

磁性流体界面解析における界面磁場解析再考

北海道大学大学院・工学研究院 水 田 洋

Yo Mizuta

Faculty of Engineering, Hokkaido University

1 はじめに

磁性流体の界面は、密度・透磁率が異なる媒質同士が接する場所であり、磁場に感應する流体と磁場が互いに強く結合して、ほかの流体にはないような特異な現象が現れる。たとえば、磁性流体の水平界面に磁場を印加してその強度を増していくと、ある臨界強度を越えた時、平らな界面が不連続的に規則格子状あるいはスパイク集合状へと変化する。界面形状が遷移する途中の段階では様々な非線形相互作用が生じると考えられ、遷移過程の一部始終を実時間で追ってみるのは興味深い問題である。

遷移過程は、流体と磁場が強く結合して起こる時間変化の激しい現象である。このため、界面形状や印加する磁場分布に制限なく適用可能な解析方法を選ばなくてはならない。時間発展は磁場・流体がそれぞれ互いの情報を取り込みつつ行うため、効率性も大事になる。また、求められた磁場や流体が物理法則を十分に満たしていることを確認しながら進める必要がある。

本研究では、これまで次のような手順を構築してきた。汎用磁場解析で導いた3次元界面磁場方程式を解いて、調和性と界面条件を厳密に満たす界面磁場を求める[1, 2, 3, 4, 5]。このとき、流体・真空それぞれで内部領域の磁場は求めない。界面磁場から求めた磁気応力差は、他の応力と合わせて界面応力和とする。界面応力和をBernoulli方程式と力学的条件より導いた界面力学方程式に用い、これを時間積分して界面変位の運動を決める[5, 6, 7]。

界面力学方程式の時間積分に当たって確かめることを、(i)与えられた界面応力和に対して数値積分が正しく行われているか、(ii)界面応力和自身が物理的に正しいか、に分けて考える。(i)に関しては、界面力学方程式から導かれたエネルギー保存則を用いる[7, 8, 9]。界面力学方程式が正しく時間積分

されていることを、既知の界面応力和による仕事と運動エネルギーのつり合いを調べて確かめる。(ii)に関しては、界面応力と界面エネルギー密度 (Flat Spaceにおける界面の単位面積あたりのエネルギー) の関係を用いる [8, 9]. 界面応力のうち磁気応力差と磁気界面エネルギー密度の関係は、Ampèreの法則・Gaussの法則を前提に導かれている。したがってさらに、(iii) 汎用磁場解析で求めた界面磁場は磁場法則を満たしているか、も確かめておかねばならない。本論文では、磁性流体界面現象の数値解析を行ったとき、結果の妥当性を評価するための観点 (i),(ii),(iii) を提示する。

2 時間積分は正しいか？

界面に沿う一般化座標 $\mathbf{R} = (X, Y)$ の関数である界面変位 $\zeta(\mathbf{R})$ ・界面応力和 $S(\mathbf{R})$ を、波数成分 $\mathbf{k}$ の周期関数の重ね合わせで次のように表す。

$$\zeta(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}} \zeta_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}), \quad S(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}). \quad (1)$$

磁性流体を非圧縮性渦なしとすると、界面上で流体の運動方程式の界面方向成分に運動学的条件・力学的条件を用いれば、与えられた $S_{\mathbf{k}}(\mathbf{R})$ から $\zeta_{\mathbf{k}}(\mathbf{R})$ を求めるための、次のような界面力学方程式が導かれる [5, 6, 7].

$$0 = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\tanh kd} \frac{\partial \zeta_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right) - \frac{1}{k} \nabla_2^2 S_{\mathbf{k}} \right\}. \quad (2)$$

ここで、 $\rho, d, \nabla_2 = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y)$ は流体密度・流体領域の厚さ・界面方向偏微分、また $k = |\mathbf{k}|$ である。

界面力学方程式(2)の両辺に $\partial \zeta / \partial t$ をかけて、界面 F 全体で平均する。界面平均を $\langle \cdots \rangle \equiv (1/F) \iint_F dXdY \cdots$ と表し、周期関数に対して、 $\nabla_2^2 S_{\mathbf{k}} + k^2 S_{\mathbf{k}} = 0$ および直交性 $\langle \zeta_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{R}) \zeta_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{R}) \rangle \neq 0$ ($\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$) を考慮すれば、

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\rho}{2k \tanh kd} \left\langle \left(\frac{\partial \zeta_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial t} S \right\rangle \quad (3)$$

が導かれる [7, 8, 9], ここで、右辺第1項は運動エネルギーの時間変化、第2項は界面応力和による仕事 (いずれも単位時間・単位面積あたり) であり、(3) はエネルギー保存則を表す。界面の運動は、(2) を積分して ζ の時間変化を求めれば解析できる。このとき (3) は、界面応力和を既知とするならば、数

値的な時間積分が適切に行われたかどうかの評価基準となる。

3 界面応力は正しいか？

界面力学方程式(2)の積分にあたり、界面応力和 S の正しさが問題になるが、本節では、界面エネルギー密度との関係によりその検証を行うための方法について述べる。

3.1 応力と界面エネルギー密度の関係 [8, 9]

界面応力和 S は、動圧・大気圧勾配の効果が小さいとして省略すると、重力ポテンシャル G ・表面張力 C ・磁気応力差 T の和で

$$S = G + C + T, \quad G = \rho g \zeta, \quad C = -\gamma(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (4)$$

と表される。ここで、 $g, \gamma, \kappa_{1,2}$ は重力加速度・表面張力係数・界面形状の主曲率である。特に磁気応力差は、接線磁場・法線磁束密度・流体/真空の透磁率 ($j = + / -$)・界面を横切る値の跳び (真空 - 流体) を $H_{X,Y}, B_Z, \mu_j, [\dots]$ とすれば、次のように表される。

$$T = - [1/\mu_j] \{ \mu_+ \mu_- (H_X^2 + H_Y^2) + B_Z^2 \} / 2. \quad (5)$$

界面応力和の正しさを評価するには、界面応力和とは別に、任意の界面変位 ζ で界面エネルギー密度 $U(\zeta)$ (Flat Space における界面の単位面積当りのエネルギー) を求められるようにしておき、 $\delta\zeta$ を変位の微小変化として、次の関係を確かめる。

$$U(\zeta + \delta\zeta) - U(\zeta) = S(\zeta) \delta\zeta. \quad (6)$$

このとき、(4) の各応力に対応する界面エネルギー密度は以下ようになる。

$$U(\zeta) = U_G(\zeta) + U_C(\zeta) + U_T(\zeta), \quad U_G = \frac{1}{2} \rho g \zeta^2, \quad U_C = \gamma \sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2}. \quad (7)$$

(6) と同様に、磁気界面エネルギー密度 $U_T(\zeta)$ と磁気応力差 $T(\zeta)$ の間にも、

$$\delta U_T \equiv U_T(\zeta + \delta\zeta) - U_T(\zeta) \simeq T(\zeta) \delta\zeta \quad (8)$$

のような関係が成立していなくてはならない。磁場は流体・真空両領域に分布するので、 U_T は両領域の磁気界面エネルギー密度 $U_{T\pm}$ を合わせる。それぞれの領域で界面移動 $\delta\zeta_{\pm}$ があれば、それに伴う $U_{T\pm}$ の変化の割合が応力 $T_{\pm}$ となる。ところで $\delta\zeta_{\pm}$ は大きさが同じで互いに逆向きなので、 $\delta\zeta_+ = -\delta\zeta_- = \delta\zeta$

という関係がある。以上をまとめると、

$$U_T(\zeta) = U_{T+}(\zeta) + U_{T-}(\zeta), \quad (9)$$

$$\delta U_{T+} = T_+ \delta \zeta_+, \quad \delta U_{T-} = T_- \delta \zeta_-, \quad (10)$$

$$\delta U_T = \delta U_{T+} + \delta U_{T-} = T_+ \delta \zeta_+ + T_- \delta \zeta_- = (T_+ - T_-) \delta \zeta = T \delta \zeta. \quad (11)$$

したがって、磁気応力差は $T = T_+ - T_-$ と求められる。

磁束密度ベクトルを $\mathbf{B}=(B_X, B_Y, B_Z)$ ($B_{X,Y}$: 接線成分, B_Z : 法線成分) とすれば、磁気界面エネルギー密度は、単位体積当たりの磁気エネルギー $B^2/2\mu_+$ を法線方向に積分して、次のようになる。

$$U_{T+} \equiv \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \frac{B^2}{2\mu_+}, \quad U_{T-} \equiv \int_{\zeta}^{\infty} dZ \frac{B^2}{2\mu_-}. \quad (12)$$

次節で示すように、(10)を満たす $T_{\pm}$ は次の Maxwell 応力である。

$$T_+ = \frac{1}{2} \left\{ \frac{B_Z^2}{\mu_+} - \mu_+ (H_X^2 + H_Y^2) \right\}, \quad T_- = \frac{1}{2} \left\{ \frac{B_Z^2}{\mu_-} - \mu_- (H_X^2 + H_Y^2) \right\}. \quad (13)$$

(5) の磁気応力差は、これらの差を取れば導かれる。

3.2 Maxwell 応力と磁気界面エネルギー密度の関係 [8, 9]

(10) および (13) は、よく知られた、Maxwell 応力と界面の微小移動に伴う磁場エネルギーの変化の間の関係である。本節ではこの関係を、離散化された実空間で数値解析の検証に使うことを意識しながら、波数空間の代わりに実空間において導く。ただし、煩雑さを避けるため、以下では界面が平らな Flat Space を用いる。

界面に対して垂直方向に流体領域へ伸びた無限長さの角柱を考える (Fig. 1 左)。ここで、角柱の断面積を S_Z 、界面の高さを ζ 、磁束密度の接線成分を

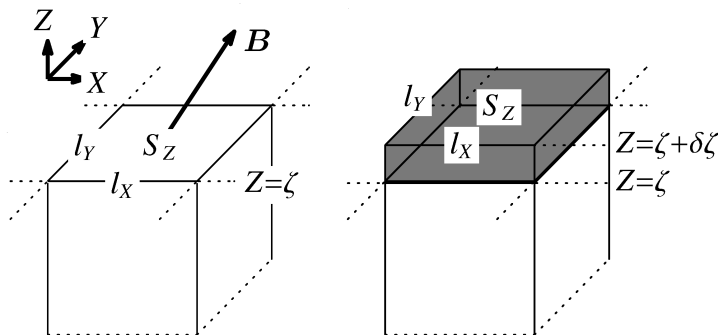


Fig. 1: Maxwell 応力と磁気界面エネルギー密度の関係を導くための、角柱領域。

$B_{X,Y}$, 法線成分を B_Z とする. このとき, この角柱領域における磁気界面エネルギー密度は次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}
 U_{T+} &= \frac{1}{2\mu_+ S_Z} \iint_{S_Z} dS_Z \int_{-\infty}^{\zeta} dZ B^2 = \frac{1}{2\mu_+ S_Z} \iiint_V dV B^2 \\
 &= \frac{1}{2\mu_+ S_Z} \iiint_V dV \mathbf{B} \cdot (\mu_+ \nabla \phi^+) = \frac{1}{2S_Z} \iiint_V dV \nabla \cdot (\mathbf{B} \phi^+) \\
 &= \frac{1}{2S_Z} \iint_{S_Z} dS_Z \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \nabla \cdot (\mathbf{B} \phi^+). \tag{14}
 \end{aligned}$$

1行目は, (12) のままでなく, 断面内平均から始まっている. 2行目では, Ampère の法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ より $\mathbf{B} = \mu_+ \nabla \phi^+$ と置き, 公式 $\nabla \cdot (\mathbf{B} \phi) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \phi) + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \phi$ に Gauss の法則 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を適用した.

次に, Fig. 1 右のように, 界面の高さが $\delta\zeta$ だけ変化するとき, 磁気界面エネルギー密度の変化 δU_{T+} を求めよう. この変化は, 以下の2行目に示すように, 角柱の体積変化 (第1項) ばかりでなく, 磁束密度の変化 (第2項) によっても生じる. 以後このような変化を記号 δ で表す. なお, 下付き添え字 0 は界面量を示す. 2行目から3行目へは, Ampère の法則と Gauss の法則から導かれる (16) を用いた. 3行目で $B^2 = B_X^2 + B_Y^2 + B_Z^2$, 4行目で $\mathbf{B} = \mu_+ \mathbf{H}$ を用いれば (15) に至るが, これは (10) に (13) を代入したものに他ならない.

$$\begin{aligned}
 \delta U_{T+} &= \delta \left(\frac{1}{2\mu_+ S_Z} \iint_{S_Z} dS_Z \int_{-\infty}^{\zeta} dZ B^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2\mu_+ S_Z} \iint_{S_Z} dS_Z \left\{ B_0^2 \delta\zeta + \int_{-\infty}^{\zeta} dZ (\delta B^2) \right\} \\
 &= \frac{1}{2\mu_+ S_Z} \iint_{S_Z} dS_Z \left\{ B_0^2 \delta\zeta - 2(B_{X0}^2 + B_{Y0}^2) \delta\zeta \right\} \\
 &= \frac{1}{2\mu_+ S_Z} \iint_{S_Z} dS_Z (B_{Z0}^2 - B_{X0}^2 - B_{Y0}^2) \delta\zeta \\
 &= \frac{1}{2S_Z} \iint_{S_Z} dS_Z \left\{ \frac{B_{Z0}^2}{\mu_+} - \mu_+ (H_{X0}^2 + H_{Y0}^2) \right\} \delta\zeta = T_+ \delta\zeta, \tag{15}
 \end{aligned}$$

$$I = \iint_{S_Z} dS_Z \left\{ \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \frac{\delta B^2}{2} + (B_{X0}^2 + B_{Y0}^2) \delta\zeta \right\} = 0. \tag{16}$$

3.3 界面移動による磁場の変化

この節では、Ampère の法則と Gauss の法則から (16) を導く。Gauss の法則から導かれる以下の関係について、界面移動前後での差を取れば、

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta \iiint_V dV \phi (\nabla \cdot \mathbf{B}) = \iint_{S_Z} dS_Z \delta \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \phi \left(\frac{\partial B_X}{\partial X} + \frac{\partial B_Y}{\partial Y} + \frac{\partial B_Z}{\partial Z} \right) \\
 &= \iint_{S_Z} dS_Z \left(\delta \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \phi \frac{\partial B_X}{\partial X} + \delta \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \phi \frac{\partial B_Y}{\partial Y} + \delta \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \phi \frac{\partial B_Z}{\partial Z} \right) \\
 &= \iint_{S_Z} dS_Z \left\{ \int_{-\infty}^{\zeta} dZ (B_X \delta B_X + B_Y \delta B_Y + B_Z \delta B_Z) + (B_{X0}^2 + B_{Y0}^2) \delta \zeta \right\} \\
 &= \iint_{S_Z} dS_Z \left\{ \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \delta \left(\frac{B_X^2 + B_Y^2 + B_Z^2}{2} \right) + (B_{X0}^2 + B_{Y0}^2) \delta \zeta \right\} \\
 &= \iint_{S_Z} dS_Z \left\{ \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \frac{\delta B^2}{2} + (B_{X0}^2 + B_{Y0}^2) \delta \zeta \right\} = I. \tag{17}
 \end{aligned}$$

ここで、1 行目では、断面形状は界面移動の影響を受けないとして、 δ を断面積分の中に入れた。また、2 行目から 3 行目へは、以下の関係を用いた。

$$\begin{aligned}
 \delta \left(\int_{-\infty}^{\zeta} dZ B_X \right) &= \int_{-\infty}^{\zeta+\delta\zeta} dZ (B_X + \delta B_X) - \int_{-\infty}^{\zeta} dZ B_X = \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \delta B_X + B_{X0} \delta \zeta, \\
 \delta \left(\int_{-\infty}^{\zeta} dZ B_Y \right) &= \int_{-\infty}^{\zeta+\delta\zeta} dZ (B_Y + \delta B_Y) - \int_{-\infty}^{\zeta} dZ B_Y = \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \delta B_Y + B_{Y0} \delta \zeta. \tag{18}
 \end{aligned}$$

4 界面磁場は正しいか？

3.1 節に示した磁気界面エネルギー密度と磁気応力差の関係 (8) は、3.2 節で述べたように、Ampère の法則・Gauss の法則の成立を前提としている。したがって、数値的に求めた界面磁場もこれらの磁場法則を正確に満たしている必要がある。本節ではまず、本研究で用いてきた磁場解析の概要を示す。その上で、求められた界面磁場が満たすべき条件を導出する。

4.1 汎用解析による界面磁場

界面形状や印加磁場分布が任意でも、調和性と界面条件を満たす界面磁場を厳密に求めるのが本解析の特徴である。ここで、流体 (+)・真空 (-) 各領域において、磁場 $\mathbf{h}$ と磁束密度 $\mathbf{b}$ には透磁率 μ_j ($j = +/-$) を通じて $\mathbf{b} = \mu_j \mathbf{h}$ が成り立ち、Ampère の法則 $\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{0}$ と Gauss の法則 $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ を満たすとす

る。また界面では、接線磁場を $h_{X,Y}$ 、法線磁束密度を b_Z 、界面を横切る値の跳び(真空-流体)を $[\dots]$ と表すとき、界面条件 $[h_{X,Y}] = 0$ 、 $[b_Z] = 0$ が成り立つ(このことを考慮して、両領域の界面磁場を始めから区別しない)。

汎用解析では、上記の条件を満たす磁場を、界面に限って次のように求める。界面磁場 $h_{X,Y}$ 、 b_Z は、既知の外部印加磁場 h^0 より直接定義できる基本場 $h_{X,Y}^0 = t_{X,Y} \cdot h^0$ 、 $b_Z^0 = t_Z \cdot h^0 / P$ と、基本場と合わせて調和性と界面条件を満たす誘導場 $h_{X,Y}^1$ 、 b_Z^1 に分ける。ここで、 $t_{X,Y}$ 、 t_Z は接線および法線単位ベクトル、また、 $P \equiv (1/\mu_- + 1/\mu_+)/2$ 、 $M \equiv (1/\mu_- - 1/\mu_+)/2$ である。

誘導場は、3次元界面磁場方程式((19)左)、または、これを書き換えた直接的な表式(同右)から求める[1, 2, 3, 4, 5]。

$$\begin{cases} (P+M\hat{G}_Z)b_Z^1 = -M\hat{G}_Z b_Z^0, \\ h_{X,Y}^1 + M\hat{G}_{X,Y}b_Z^1 = -M\hat{G}_{X,Y}b_Z^0, \end{cases} \quad \begin{cases} b_Z^1 = \hat{H}_Z (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0, \\ h_{X,Y}^1 = \hat{H}_{X,Y} (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0. \end{cases} \quad (19)$$

ここでは、 $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{r}'$ を観測点と界面 F 上のソース点の位置ベクトル、 ψ を $\mathbf{r}'$ に関する微分または $\mathbf{r}'$ だけの関数、 $\psi(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) = -1/4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ を3次元 Poisson 方程式 $\Delta'\psi = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ の基本解、 $\iint_F dS'$ を F 上の $\mathbf{r}'$ にわたる面積分として、次のように3次元 Hilbert 変換演算子 $\hat{G}_I$ または $\hat{H}_I$ を定義した。

$$\hat{G}_I g(\mathbf{r}) \equiv t_I \cdot \hat{G} g(\mathbf{r}'), \quad \hat{G} g(\mathbf{r}) \equiv 2 \iint_F dS' (\nabla' \psi) g(\mathbf{r}'), \quad (20)$$

$$\hat{H}_{X,Y} g(\mathbf{r}) \equiv -M \hat{G}_{X,Y} g(\mathbf{r}), \quad \hat{H}_Z g(\mathbf{r}) \equiv -(M/P) \hat{G}_Z g(\mathbf{r}), \quad (I=X, Y, Z). \quad (21)$$

3次元界面磁場方程式(19)を導くためには、流体(+)-真空(-)各領域で、磁気ポテンシャル $\phi^\pm$ と、両領域の界面が存在する前に与える基本場 $\phi^{0\pm}$ を考える(Fig. 2)。 $\phi^\pm$ 、 $\phi^{0\pm}$ が共に3次元 Laplace 方程式 $\Delta'\phi^\pm = 0$ 、 $\Delta'\phi^{0\pm} = 0$ を満たすとして、 $\phi^\pm$ または $\phi^{0\pm}$ と(20)の ψ による Green の定理を構成し、 $\phi^\pm$ から $\phi^{0\pm}$ の寄与を差し引いておくと、流体・真空それぞれの磁気ポテンシ

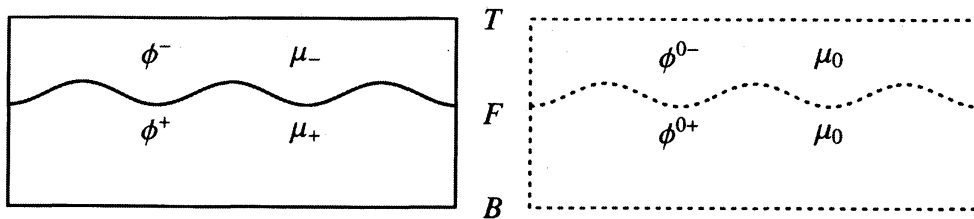


Fig. 2: 流体(+)-真空(-)各領域の磁気ポテンシャル $\phi^\pm$ (左) とそれらの基本場 $\phi^{0\pm}$ (右)。

ルに対して次の関係が導かれる.

$$\begin{cases} \phi^- - \phi^{0-} = 2 \iint_{F+T} dS'^- \cdot \{(\phi'^- - \phi^{0-}')(\nabla'\psi) - \psi(\nabla'\phi'^- - \nabla'\phi^{0-}')\}, \\ \phi^+ - \phi^{0+} = 2 \iint_{F+B} dS'^+ \cdot \{(\phi'^+ - \phi^{0+}')(\nabla'\psi) - \psi(\nabla'\phi'^+ - \nabla'\phi^{0+}')\}. \end{cases} \quad (22)$$

ここで, F, T, B はそれぞれ, 界面・上方境界・下方境界を示す. $\nabla\phi^\pm = h^\pm$ により磁場に対する方程式に書き換え, 界面条件を適用すれば, (19) が導かれる. なおこのようにして, (19) には示されていない上方境界・下方境界の影響を取り込むこともできる [5].

4.2 界面磁場の検証

汎用磁場解析では, 実空間の界面上の点で接線磁場・法線磁束密度を求める. これらの界面磁場の正当性は, この磁場解析を組み立てる基礎となった Ampère の法則と Gauss の法則に当てはめて確かめることになる. ただし, ポテンシャルによって磁場を記述しておけば, Ampère の法則は自動的に満たされる. したがって後は, 求められた界面磁場が Gauss の法則は満たすことを確認すればよい.

汎用磁場解析では, Green の定理から導いた 3 次元界面磁場方程式を解いて界面磁場を求めるが, 界面から離れた場所では求めない. このため, 以下の議論で界面から離れた場所の磁場を必要とするときは, 調和場を前提として, $h_{X,Y}, b_Z \propto e^{i(k_X X + k_Y Y)} e^{k_Z Z}$ ($k^2 = k_X^2 + k_Y^2$) のように法線方向変化もある磁場の波数成分を用いることにする.

2 次元 Flat Space において, $\phi_{XX} + \phi_{ZZ} = 0$ を満たす磁気ポテンシャル

$$\phi(X, Z) = \frac{1}{\sin kl_X} \{ \phi_1 \sin k(l_X - X) + \phi_2 \sin kX \} e^{kZ} \quad (23)$$

に基づいて, Gauss の法則を, Fig. 3 のような実空間界面直下の平行六面体領域で検討する. 汎用磁場解析から求められるのは, Fig. 3 右の断面に示した, 界面上の端点 $X = 0, l_X$ における $b_{X1}, b_{X2}, b_{Z1}, b_{Z2}$ である. したがって, $\phi_{1,2}$ はこれらに対応する磁気ポテンシャルの値であり, (23) は, 端点では $\phi_{1,2}$ となるように, 端点の間では波数 k の波で内挿したことになる.

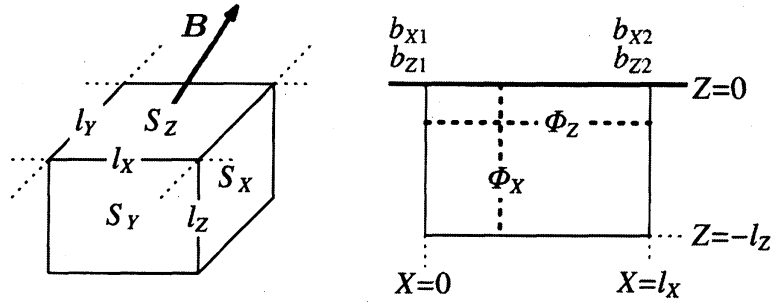


Fig. 3: 実空間で Gauss の法則を確認するための、平行六面体領域.

磁気ポテンシャルの勾配から求めた磁束密度の接線成分・法線成分

$$\begin{cases} b_x(X, Z) = \frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{k}{\sin kl_x} \{-\phi_1 \cos k(l_x - X) + \phi_2 \cos kX\} e^{kZ}, \\ b_z(X, Z) = \frac{\partial \phi}{\partial Z} = \frac{k}{\sin kl_x} \{ \phi_1 \sin k(l_x - X) + \phi_2 \sin kX \} e^{kZ} \end{cases} \quad (24)$$

をそれぞれ垂直断面 $X = \text{const.}$ ・平行断面 $Z = \text{const.}$ 上で積分すると、磁束

$$\begin{cases} \Phi_x(X) = \int_{-l_z}^0 dZ b_x = \frac{1}{\sin kl_x} \{-\phi_1 \cos k(l_x - X) + \phi_2 \cos kX\} (1 - e^{-kl_z}), \\ \Phi_z(Z) = \int_0^{l_x} dX b_z = \frac{1}{\sin kl_x} (\phi_1 + \phi_2) (1 - \cos kl_x) e^{kZ} \end{cases} \quad (25)$$

が得られる。これより、Fig. 3 右各面の磁束は次のようになる。

$$\begin{cases} \Phi_x(0) = \frac{1}{\sin kl_x} (-\phi_1 \cos kl_x + \phi_2) (1 - e^{-kl_z}), \\ \Phi_x(l_x) = \frac{1}{\sin kl_x} (-\phi_1 + \phi_2 \cos kl_x) (1 - e^{-kl_z}), \\ \Phi_z(0) = \frac{1}{\sin kl_x} (\phi_1 + \phi_2) (1 - \cos kl_x), \\ \Phi_z(-l_z) = \frac{1}{\sin kl_x} (\phi_1 + \phi_2) (1 - \cos kl_x) e^{-kl_z}. \end{cases} \quad (26)$$

したがって、 $\oint \mathbf{dS} \cdot \mathbf{b} = \Phi_x(l_x) - \Phi_x(0) + \Phi_z(0) - \Phi_z(-l_z) = 0$ となり、確かに Gauss の法則が満たされている。

ところで、(24) から、界面上の端点における磁束密度の接線成分・法線成分の値 $b_{x1}, b_{x2}, b_{z1}, b_{z2}$ は、次のように $\phi_{1,2}$ で表されることがわかる。

$$\begin{cases} b_{x1} = b_x(0, 0) = \frac{k}{\sin kl_x} (-\phi_1 \cos kl_x + \phi_2), \\ b_{x2} = b_x(l_x, 0) = \frac{k}{\sin kl_x} (-\phi_1 + \phi_2 \cos kl_x), \\ b_{z1} = b_z(0, 0) = k\phi_1, \\ b_{z2} = b_z(l_x, 0) = k\phi_2. \end{cases} \quad (27)$$

これらを $\phi_{1,2}$ について解けば,

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{b_{z1}}{k} = \frac{1}{k \sin kl_X} (b_{x1} \cos kl_X - b_{x2}), \\ \phi_2 = \frac{b_{z2}}{k} = \frac{1}{k \sin kl_X} (b_{x1} - b_{x2} \cos kl_X). \end{cases} \quad (28)$$

もし, 汎用磁場解析から求めた界面磁場が (28) 第2辺と第3辺の関係を満たせば, これは, Gauss の法則と共に Ampère の法則を確かめたことになる. なお, (28) の $\phi_{1,2}$ を (24) に代入して整理すれば,

$$\begin{cases} b_X(X, Z) = \frac{1}{\sin kl_X} \{b_{x1} \sin k(l_X - X) + b_{x2} \sin kX\} e^{kZ}, \\ b_Z(X, Z) = \frac{1}{\sin kl_X} \{b_{z1} \sin k(l_X - X) + b_{z2} \sin kX\} e^{kZ}. \end{cases} \quad (29)$$

となるが, これは, 磁束密度もまた, (23) と同じく, 端点で $b_{x1}, b_{x2}, b_{z1}, b_{z2}$ となり, 端点の間では波数 k の波で内挿されることを示している.

5 まとめと今後の課題

磁性流体の界面形状が, 臨界強度近傍で遷移するような現象には, 途中に激しく時間変化する過程がある. このような遷移過程の数値解析を成功させるためには, 界面形状や印加磁場分布に制約のない方法を用意すると共に, 十分な物理的考察に基づいて数値的問題に備える必要がある.

本研究では, 汎用磁場解析で界面磁場および磁気応力差を求め, 界面応力を含む界面力学方程式の時間積分で界面変位の運動を決める. このとき, 数値解析の正当性は, 与えられた界面応力和对する数値積分が正しく行われるか, 界面応力と自身が物理的に正しいか, に分けて確かめることになる. 前者に関しては, 界面力学方程式から導いたエネルギー保存則を, 後者に関しては, 界面応力と界面エネルギー密度の関係をを用いる. この関係が磁気応力差に対して成り立つためには, さらに, 界面磁場が Ampère の法則・Gauss の法則を満たしている必要があるが, 本論文ではこのための条件を示した.

今後本研究は, 磁性流体界面の形状遷移のように時間変化の大きな現象の解析へ適用していくが, その際に, 上述の評価基準に基づいて, 数値解析の正当性を確認していく.

参考文献

- [1] 水田 洋: 複雑界面における調和場解析の次元間対応; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1483**, p.175 (2006).
- [2] Y.Mizuta: Interface magnetic field analysis for free surface phenomena of magnetic fluid; *Magnetohydrodynamics*, **44** (2), p.155 (2008).
- [3] Y.Mizuta: Stability analysis on the free surface phenomena of a magnetic fluid for general use; *J. Magn. Magn. Mater.*, **323** (10), p.1354 (2011).
- [4] 水田 洋: 磁性流体表面波動における界面磁場解析; 日本流体力学会年会 2012 講演論文集, 16-01-04-05 (2012).
- [5] 水田 洋: 水深が有限な磁性流体界面の波動と安定性; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動研究の数理, モデリングおよび応用」, **1847**, p.96 (2013).
- [6] 水田 洋: 規則的形状パターン生成時の磁性流体界面スペクトル変化; 日本流体力学会年会 2013 講演論文集, 79 (2013).
- [7] 水田 洋: 不安定化する磁性流体界面波動のスペクトル特性変化; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1890**, p.113 (2014).
- [8] 水田 洋: 磁性流体界面解析における界面磁気力; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象のメカニズムと数理」, **1946**, p.48 (2015).
- [9] 水田 洋: 磁性流体界面波動の解析評価; 日本流体力学会年会 2015 講演論文集, 109 (2015).