq s < r \leq 2p+4$ に対し, f_s と f_r が互いに素であることを示す. 補題 4.8 の $c_j^{(0)}$ は

$$\begin{aligned} c_0^{(0)} &= c_{-2q-4}^{(0)} = 1, \quad c_{-1}^{(0)} = \cdots = c_{2q-3}^{(0)} = 0, \\ c_j^{(0)} &= k \left(c_{j-2}^{(0)} + c_{j-q}^{(0)} - c_{j-4-q}^{(0)} - c_{j-2-2q}^{(0)} \right) + c_{j-4-2q}^{(0)} \quad (j \geq 1) \end{aligned}$$

を満たす. $0 \leq j \leq 2q+4$ では

$$\begin{aligned} c_{2i}^{(0)} &= k^i \quad (0 \leq i \leq q-1), \quad c_{2i+1}^{(0)} = 0 \quad \left(0 \leq i \leq \frac{q-1}{2} \right), \quad c_q^{(0)} = k, \\ c_{q+2i}^{(0)} &= k \left(c_{q+2(i-1)}^{(0)} + c_{2i}^{(0)} - c_{2(i-2)}^{(0)} \right) = (i+1)k^{i+1} - (i-1)k^{i-1} \quad (1 \leq i \leq q-1), \\ c_{2q}^{(0)} &= k^q + k^2, \quad c_{2q+2}^{(0)} = k \left(c_{2q}^{(0)} + c_{q+2}^{(0)} - c_0^{(0)} \right) = k^{q+1} + 3k^3 - k, \\ c_{2q+4}^{(0)} &= k \left(c_{2q+2}^{(0)} + c_{q+4}^{(0)} - c_q^{(0)} - c_2^{(0)} \right) + c_0 = k^{q+2} + 6k^4 - 4k^2 + 1 \end{aligned}$$

となるので, この範囲では $c_s \neq c_r$ である. よって, 補題 4.8 の (iii) より f_s と f_r は互いに素である.

Step 8

$s \geq 2q+5$ に対し, f_s が既約となことを示す. Step 7 までの結果より, f_s が既約でなければ, 可逆元 u と $1 \leq r \leq 2q+4$ があって

$$f_s = u f_0 f_r$$

と分解するしかない. このとき, 補題 4.8 の (ii) より $c_s = c_0 + c_r$ である. 成分を見ると

$$c_s^{(0)} = c_r^{(0)} + 1, \quad c_{s-1}^{(0)} = c_{r-1}^{(0)}$$

となる. しかし, $0 \leq i \leq q+2$ では $c_{2i}^{(0)} > c_{2i-1}^{(0)}$ であり, また帰納的に $c_{i+2}^{(0)} \geq k c_i^{(0)}$ と $c_{i+q}^{(0)} \geq k c_i^{(0)}$ が示される. $s \geq 2q+5$ の範囲では, s が偶数のとき $c_s^{(0)} \geq k c_{2q+4}^{(0)}$ となり $c_s^{(0)} \neq c_r^{(0)} + 1$ である. 一方, s が奇数のときは $c_{s-1}^{(0)} \geq c_{2q+4}^{(0)}$ なので $c_{s-1}^{(0)} \neq c_{r-1}^{(0)}$ である. 結局, いずれの場合も $c_s \neq c_r + c_0$ なので, f_s は既約である.

この計算を用いると, Step 7 と同様に, $0 \leq s \leq r$ に対して f_s と f_r が互いに素であることもわかる.

Step 9

方程式 (4.1) が coprimeness 条件を満たすことは, $p=1, q=2$ の場合の Step 10 と完全に同様である. $\square$

4.2.3. $p \geq 3$ の場合. $p \geq 3$ のとき

$$ip, q + ip, 2q + ip \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

の中に一致するものはない. p, q は互いに素であったので, 次の補題が従う.

補題 4.11. $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $s = mp + nq$ とおく. このとき s は

$$s = rpq + ip + jq \quad (r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 0 \leq i \leq q-1, 0 \leq j \leq p-1)$$

と一意的に表せる. さらに, $s = mp + nq$ と表せるような s 全体と, 対 (r, i, j) の全体は 1 対 1 に対応する.

定理 4.2 の証明 ($p \geq 3$). 補題 4.9 より, f_s は $0 \leq s \leq p+q$ および $s \neq ip + jq (i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ では既約である. 方程式 f_s の初期値に

$$f_m = \begin{cases} 2 & (m = -2p - 2q) \\ -1 & (m = -2q) \\ 1 & (-2p - 2q \leq m \leq -1, m \neq -2q) \end{cases}$$

を代入し, さらにパラメータとして $a = b = 1$ ととったものを g_s とおく. $g_0 = 0$ である. これまでと同様, $1 \leq s \leq 2p + 2q$ に対し $g_s \neq 0$ であることを示す.

Step 1

補題 4.11 の表記で $s = rpq + ip + jq$ とする. まずは, $r = 0, 0 \leq i \leq q-1, j = 0, 1$ の範囲を考える. $j = 0$ のとき $f_{2p} = 2$ であり,

$$g_{ip} = -g_{(i-1)p}^k + g_{(i-1)p}^k + g_{(i-2)p}^{k^2} = g_{(i-2)p}^{k^2}$$

なので

$$g_{ip} = \begin{cases} 1 & (i : \text{奇数}) \\ 2^{k^{i-2}} & (i : \text{偶数}) \end{cases}$$

となる. よって $g_{ip} \neq 0$ である.

$j = 1$ のときを考える. $i = 0, 1, 2$ では

$$g_q = 1, \quad g_{q+p} = -1, \quad g_{q+2p} = 1$$

となる. なお, g_{q+2p} の計算では補題 4.10 を用いた.

$$N_i = 2^{k^{i-2}}$$

とおくと, $i \geq 3$ で

$$\begin{aligned} g_{q+ip} &= \frac{-g_{q+(i-1)p}^k g_{ip}^k + (g_{q+(i-1)p}^k g_{(i-2)p}^k + g_{ip}^k g_{q+(i-2)p}^{k^2}) g_{(i-1)p}^{k^2-1}}{g_{(i-2)p}^k} \\ &= \begin{cases} -g_{q+(i-1)p}^k + N_{i-2} (g_{q+(i-1)p}^k + g_{q+(i-2)p}^{k^2}) & (i : \text{奇数}) \\ -N_{i-2} g_{q+(i-1)p}^k + (g_{q+(i-1)p}^k + N_{i-2} g_{q+(i-2)p}^{k^2}) & (i : \text{偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$

となる. $g_{q+ip} \equiv 1 \pmod{2}$ なので $g_{q+ip} \neq 0$ である.

Step 2

f_{2q} の既約性を示したいが, $g_{2q} = 0$ となってしまうので, g_s を用いて f_s の既約性を示すことはできない. そこで, 方程式 f_s の初期値として

$$f_m = \begin{cases} 2 & (m = -2p - 2q) \\ -1 & (m = -2p) \\ 1 & (-2p - 2q \leq m \leq -1, m \neq -2p) \end{cases}$$

を代入し, さらにパラメータとして $a = b = 1$ ととったものを h_s とおく. このとき

$$h_0 = 0, \quad h_q = 1, \quad h_{2q} = 2 \neq 0$$

となることが計算によりわかるので, f_{2q} は既約である.

Step 3

$g_{2q+p}, g_{2q+2p}, g_{3q} \neq 0$ を示す. 補題 4.10 より, $g_{2q+p} = 1 \neq 0$ である. また, $g_{2q} = 0$ を用いると $g_{2q+2p} = 2^{k^2} \neq 0$ がわかる. $p \geq 4$ ならば, $g_{2q} = 0$ から $g_{3q} = 1 \neq 0$ となる. $p = 3$ のとき, $3q = pq$ なので, $g_{3q} \neq 0$ であることは次の Step に帰着される.

Step 4

$s = rpq + ip + jq$ と表記した際の $r = 1$ の場合を考える. なお, $pr \leq 2p + 2q$ となるのは, $p = 3, q = 4, 5$ の場合のみである. いずれも $2p + 2q < pq + p$ なので, $s = pq$ の場合だけを考えればよい. $p = 3$ なので, $g_{(p-1)q} = g_{2q} = 0$ である. これを用いると

$$g_{pq} = g_{(q-1)p} g_q^{k^2} \neq 0$$

となることがわかる.

以上で, $0 \leq s \leq 2p + 2q$ において f_s が既約であることがわかった.

Step 5

補題 4.8 の $c_s^{(0)}$ が, 任意の $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 0 < |i| \leq p-1$ に対し

$$c_{jp+i}^{(0)} < c_{jp}^{(0)}$$

を満たすことを示す.

i を固定し, $y_{m,n}$ を

$$y_{m,n} = c_{mp+nq}^{(0)} - c_{mp+nq+i}^{(0)}$$

とおく. $y_{m,0} > 0$ であることを示せばよい.

$y_{m,n}$ は $y_{m+q,n} = y_{m,n+p}$ を満たし, 最初の部分は

$$y_{-2,-2} = 1, \quad y_{m,-2} = y_{m,-1} = y_{-2,n} = y_{-1,n} = 0 \quad (-1 \leq m \leq q-1, -1 \leq n \leq p-1)$$

となる. 方程式より, $y_{m,n}$ は

$$y_{m,n} = k(y_{m-1,n} + y_{m,n-1} - y_{m-2,n-1} - y_{m-1,n-2}) + y_{m-2,n-2}$$

を満たす. $d_{m,n} = y_{m,n} - y_{m-1,n-1}$ とおくと, $d_{m,n}$ は

$$d_{m,n} = k(d_{m-1,n} + d_{m,n-1}) - d_{m-1,n-1}, \quad d_{m+q,n} = d_{m,n+p}$$

を満たす. さらに, 最初の部分は

$$d_{-1,-1} = -1, \quad d_{m,-1} = d_{-1,n} = 0 \quad (0 \leq m \leq q-1, 0 \leq n \leq p-1)$$

となる. よって

$$d_{m,0} = k^m, \quad d_{0,n} = k^n \quad (0 \leq m \leq q-1, 0 \leq n \leq p-1)$$

であり, $m, n \geq 1$ では明らかに

$$d_{m,n} > kd_{m-1,n}, \quad d_{m,n} > kd_{m,n-1}$$

となる. よって $m, n \geq 0$ では $d_{m,n} > 0$ である.

m, n が $-p \leq m-n \leq q$ を満たす場合,

$$y_{m,n} = \sum_{\ell} d_{m-\ell,n-\ell}$$

とかける. ただし和は $0 \leq \ell \leq \min(m, n)$ で取るものとする. よって, この場合は $y_{m,n} > 0$ である.

一般の $m \geq 0$ に対し $y_{m,0} > 0$ を示す. $-q \leq m_0(p+q) - m \leq p$ となる $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を取ると, $y_{m,0} = y_{m-m_0q, m_0p}$ であり, $-p \leq m-m_0q - m_0p \leq q$ なので, $y_{m,0} > 0$ となる.

Step 6

補題 4.8 の $c_s^{(0)}$ が, $m > 0$ に対し $c_{mp}^{(0)} \geq c_{(m-1)p}^{(0)}$ を満たすことを示す. $d_{m,n}$ を

$$d_{m,n} = c_{mp+nq}^{(0)} - c_{(m-1)p+(n-1)q}^{(0)}$$

で定めると, この $d_{m,n}$ は Step 5 と同じ方程式を満たす. よって, Step 5 と同様の計算により $d_{m,0} \geq kd_{m-1,0}$ を示すことができる.

Step 7

$0 \leq s < t \leq 2p + 2q$ に対し, f_s と f_t が互いに素であることを示す. 補題 4.8 の (iii) より, $c_s \neq c_t$ を示せばよい.

$$m_s = \max(c_s^{(0)}, \dots, c_{s-p+1}^{(0)})$$

とおくと, Step 5 より, $m_s = c_{ip}^{(0)}$, $m_t = c_{jp}^{(0)}$ となる $i \leq j$ が存在する. $i < j$ ならば, Step 6 より $m_s < m_t$ なので $c_s \neq c_t$ である. $i = j$ ならば, 最大値を取る番号が $t - s$ だけずれているので, やはり $c_s \neq c_t$ である.

Step 8

$s \geq 2p + 2q + 1$ に対し, f_s が既約であることを示す. 他の場合と同様, f_s が既約でないならば, 可逆元 u と $1 \leq r \leq 2p + 2q$ を用いて $f_s = u f_r f_0$ と分解するしかない. このとき, 補題 4.8 の (ii) より $c_s = c_r + c_0$ となるが, Step 5, 6 よりこれは不可能である. よって f_s は既約である.

Step 9

$0 \leq s < t$ に対し f_s と f_t が互いに素になることは, Step 7 と完全に同様に示される.

Step 10

方程式 (4.1) が coprimeness 条件を満たすことは, $p = 1, q = 2$ の場合の Step 10 と完全に同様である. $\square$

5. 結論

本稿では, 主に方程式 (1.1) について考察した. まず, この方程式に従属変数変換をすることで得られる方程式 (1.2) の Laurent 性と既約性を, 一般の領域に対して証明した. その結果を用いて, もとの方程式 (1.1) が coprimeness 条件を満たすことを示した.

また, これらの方程式のリダクションによって得られる 1 次元格子上の方程式についても考察した. 基礎体の標数が 0 かつ方程式のパラメータが関係式を持たない文字変数という仮定のもと, 方程式 (4.2) が既約性を持ち coprimeness 条件を満たすことを証明した. その結果から, 方程式 (4.1) が coprimeness 条件を満たすことが従うことを見た.

謝辞

本研究は, JSPS 科研費 15H06128, 16H06711, JP26400109 の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] E. Bedford and K. Kim, "Continuous families of rational surface automorphisms with positive entropy," *Mathematische Annalen* 348 (2010): 667–688.
- [2] M. P. Bellon and C.-M. Viallet, "Algebraic entropy," *Communications in Mathematical Physics* 204 (1999): 425–437.
- [3] B. Grammaticos, A. Ramani and V. Papageorgiou, "Do integrable mappings have the Painlevé property?," *Physical Review Letters* 67 (1991): 1825–1828.
- [4] B. Grammaticos, A. Ramani, R. Willox, T. Mase and J. Satsuma, "Singularity confinement and full-deautonomisation: a discrete integrability criterion," *Physica D* 313 (2015): 11–25.
- [5] J. Hietarinta and C. Viallet, "Singularity confinement and chaos in discrete systems," *Physical Review Letters* 81 (1998): 325–328.
- [6] M. Kanki, J. Mada and T. Tokihiro, "Singularities of the discrete KdV equation and the Laurent property," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 47 (2014): 065201.
- [7] M. Kanki, J. Mada, T. Mase and T. Tokihiro, "Irreducibility and co-primeness as an integrability criterion for discrete equations," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 47 (2014): 465204.
- [8] M. Kanki, J. Mada and T. Tokihiro, "Integrability criterion in terms of coprime property for the discrete Toda equation," *Journal of Mathematical Physics* 56 (2015): 022706.
- [9] M. Kanki, T. Mase and T. Tokihiro, "Algebraic entropy of an extended Hietarinta-Viallet equation," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 48 (2015): 355202.
- [10] M. Kanki, T. Mase and T. Tokihiro, "Singularity confinement and chaos in two-dimensional discrete systems," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49 (2016): 23LT01.
- [11] T. Mase, "The Laurent phenomenon and discrete integrable systems," *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* B41 (2013): 43–64.
- [12] T. Mase, "Investigation into the role of the Laurent property in integrability," *Journal of Mathematical Physics* 57 (2016): 022703.
- [13] A. Ramani, B. Grammaticos, R. Willox, T. Mase and M. Kanki, "The redemption of singularity confinement," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 48 (2015): 11FT02.