

群環に関する Formanek の方法の拡張 (An extension of Formanek's method for group rings)

岡山商科大学・経営学部 西中恒和 (Tsunekazu Nishinaka)
Department of Business Administration
Okayama Shoka University

環 R は、忠実な既約 (右) R 加群が存在するとき、(右) 原始環 (a right primitive ring) であると言われる。有限次元代数であるような環においては原始環は単純環に一致する。一般に、単純環は原始環であり、原始環は半原始環 (半単純環) である。環 R が体 K 上の群 G の群環 KG のとき、 KG の原始性は G が非可換無限群の場合にのみ現れる。Formanek により (非可換) 自由群の群環の原始性が示されて以来、(非可換) 自由群を部分群として含む、自由群に近い群の群環の多くは原始環であろうと予想されてきているが、まだ多くは知られていない。

ここでは、自由群の群環の原始性を導く際に Formanek により導入された方法を自由群に近い群に対する群環へも適用できるよう拡張を試みる。その際、グラフ論的考察が重要な役割を演じる。この拡張により、局所自由群 (locally free groups) や自由群の昇鎖 HNN 拡大 (ascending HNN extensions of free groups) の群環の原始性が導かれ、振れ 1 関係子群 (one relator groups with torsion) の群環の原始性が導かれることが期待される。

1 群環の原始性と Formanek の方法

R を (非可換) 環 ($\neq 1$) とする。忠実な既約右 R 加群が存在するとき、 R は右原始環 (a right primitive ring) であると言う。 R が右原始環であることと R に極大右 ideal で、自明でない R の両側 ideal を含まないものが存在するということは同値である。左原始環も同様に定義される。一般に右原始環は必ずしも左原始環ではないが、群環においては右原始環はいつでも左原始環となる。以下では右原始環を単に原始環と呼ぶ。

$J(R)$ を R の Jacobson radical とする。 $J(R) = 0$ のとき、 R は半原始 (semiprimitive) 或は半単純 (semisimple) と呼ばれる。原始環は半原始環である。 R が自明でない ideal を持たないとき、 R は単純 (simple) であると言う。単純環は原始環である。Artin 的な環 (例えば、体上有限次元代数) では原始環は単純環に一致し、この場合、単純環は斜体上の行列環に同型であり、半原始環 (Artin 的半原始は単に半単純と呼ばれることがある) はそれら行列環の有限直和に同型である (Wedderburn-Artin Theorem)。

さて、以下において、 KG で群 G の体 K 上の群環 (the group ring of G over K) を表すこととする。群環の原始性を示すにあたり Formanek [3] により導入された以下の方法がしばしば用いられてきた (例えば、[5], [6], [1], [7])。

Formanek's Method G を無限群, K を体とし、 $|K| \leq |G|$ を満たしているとする。 X を集合で、 G と同じ濃度を持つものとし (i.e., $|X| = |G|$), ψ を X から $KG \setminus \{0\}$ への全単射とする。このとき、任意の $x \in X$ に対して、ある零でない元 $\varepsilon(x)$ が $\psi(x)$ で生成される KG のイデアル $KG\psi(x)KG$ に存在して、すべての $\varepsilon(x) + 1$ で生成される右イデアル $\rho = \sum_{x \in X} (\varepsilon(x) + 1)KG$ が $\rho \neq KG$ を満たすならば、 KG は原始である。

G が自明でない2つの群 A, B の自由積, $G = A * B$ とする。ただし、 $G \neq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ とする。このとき、 $g \in G$ に対して、 g の先頭が A の元で後尾が B の元となっているき、 g を type AB と定め、type AA, BA, BB も同様に定める。

Formanek は [3] において、 $|A| \geq |B|$ に対し、 $|A|$ が無限のとき、 $X = A \setminus \{1\}$, $|A|$ が有限のとき、 $X = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ として、 KG の原始性を示すため、以下のように $\varepsilon(x)$ を構成した。

i) A が無限群の場合

単位元でない B の元 b を1つ選び、固定する。 $x \in A \setminus \{1\}$ に対して、 $m(x)$ を G の元で $\psi(x)$ の support の中で長さが最大なものとする。

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} a\psi(x)b + ba\psi(x) & \text{if } m(x) \text{ が type } BA \text{ か } m(x) = 1 \\ ab\psi(x)b + bab\psi(x) & \text{if } m(x) \text{ が type } AA \\ bab\psi(x) + ab\psi(x)a & \text{if } m(x) \text{ が type } AB \\ ba\psi(x) + a\psi(x)a & \text{if } m(x) \text{ が type } BB \end{cases}$$

ii) A が有限群の場合

単位元でない B の元 b を1つ及び、単位元でない A の異なる2元 a, a' を選び固定する。 $x \in \mathbb{N}$ に対して、 $m(x)$ を G の元で $\psi(x)$ の support の中で長さが最大なものとする。

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} (ab)^x a' \psi(x) b + b(ab)^x a' \psi(x) & \text{if } m(x) \text{ が type } BA \text{ か } m(x) = 1 \\ (ab)^x a' b \psi(x) b + b(ab)^x a' b \psi(x) & \text{if } m(x) \text{ が type } AA \\ (ab)^x a' b \psi(x) a + b(ab)^x a' b \psi(x) & \text{if } m(x) \text{ が type } AB \\ (ab)^x a' \psi(x) a + b(ab)^x a' \psi(x) & \text{if } m(x) \text{ が type } BB \end{cases}$$

以上のように構成された $\varepsilon(x)$ に対して、 $\rho = \sum_{x \in X} (\varepsilon(x) + 1)KG \neq KG$ であることが、i), ii) それぞれの場合に、support の長さの考察によって示される。

群 G の元の長さについての議論は G が群の自由積、特に自由群の場合には有効に働くが、一般の群に対しては多く場合有効ではない。そこで、イデアルの生成元の support に対して、元の長さに代わる別の議論を準備し、Formanek の方法の拡張を試みる。

2 グラフ論的考察

前節で紹介した Formanek の方法を用いる際に、 ρ をどのように構成すればよいか、即ち、どのような元 $\varepsilon(x)$ をイデアル $KG\psi(x)KG$ から選べばよいか問題となる。 ρ の元 r は

$$r = \sum_{t=1}^n (\varepsilon(x_t) + 1)v_t, \quad v_t \in KG \setminus \{0\}$$

と表され、任意の元 $r \in \rho$ に対して $r \neq 1$ となるよう各 $\varepsilon(x_t)$ を選ばなければならない。ここで、 $\varepsilon(x_t)$ 及び v_t は G の元 f_{ti}, g_{ti} たちの K 上の線形結合で表わされる。従って、 $\varepsilon(x_t)$ の support f_{ti} たちは G の任意の有限個の元 g_{tj} たちに対して、

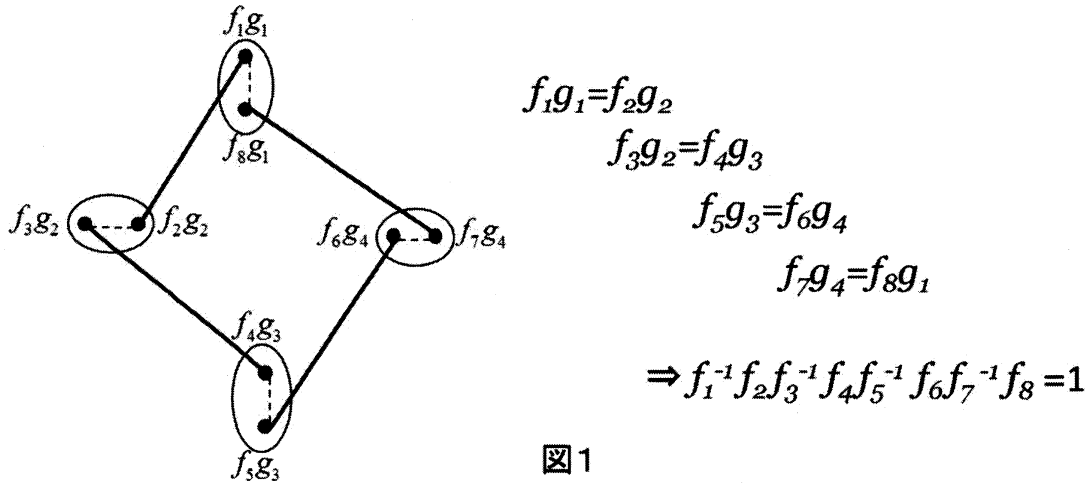
$$r = \sum_t \left(\sum_{i,j} \alpha_{ti} \beta_{tj} f_{ti} g_{tj} + \sum_j \beta_{tj} g_{tj} \right) \neq 1 \quad (\alpha_{ti} \neq 0, \beta_{tj} \neq 0)$$

を満たさなければならない。反対に

$$r = \sum_t \left(\sum_{i,j} \alpha_{ti} \beta_{tj} f_{ti} g_{tj} + \sum_j \beta_{tj} g_{tj} \right) = 1 \quad (\alpha_{ti} \neq 0, \beta_{tj} \neq 0)$$

のとき、 $\varepsilon(x_t)$ の support f_{ti} たちに対して何が言えるかをグラフ論的に考える。

グラフをどのように適用するかを見るために、 KG の元 u, v が $uv = 0$ を満たしていると仮定しよう。 u, v が相異なる f_i たち、 g_j たちによって $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, v = \sum_{j=1}^m \beta_j g_j$ ($\alpha_i \neq 0, \beta_j \neq 0$) と表わされているとする。このとき、 $\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f_i g_j = 0$



であり、どの $f_i g_j$ に対しても少なくとも1つの他の $f_p g_q$ が存在して、 $f_i g_j = f_p g_q$ を満たしていなければならない。今、仮に、 $f_1 g_1 = f_2 g_2, f_3 g_2 = f_4 g_3, f_5 g_3 = f_6 g_4, f_7 g_4 = f_8 g_1$ となっているとする。このとき、これらはある種のサイクルをなしていることがで

き (図 1 参照)、 $f_1^{-1}f_2f_3^{-1}f_4f_5^{-1}f_6f_7^{-1}f_8 = 1$ なる関係式が導かれる。これは u の support f_i たちに対する 1 つの情報を与えている。始めに、 $f_1, \dots, f_8$ が上の関係式を満たさないよう選ばれていると、背理的に $uv \neq 0$ と結論できる。さて、この状況をグラフを用いて以下のように表現する (グラフ理論の基本的事項は [2] を参照する)。頂点集合を $V = \{f_i g_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ とし、2 つの頂点、 $v = f_i g_j, w = f_p g_q$ に対して、 $v = w$ のとき $vw \in E, j = q$ のとき $vw \in E'$ として 2 つの辺集合 E, E' を定め、1 つの頂点集合 V と 2 つの辺集合 E, E' からなるグラフ $\mathcal{R} = (V, E, E')$ を考える。 $v_1 = f_1 g_1, v_2 = f_2 g_2, v_3 = f_3 g_2, v_4 = f_4 g_3, v_5 = f_5 g_3, v_6 = f_6 g_4, v_7 = f_7 g_4, v_8 = f_8 g_1$ とすれば、 $\mathcal{R}$ において上の関係式は $v_1 e_1 v_2 e'_1 v_3 e_2 v_4 e'_2 v_5 e_3 v_6 e'_3 v_7 e_4 v_8 e'_4 v_1$ と表わされ、 E と E' の辺で交互に結ばれた $\mathcal{R}$ におけるサイクルをなしている。

以上のような方法をより一般的状況に適用できるように、以下のように R-グラフ (relay-like graph)、及び、R-サイクルを定義する (ここで与える定義は [8] で与えられている定義を一般化しようとするものであり、[8] の定義とは若干異なっている)。

定義 1 (R-graph) V を頂点集合、 E, E^* を辺集合とし、 $\mathcal{G} = (V, E), \mathcal{G}^* = (V, E^*)$ を同じ頂点集合 V をもつ単純グラフとする。 $v \in V$ に対し、 $U(v)$ を v の $\mathcal{G}^*$ での近傍と v 自身からなる集合とし、 $U(v) = \{w \in V \mid vw \in E^*\} \cup \{v\}$ 、 v の R-近傍と呼ぶ。 $\mathcal{R} = (V, E, E^*)$ が以下の条件 (R) を満たすとき $\mathcal{R}$ を R-グラフ (R-graph) と定義する。

(R) $v \in V$ 及び $\mathcal{G}$ の連結成分 C に対して $v \in C \implies U(v) \cap C = \{v\}$

大雑把に言って、R-グラフとは二つの異なる辺、例えば実線と破線を辺として持つグラフで、ただ一つの破線を含む閉路が存在しないグラフである (図 2 参照)。

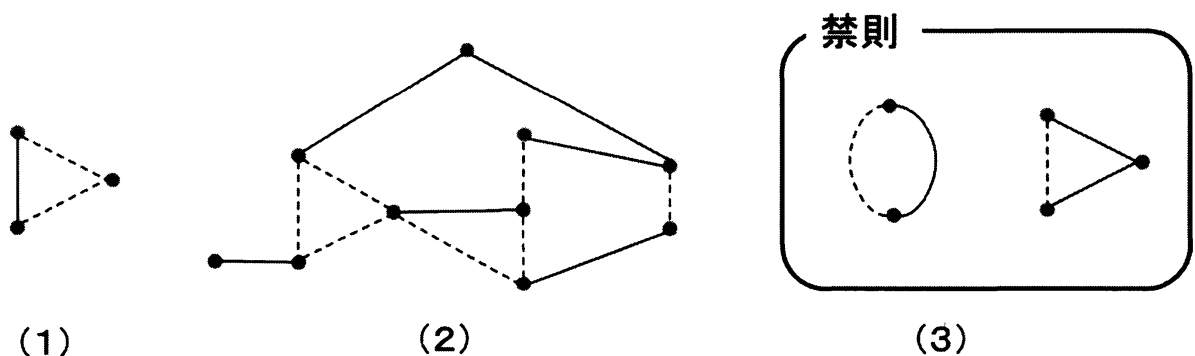


図 2: R-グラフの例、(1)、(2): 自明でない R-グラフ、(3): R-グラフが含まないグラフ

一般にグラフ理論においてどのようなグラフがサイクルや回路をもつかが問題とされる。

上で定義した R-グラフ $\mathcal{R} = (V, E, E^*)$ において R-cycle を以下のように定義し、どのような R-グラフが R-cycle を持つかを考える。

定義 2 (R-cycle) $\mathcal{R} = (V, E, E^*)$ を R-グラフ、 $\mathcal{G} = (V, E)$, $\mathcal{G}^* = (V, E^*)$ とする。 $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ を $\mathcal{G}$ の相異なる頂点からなる k 個のパス (path) の列とし、 v_i, w_i をそれぞれパス π_i の始点と終点とする。

- (1) $w_1v_2, w_2v_3, \dots, w_{k-1}v_k \in E^*$ のとき π を長さ k の R-path と呼ぶ。
- (2) 長さ k の R-path π が $w_kv_1 \in E^*$ を満たすとき、 π を長さ k の R-cycle と呼ぶ。

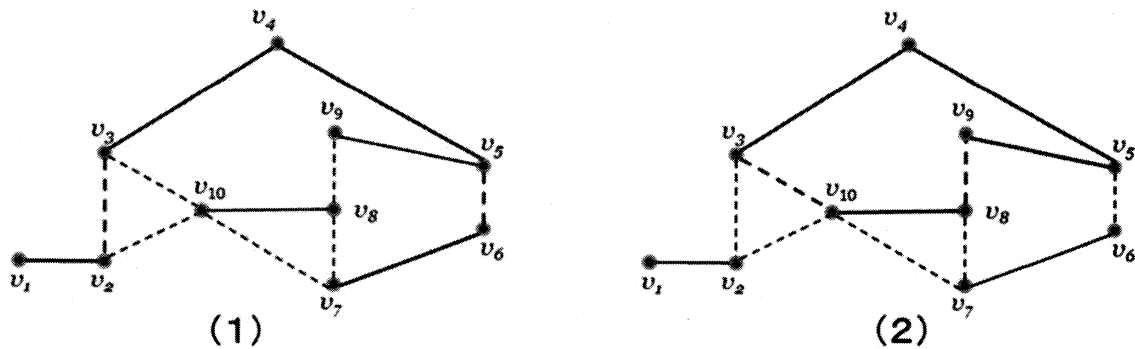


図3: R-path, R-cycle の例、(1): $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7$: R-path、(2): $v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9v_{10}v_3$: R-cycle

E と E^* の辺を区別せず、 $E' = E \cup E^*$ を辺とするグラフ $\mathcal{G}' = (V, E')$ を考えると、 $\mathcal{R}$ における R-cycle は $\mathcal{G}'$ における cycle となっており、従て、 $\mathcal{G}'$ に cycle が存在しないとき、 $\mathcal{R}$ には R-cycle は存在しない。しかし、容易に分かるように $\mathcal{G}'$ に cycle が存在しても必ずしも $\mathcal{R}$ に R-cycle が存在するとはかぎらない (図 4 参照)。

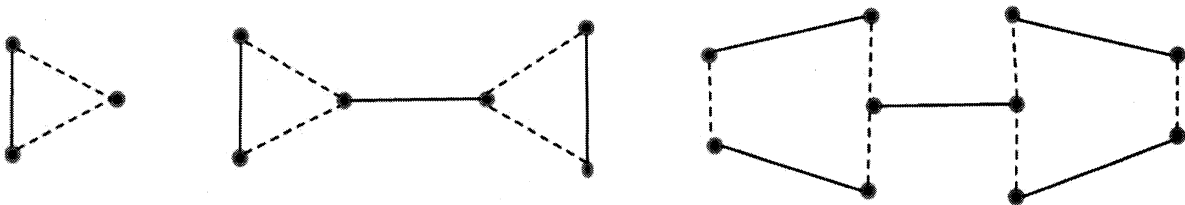


図4: R-cycle の存在しない例

V の部分集合 W で生成される部分グラフに cycle が存在すれば、元のグラフにおいても cycle は存在する。R-cycle の存在を部分グラフに探す場合、 $W \cap C \neq \emptyset$ を満たす $\mathcal{G}$ の連結成分 C が W で生成される部分グラフにおいても連結であるようにしておくことが有用である。そこで、R-グラフ $\mathcal{R}$ において R-部分グラフを以下のように定義する。

定義 3 (R-subgraph) $\mathcal{R} = (V, E, E^*)$ を R-グラフ、 $\mathcal{G} = (V, E)$, $\mathcal{G}^* = (V, E^*)$ とする。 $W \subseteq V$ に対して、 E_W, E_W^* を以下のように定める。

$$\begin{aligned} E_W &= \{ww' \mid w, w' \in W \text{ and either } ww' \in E \\ &\quad \text{or } ww_1 \cdots w_m w' \text{ is a path in } \mathcal{G} \text{ for some } v_i \in V \setminus W\}, \\ E_W^* &= \{ww' \mid w, w' \in W \text{ and } ww' \in E^*\}. \end{aligned}$$

このとき、 $\mathcal{R}_W = (W, E_W, E_W^*)$ は R-グラフであり、 W で生成される R-部分グラフ (R-subgraph generated by W) と呼ぶ。

E_W^* は単に W で生成される $\mathcal{G}^*$ の部分グラフであり、 E_W は C が $\mathcal{G}$ における連結成分で $C \cap W \neq \emptyset$ のとき、 $C \cap W$ も $\mathcal{G}_W = (W, E_W)$ における連結成分となることを意味している (図 5 参照)。

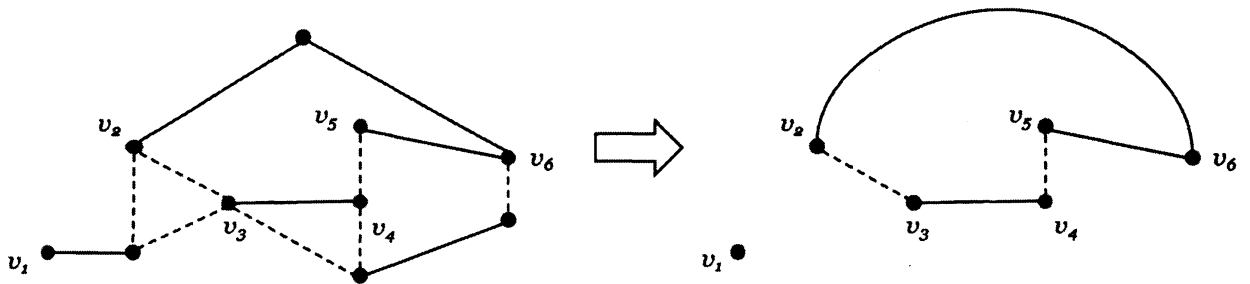


図 5: $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ で生成される R-部分グラフ

サイクルや回路の存在はグラフの連結成分での存在に帰着される。R-グラフにおいて R-cycle の存在は以下の R-連結成分における R-cycle の存在に帰着される。

定義 4 (R-connected) R-グラフ $\mathcal{R} = (V, E, E^*)$ の頂点 $v, w \in V$ が単純グラフ $\mathcal{G}' = (V, E \cup E^*)$ において連結しているとき、 v と w は R-連結 (R-connected) という。 $\mathcal{G}'$ の連結成分を $\mathcal{R}$ の R-連結成分 (R-component) という。 $\mathcal{R}$ が 1 つの R-連結成分からなるとき、 $\mathcal{R}$ を R-連結という。

さて、以下において $\mathcal{R} = (V, E, E^*)$ を R-グラフ、 $\mathcal{G} = (V, E)$, $\mathcal{G}^* = (V, E^*)$, $\mathfrak{U}$ を R-近傍の全体、即ち、 $\mathfrak{U} = \{U(v) \mid v \in V\}$ とし、 $U(v) \in \mathfrak{U}$ に対して、 $U^\circ(v) = U \setminus \{v\}$ とする。即ち、 $U^\circ(v)$ は v の隣接点の集合である。 $\mathcal{G}^*$ において V の連結成分 W たちの集合を $\mathfrak{C}(V)$ とする。このとき、 $V = \bigcup_{W \in \mathfrak{C}(V)} W$ である。 $W \in \mathfrak{C}(V)$ 、 $\mathcal{G}$ の連結成分 C に対して、 $W \cap C \neq \emptyset \implies |W \cap C| = 1$ を満たすとき、 $\mathfrak{C}(V)$ を $\mathcal{R}$ の R-色彩 (R-colouring)、あるいは $\mathcal{R}$ を R-色彩 R-グラフと呼ぶ。このとき、特に、 $\mathfrak{C}(V)$ は $\mathcal{G}$ の色彩となっている。

$W \in \mathfrak{C}(V)$ 、 $v, v' \in W$ に対して、 $U^o(v) = U^o(v')$ のとき、 $v \simeq v'$ と定めれば、 $\simeq$ は W における同値関係となる。 $\mathfrak{c}(W) = \{W_1, \dots, W_l\}$ を $\simeq$ による W の同値類全体の集合とする。容易に分かるように、 $v, w \in W_i \implies w \notin U^o(v)$ であり、 $W_j \cap U^o(v) \neq \emptyset \implies W_j \subseteq U^o(v)$ なので、従って、

$$v \in W_i \implies \exists S \subseteq \mathfrak{c}(W) \setminus \{W_i\}, \quad U^o(v) = \bigcup_{W_j \in S} W_j. \quad (2.1)$$

定義 5 (RCP graph, RC graph) $\mathcal{R} = (V, E, E^*)$ において、 $\mathfrak{C}(V)$, $\mathfrak{c}(W) = \{W_1, \dots, W_l\}$ ($W \in \mathfrak{C}(V)$) を上で定めたものとする。

(1) $\mathcal{R}$ が次の条件

$$W \in \mathfrak{C}(V), W_i \in \mathfrak{c}(W), v \in W_i \implies U^o(v) = W \setminus W_i \quad (2.2)$$

を満たすとき、 $\mathcal{R}$ は RCP グラフ (R-complete partite graph) であるという。

(2) RCP グラフ $\mathcal{R}$ が

$$W \in \mathfrak{C}(V), W_i \in \mathfrak{c}(W) \implies |W_i| = 1 \quad (2.3)$$

を満たすとき、 $\mathcal{R}$ は RC グラフ (R-complete graph) であるという。

(2.2) は (2.1) において、 $S = \mathfrak{c}(W) \setminus \{W_i\}$ となっている場合であり、(2.3) は (2.2) の極端な場合である。 $\mathcal{R}$ が RCP 或は RC であるということは、 $\mathcal{G}^*$ がそれぞれ完全 k -部グラフ (complete k -partite graph)、完全グラフ (complete graph) であることということで特徴づけられる。

主張 1 以下は同値な命題である。

- (1) $\mathcal{R}$ は RCP である。
- (2) $\mathcal{G}^*$ は完全 k -部グラフ (complete k -partite graph) である。

主張 2 以下は同値な命題である。

- (1) $\mathcal{R}$ は RC である。
- (2) $\mathcal{G}^*$ は完全グラフ (complete graph) である。

RC グラフは R-色彩であるが、RCP グラフは、一般には R-色彩ではない。以下のことが容易に分かる。

主張 3 RCP グラフ $\mathcal{R}$ において、以下は同値である。

(1) $\mathcal{R}$ は R-色彩である。

(2) $U \in \mathcal{U}$ 、 $\mathcal{G}$ の連結成分 C に対して、 $U \cap C \neq \emptyset \implies |W \cap C| = 1$ 。

さて、 $\mathfrak{N} = \{U \in \mathcal{U} \mid |U| = 1\}$ 、 $\mathfrak{L} = \{U \in \mathcal{U} \mid |U| > 2\}$ とする。RC グラフ $\mathcal{R}$ に対して、以下の結果が得られる（証明は本質的に [8, Theorem 24] の証明と同様に行われる）。

定理 1 $\mathcal{R}$ を RC グラフとする。

(1) 以下の (i), (ii) は同値である。

(i) $\mathcal{R}$ は R-cycle を持つ。

(ii) R-部分グラフ $\mathcal{R}_W = (W, E_W, E_W^*)$ が存在して、 $|W| - |\mathcal{U}_W| - \omega + 1 > 0$ 、

ここに、 ω は $\mathcal{G}_W$ の連結成分の数である。

(2) $|\mathfrak{L}| \geq |\mathfrak{N}| \implies \mathcal{R}$ は R-cycle を持つ。

$\mathcal{C}(V) = \{V_1, \dots, V_n\}$ とし、各 V_i に対して、 $\mathcal{G}^*(V_i, E_{V_i}^*)$ を完全 k 部グラフ： $\simeq K_{m_1, \dots, m_k}$ とする。更に、 $m(V_i)$ を $m_1, \dots, m_k$ の内で最大の数、 $I(V)$ を $\mathcal{G}$ の孤立点の数とする。このとき、RCP グラフ $\mathcal{R}$ に対して次の結果が得られる（証明は本質的に [8, Theorem 19] の証明と同様に行われる）。

定理 2 $\mathcal{R}$ を RCP グラフとし、 $n > 1$ とする。任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して、 $|V_i| > 2m_i$ のとき、

$$|I(V)| \leq n \implies \mathcal{R} \text{ に R-cycle が存在する。}$$

上の定理 2 において、条件 $|V_i| > 2m_i$ は必要である。図 6 は、 $n = 4$ で $I(V) = 4$ であるが、 $|V_2| = 2m_2 = 4$ 、 $|V_3| = 2m_3 = 4$ となっており、R-cycle が存在しない RCP グラフの例である。

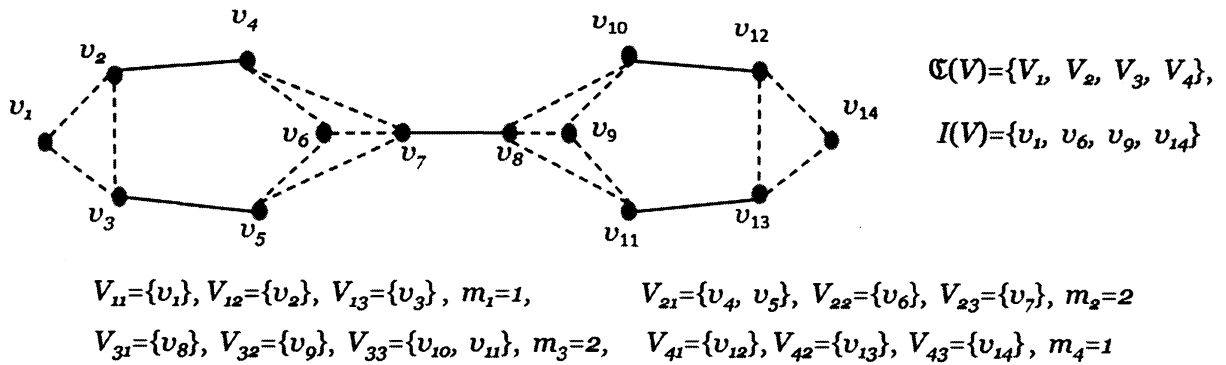


図 6: R-cycle の存在しない RCP グラフ の例

3 Formanek の方法の拡張

前節の定理 1、定理 2 から群環の原始性に関して次の結果が得られる（証明のエッセンスは [8, Theorem 1] の証明で展開されている）。

定理 3 G を無限群、 KG を体 K 上の群環とする。 G が以下の (1), (2) を満たせば、 KG は原始環である。

(1) G の部分群 H で $|H| = |G|$ を満たす自由群 H が存在する。

(2) G の任意の有限個の元 $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n$ に対して、 G の元 x_1, x_2, x_3 で以下の (i), (ii) (iii) を満たすものが存在する。

(i) $\langle x_i, g_j \rangle$ は階数 2 の自由群である、

(ii) $f_i x_j g_k x_j = f_l x_s g_t x_s \iff (i, j, k) = (l, s, t)$,

(iii) $\prod_{t=1}^s (x_{l_t} g_{i_t} x_{l_t})^{-1} (x_{n_t} g_{j_t} x_{n_t}) = 1 \implies \exists t, n_t = l_{t+1} \text{ or } (l_t, i_t) = (n_t, j_t)$.

特に、 G が可算無限のとき、 G が (2) を満たせば KG は原始環である。

上の定理 3 において、体の濃度に関する条件 $|K| \leq |G|$ が必要とされていないことに注意する。さて、定理 3 を用いて、1 節で紹介した Formanek [3] の定理の別証明を得ることができる。

系 1 ([3, Theorem 5]) G が自明でない 2 つの群 A, B の自由積、 $G = A * B$ とする。ただし、 $G \neq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ とする。このとき、任意の体 K に対して、 KG は原始である。

証明 $G \neq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ なので ($G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ のとき、 G は無限 2 面体群であり、 KG は原始ではない)、 $|A| \geq |B|$, $|A| \geq 3$, $|B| \geq 2$ としてよい。

A が無限群のとき、 A の部分集合 $S = \{a_{1i}, a_{2i} \mid i \in I\}$ で、 $|I| = |A|$ かつ $i \neq j \text{ or } s \neq t \implies a_{si} \neq a_{tj}^{\pm 1}$ を満たすものが存在する。 $1 \neq b \in B$ に対して、 $h_i = a_{1i} b a_{2i}$, $i \in I$ とし、 $H = \langle h_i \mid i \in I \rangle$ とすれば、 H は定理 3 (1) を満たす G の部分群である。 h_i たちから相異なる可算無限個の $h_1, h_2, \dots$ を選び、 $y_i = \prod_{k=1}^i h_k$ とする。 G の元 $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n$ に対して、それぞれの既約表示の長さの最大値を p とし、 $x_i = y_{p+i} b y_{p+i}$, $i = 1, 2, 3$ とすれば、 x_1, x_2, x_3 は定理 3 (2) を満たす。

A が有限群のとき、 G は可算無限群である。 $|A| \geq 3$ なので、 $a \neq 1$, $a' \neq 1$, $aa' \neq 1$ を

満たす $a, a' \in A$ が存在する。このとき、 $1 \neq b \in B$ に対して、 $h_i = (ab)^{2i}a'(ab)^{2i}$, $i \in \mathbb{N}$ とし、 $H = \langle h_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ とすれば、 H は定理 3 (1) を満たす G の部分群である。 G の元 $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n$ に対して、それぞれの既約表示の長さの最大値を p とする。 $y_i = \prod_{k=1}^{p+i} h_k$ とし、 $x_i = y_i(ab)y_i$ すれば、 x_1, x_2, x_3 は定理 3 (2) を満たす。

定理 3 より、任意の体に対して、 KG は原始である。(証明終)

局所自由群の群環の原始性に関して次の結果が示される。

系 2 ([8, Corollary 30]) G を非可換自由群の昇鎖和となっている局所自由群とする。このとき、任意の体 K に対して、 KG は原始である。特に可算無限の局所自由群の群環は原始である。

証明 G が定理 3 の (1), (2) を満たすことを示す。

$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots$ を自由群の昇鎖列とし、 $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ とする。まず、定理 3 (1) を満たす G の部分群 H が存在することを示す。任意の i に対して $|F_i|$ が高々可算無限であるか、或は、ある i で $|F_i|$ が最大となっているとき、そのような H が存在することは明らかなので、 $|F_i|$ に上限がない場合を考えれば十分である。この場合、任意の i に対して $|F_i| < |F_{i+1}|$ としてよい。 F_i の任意の元は F_{i+1} の有限個の元の積となっているので、それぞれの F_{i+1} は $F_{i+1} = N_{i+1} * H_{i+1}$ と表される。ここに、 N_{i+1} と H_{i+1} はともに F_{i+1} の自由部分群であり、 $F_i \subseteq N_{i+1}$ かつ $|F_{i+1}| = |H_{i+1}|$ を満たすものである。このとき、 $H = H_2 * H_3 * \dots$ とすれば、 H は定理 3 (1) を満たす。

さて、 G は局所自由群なので、 G の元 $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n$ に対して、それらすべてを含む (非可換) 自由部分群 H が存在する。 X を H の基底とすれば、 $|X| \geq 2$ である。 $y \neq z$ なる $y, z \in X$ に対して、 $x_i = y^{p+i}zy^{p+i}$ とする。ただし、 $p = 2q$ で q は $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n$ のそれぞれを既約語として表示したときの長さの最大値である。このとき、 x_1, x_2, x_3 は定理 3 (2) を満たす。(証明終)

参考文献

- [1] B. O. Balogun, *On the primitivity of group rings of amalgamated free products*, Proc. Amer. Math. Soc., 106(1)(1989), 43-47
- [2] J. A. Boundy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Application* Macmillan, London, Elsevier, New York, 1979.

- [3] E. Formanek, *Group rings of free products are primitive*, J. Algebra, **26**(1973), 508-511
- [4] E. Formanek and R. L. Snider, *Primitive group rings*, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 357-360
- [5] J. Lawrence, *The coefficient ring of primitive group ring* Canad. J. Math., **27**(3)(1975), 489-494
- [6] A. I. Lichtman, *The primitivity of free products of associative algebras* J. Algebra, **54**(1)(1978), 153-158
- [7] T. Nishinaka, *Group rings of proper ascending HNN extensions of countably infinite free groups are primitive*, J. Algebra, **317**(2007), 581-592
- [8] T. Nishinaka, *Group rings of countable non-abelian locally free groups are primitive*, to appear in Int. J. algebra and computation (2011),