

氏 名	かめ 山 敦
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	論 理 博 第 1369 号
学位授与の日付	平成 12 年 1 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 2 項 該 当
学位論文題目	Distances on topological self-similar sets and the kneading determinants (位相的自己相似集合上の距離関数とニーディング・ディターミナント)

論文調査委員 (主 査) 教授 河野 明 教授 西田孝明 助教授 國府寛司

論 文 内 容 の 要 旨

Cantor の 3 進集合や Sierpiński の gasket などの古典的な自己相似集合は, Euclid 空間におけるいくつかの相似写像の不変集合として理解される。Hutchinson と畑はそれを一般化して次のような定義を与えた。

定義 $F_i (i = 1, 2, \dots, N)$ を完備距離空間 X から X への縮小写像とすると, $K = \bigcup_{i=1}^N F_i(K)$ なる空でないコンパクト部分集合 K が唯一存在する。この K を自己相似集合と呼ぶ。

これは申請者および木上によりさらに次のように一般化された。

定義 $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ を記号 $1, 2, \dots, N$ からなる無限列の集合, $\tau_i: \Sigma \rightarrow \Sigma (i = 1, 2, \dots, N)$ を $w_1 w_2 \dots \mapsto i w_1 w_2 \dots$ なる写像とする。コンパクト Hausdorff 空間 K と連続写像 $F_i: K \rightarrow K (i = 1, 2, \dots, N)$ の組 $(K, \{F_i\})$ が topological self-similar system であるとは, 連続な全射 $\pi: \Sigma \rightarrow K$ が存在して $F_i \pi = \pi \tau_i (i = 1, 2, \dots, N)$ が成り立つこととし, K を位相的自己相似集合と呼ぶ。 π は $(K, \{F_i\})$ の coding map と呼ばれる。

このように抽象的に作られた位相的自己相似集合 K が具体的に「実現」できるかというのは自然な問いである。これに対する一つの試みとして参考論文 2, 3 では, K がある有理関数の Julia 集合と同相になる条件を与えている。主論文ではこれとは別のアプローチを取る。次のように問題を定式化する。

問題 1 与えられた topological self-similar system $(K, \{F_i\})$ に対し, K 上に距離関数 d を構成して各 F_i を d に関して縮小写像になるようにできるか? (このような距離 d のことを self-similar metric という。)

先行する結果として参考論文 1 では, そのような距離関数が存在したときの各 F_i の Lipschitz 定数が満たすべき条件について論じた。主論文の 3 つの節においてはそれぞれ次のことを論じている。

第 1 節では論文全体を通して使われることになる重要な道具である標準的擬距離を定義し, その基本的な性質を示す。すなわち topological self-similar system $(K, \{F_i\})$ が与えられているとき, $0 < \alpha_i < 1$ となる実数の組 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ に対し K 上の特別な擬距離 D_α を構成する。 $D = D_\alpha$ は次の性質を持っている。

1. D が距離ならば D から決まる位相は K の元の位相と同じである。
2. D に関する Lipschitz 定数 $\text{Lip}_D(F_i)$ は α_i 以下, すなわち $D(Fx, Fy) \leq \alpha_i D(x, y) (i = 1, 2, \dots, N)$ 。
3. self-similar metric d が存在すれば, d に関する Lipschitz 定数より大きい α について $(\text{Lip}_d(F_i) \leq \alpha_i < 1$ となる $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ について) D_α は距離になる。

性質 1 と 2 から, もし D が距離ならばそれは self-similar metric になることがわかる。逆に性質 3 から self-similar metric が存在するならば D が距離になる。従って問題 1 は D がいつ距離になるかという問題に帰着される。第 1 節ではまた self-similar metric が存在しないような K の例を構成し, さらに, 任意の α に対して D_α が距離になることと, K が完全不連結であることが同値であること, 従ってその時には常に self-similar metric が存在することも示した。

第 2 節では self-similar metric が存在するための十分条件として次のような定理を証明した。

定理 finitely ramified self-similar system $(K, \{F_i\})$ が non-recurrent ならば, それは self-similar metric を持つ。

$(K, \{F_i\})$ には critical set と呼ばれる K の部分集合 C が定まり、 $(K, \{F_i\})$ の挙動はほぼ C によって決まってしまう。その意味で self-similar set は 1 次元力学系と共通するところが多い。さらに $(K, \{F_i\})$ が finitely ramified であれば、 C はある種の有限性を持つので 1 次元力学系に一層似てくる。その立場で見ると self-similar metric を持つという性質は力学系の双曲性に対応していると考えられる。実際、1 次元力学系において non-recurrence が双曲性を導くという結果があるが、上の定理はそれらと密接に関係している。

第 1 節と第 2 節では問題 1 について調べたが、第 3 節では上に示した標準的擬距離 D の性質 3 から浮かび上がる新たな問題について考察する。性質 3 より D が距離になるような α と距離にならないような α の境界では興味深い現象が起こっていることが期待できる。この境界上の α を critical polyratio と呼ぶ。

問題 2 critical polyratio の集合はどんな集合か?

適当な条件の下で、これは tree 上の力学系の問題に帰着される。 K の部分集合として tree T をとり、その上で各 F_i の Lipschitz 定数がみたすべき関係式を記述することができる。Milnor と Thurston は区間力学系に対し kneading determinant と呼ばれる (1 変数) 正則関数を定義し、力学系の entropy は kneading determinant の零点を使って表せることを示した。この理論を拡張し、 T 上の力学系に対して多変数 kneading determinant Δ を構成する。この状況で次のことが示される。critical polyratio は Δ の零点であり、特に critical polyratio の集合は real analytic set になっている。これより自然に critical polyratio と entropy との関連もわかる。すなわち $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N$ という条件のもとで critical polyratio $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ を考えると $-\log \alpha_i$ が entropy と一致する。

論文審査の結果の要旨

Hutchinson と畑は古典的な自己相似集合の概念を一般化して自己相似集合を完備距離空間上の縮小写像の不変集合ととらえその性質を研究した。また自己相似集合上の解析学の研究などにおいて自己相似集合の概念はさらに一般化され、記号力学系を使った定義が与えられた。これを位相的自己相似集合と呼ぶ。このような状況で、抽象的に定義された位相的自己相似集合は何らかの意味で適当な空間の中に実現可能か、という問題が自然にうかびあがってくる。

これは力学系の研究という視点から見ると、(例えば多様体上の拡大的な) 力学系の不変集合であって記号力学系と半共役なものを記号列の言葉で特徴付けよ、という問題とみなすことができる。このような問題は fractal 集合の幾何的・解析的研究においても、自己相似集合を取り扱いやすくする手法の開発という意味でこれからの研究の基礎となる重要な問題である。申請者はこの問題に様々な角度から取り組み、独創的な成果をあげている。

主論文で申請者は、この問題に取り組むための一つのステップとして次の問題を提起した。

問題 1 与えられた位相的自己相似集合に距離関数を構成して、自己相似集合にすることはどのような場合に可能か。(このような距離関数を self-similar metric と呼ぶ)

この問題の解答は自明ではなく、興味深い構造を持っていることが、主論文に示された self-similar metric を持たないような例や self-similar metric を持つための十分条件からうかがえる。自己相似集合の上に距離関数を構成するという結果はこれまでもないわけではないが、主論文における申請者の結果はそれを大幅に一般化するものであり、この分野の研究に新しい重要な視点と手法を提供するものであると考えられる。

特に問題 1 に取り組むための主要な道具として構成された、位相的自己相似集合上の標準的擬距離は注目に値する。標準的擬距離は与えられた polyratio に応じて定まり、self-similar metric の存在の指標となるものである。本研究における self-similar metric に関する結果はすべてこの標準的擬距離の性質から巧みな方法で証明されている。また、この標準的擬距離は極めて自然な仕方で構成されているので、自己相似集合に関する他の研究、たとえば fractal 上の解析学や Hausdorff 次元の計算などに応用されることも期待できる。

一方、主論文で申請者は標準的擬距離の研究から新しい問題を提起している。標準的擬距離が距離になるところとならないところの境界の polyratio を critical polyratio といい、自己相似集合を特徴づける指標になっているが、それについて申請者は次のような問題を提起した。

問題 2 critical polyratio はどんな集合か。

この問題に関して申請者は Milnor-Thurston の理論を拡張し、あるクラスの自己相似集合に対して critical polyratio が

計算できることを示した。これは critical polyratio が具体的に関数で表せるという意味で興味深い結果であり、今後のより高度な研究に発展すると思われる。特に、1次元力学系の場合は位相的 entropy の一般化となっていることが示され、力学系の位相的 entropy と関係するという意味でも注目される。

参考論文の 2, 3 では、位相的自己相似集合を Julia 集合として実現するということに問題を制限し、これを論じている。典型的な fractal である自己相似集合と Julia 集合の間に深い関係があることを明らかにしており、高く評価できる。

以上のように申請者の業績は極めて独創性の高いものであり、主論文は博士（理学）の学位論文として十分な内容であると考え、合格と判定した。なお、申請者は課程を経ているので学識の確認を省略した。