

境界要素法による自由表面を有する流れの解析

東京大学 工学部 中山 司 (Tsukasa Nakayama)

1. はじめに

河川や海洋での水波、ダム堤体内の浸透流、地震によって加振される石油貯槽内の液体振動、波浪衝撃現象など、工学の分野において解析の対象となる自由表面を有する流れの問題は多い。これらの現象において工学上必要とされる物理量は、自由表面の変位や壁面に作用する動液圧、衝撃圧など、解析領域の境界におけるものである場合が多い。しかも、非圧縮ポテンシャル流れを仮定すると、支配方程式はラプラス方程式になり、境界要素法 (boundary element method) を用いて効率のよい解法を組立てることができる。

境界要素法は、場の支配方程式である微分方程式を積分方程式に変換し、これを有限要素法的手法により離散化して解く数値解法であり、グリーン関数論がその基礎となっている。そして、導かれた積分方程式は境界上での未知量しか含まない点が特徴である。

本論文では、孤立波を例にとり流体力学における非線形自由表面問題の境界要素解析について述べる。

2. 非定常自由表面問題の解析

§ 2.1 問題の設定

図 1 に示す二次元水槽内での孤立波の発生と伝播に関する数値シミュレーションを考える。水槽左端には造波装置としてピストンが設けられている。座標系 $o-x-y$ は水槽に固定された静止座標系とする。流体は非粘性、非圧縮、流れの場は非回転流れとすれば、支配方程式は二次元ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad ; V \text{内} \quad (1)$$

で与えられる。ここに、 V は流れの場を表わし、 ϕ は流体の絶対速度 U を用いて次のように定義された速度ポテンシャルである。

$$U = \text{grad } \phi \quad (2)$$

境界条件は次のように表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad ; S_1 \text{上} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = n_y \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad ; S_1 \text{上} \quad (4)$$

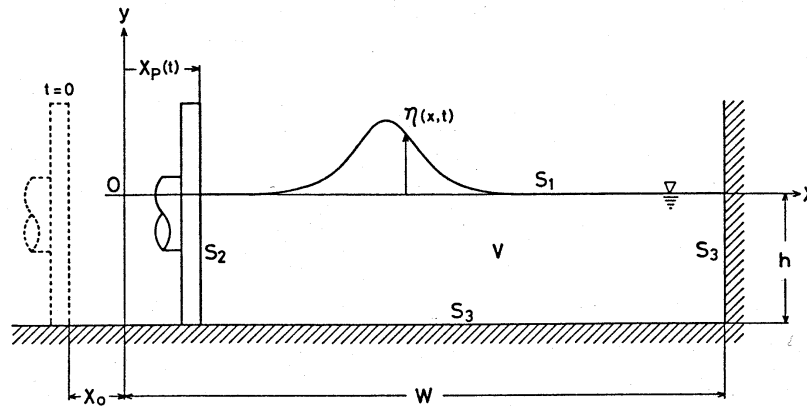


図1 二次元造波水槽

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = - \frac{d X_p}{d t} \quad ; S_2 \text{上} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad ; S_3 \text{上} \quad (6)$$

ここに、 S_1 は自由表面、 S_2 はピストン内壁面、 S_3 は水槽底及び右側壁を表す。
 t は時間、 $\eta(x, t)$ は静止水面より測った自由表面形状関数である。 n は境界上に立てた外向き法線を表し、 $n_y = \cos(n, y)$ は n の y 軸に対する方向余弦を表す。
 また、関数 $X_p(t)$ はピストンの変位関数である。

以上により、本問題はラプラス方程式(1)を境界条件(3)-(6)と適当な初期条件のもとで解く、非線形初期値境界値問題に帰着された。ここで、この問題の非線形性について言及しておきたい。この非線形性は自由表面上での境界条件式に起因するものであり、2種類ある。一つは境界条件(3)に含まれる速度二乗項 $\{(\partial \phi / \partial x)^2 + (\partial \phi / \partial y)^2\}$ による非線形性であり、もう一つは境界条件(3)と(4)を満たすべき自由表面境界の位置が未知であることによる非線形性である。

§ 2.2 境界積分方程式への変換

次の二次元グリーンの公式を考えよう。

$$\iint_V (\nabla^2 u - \nabla^2 v) dx dy = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (7)$$

ここに、 $S = S_1 + S_2 + S_3$ であり、 s は境界 S に沿って反時計まわりにまわる曲線座標である。また、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (8)$$

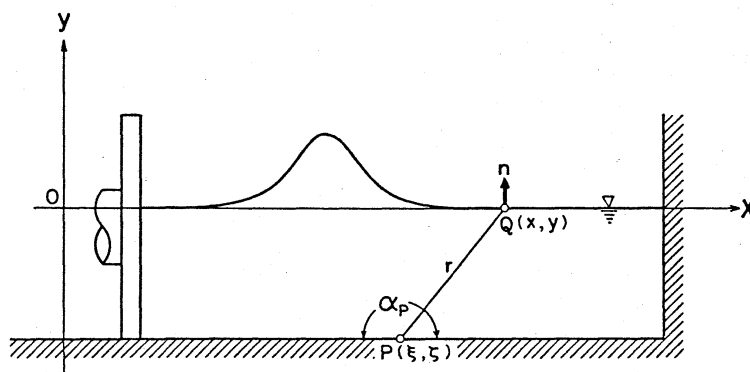


図2 境界上の2点PとQ

である。いま、領域 $V + S$ 内に任意の2点 $P(\xi, \zeta)$, $Q(x, y)$ をとり、2点間の距離を $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2}$ とする。そこで、関数 $u(x, y)$ として速度ポテンシャル ϕ をとり、関数 $v(x, y)$ として二次元ラプラス方程式の特解 $\ln(1/r)$ をとれば、 $r = 0$ の場合を除いて $\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$ が成り立つ。したがって、この $r = 0$ の場合の極限操作を含む若干の計算を行うと、式(7)より次のような関係式が導かれる¹⁾。

$$\alpha_P \phi_P + \oint_S \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds - \oint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \ln \frac{1}{r} ds = 0 \quad (9)$$

ここに、 ϕ_P は P における ϕ の値を表わす。 α_P は、図2に示すように P における境界の内角を表わし、 P において境界が滑らかである場合には $\alpha_P = \pi$ である。また、 P が領域 V 内にあるときには $\alpha_P = 2\pi$ である。積分記号に付した C は積分のコーシーの主値をとることを意味する。式(9)に境界条件(4)-(6)を代入すると、次のような ϕ と η に関する積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \alpha_P \phi_P + \oint_S \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds - \oint_{S_1} n_y \frac{\partial \eta}{\partial t} \ln \frac{1}{r} ds \\ + \oint_{S_2} \frac{dX_P}{dt} \ln \frac{1}{r} ds = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

次に、非線形境界条件(3)に対しては、まずこれを次の一組の連立方程式で置き換える。

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} + g\eta \quad (11a)$$

$$D = 0 \quad (11b)$$

ここに導入された D は誤差補正項 (error correcting term) と呼ばれ、計算誤差の蓄積によって数値解が発散するのを抑制する効果がある²⁾。 $\partial D / \partial t$ を後退差分

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{D(t_0 + \Delta t) - D(t_0)}{\Delta t} \quad (12)$$

で近似し、式(11b)の条件を考慮して $D(t_0 + \Delta t) = 0$ とおけば、

$$\frac{\partial D}{\partial t} = - \frac{D(t_0)}{\Delta t} \quad (13)$$

を得る。式(13)を代入した式(11a)の両辺に重み関数 $w(s)$ を乗じ、境界 S_1 に沿って積分すれば、次の重み付き残差方程式が導かれる。

$$\int_{S_1} w \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \{ n_y^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)^2 \} + g\eta + \frac{D(t_0)}{\Delta t} \right] ds = 0 \quad (14)$$

以上で支配方程式(1)と境界条件(3)-(6)は、 ϕ と η を未知量とする非線形積分方程式(10)と(14)に変換された。式(10)、(14)は境界上の線積分のみで構成されており、未知量は境界上にしか存在しないことに注目されたい。

§ 2.3 積分方程式の離散化

図3に示すように境界 S を多数の直線要素に分割する。次に、空間方向には選点法(collocation method)と x, y の一次の形状関数を用いる有限要素法を併用して離散化を行い、時間方向には差分法を用いて離散化を行う。こうして得られる非線形連立代数方程式は増分法(incremental method)により線形化される。すなわち、時刻 t_0 における ϕ と η の値を ϕ_0, η_0 とすれば、時刻 $t_0 + \Delta t$ におけるそれらの値 ϕ, η は t_0 と $t_0 + \Delta t$ の間の増分量 $\Delta \phi, \Delta \eta$ を用いて、

$$\phi = \phi_0 + \Delta \phi, \quad \eta = \eta_0 + \Delta \eta \quad (15)$$

のように表すことができる。 $\Delta \phi, \Delta \eta$ の二次以上の項は微小量と見なして無視するものとすれば、さきの非線形代数方程式は $\Delta \phi$ と $\Delta \eta$ に関する線形方程式に帰着される。この線形方程式を、時間を Δt ずつ進めながら、繰り返し解くことにより、造波現象の数値シミュレーションを行うことができる¹⁰⁾。

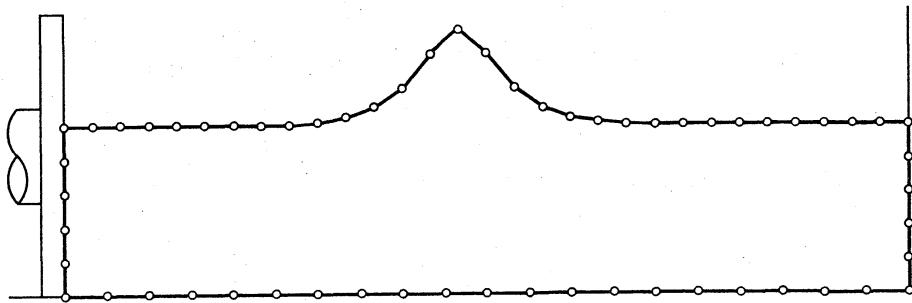


図3 境界の分割

§ 2.4 計算例

ピストンを

$$X_p(t) = X_0 \tanh [\omega(t-t_c)] \quad ; \quad 0 \leq t \leq T \quad (16)$$

に従って移動させると、孤立波を発生させることができる。 X_0 はピストンの半行程を表わし、 T はピストンを停止させる時刻である。 $0 \leq t \leq T$ は孤立波の発生過程に対応し、 $t > T$ は孤立波の伝播過程に対応する。 ω 、 t_c はピストンの動きの緩急を特徴づけるパラメータである。時刻 $t = 0$ において流体は静止しているものとして、次のように初期条件を設定する。

$$\phi = \eta = D = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad ; \quad t = 0 \text{ において} \quad (17)$$

図4は、孤立波の発生から伝播、反射の過程の計算結果を示したものである。横軸には静止水深 h で無次元化した座標 x/h をとり、縦軸には自由表面の無次元変位 η/h をとってある。縦軸の位置は各時刻でのピストン内壁面の位置に一致させてある。図中の▲印は、 $t = 0$ でのピストン内壁面の位置を示している。図4(a)はピストンが移動するにつれて孤立波が形成されていく様子を示しており、時刻 $t\sqrt{g/h} = 12.00$ において無次元波高 $A/h = 0.360$ の孤立波ができている。この時点でピストンは停止させた。図4(b)は、発生した孤立波が水槽内を伝播し、水槽右端の垂直壁を駆け上がる様子を示したものである。最高点に達した孤立波は、その後、図4(c)に示すように元の形状に戻り、逆方向へ再び伝播していく。

図5は、図4の $t\sqrt{g/h} = 12.00$ における孤立波の形状を、Boussinesqの理論形状と比較したものである。

図6は、孤立波の垂直壁へのかけ上がりの最大高さ R を波高 A に対してプロットしたものである。本解析の結果を○印で示し、これをChan and Street³⁾の差分法による計算値(◇印)およびCamfield and Street⁴⁾の実験値(・印)と比較している。実線はByatt-Smith⁵⁾が求めた近似理論解を示したものである。

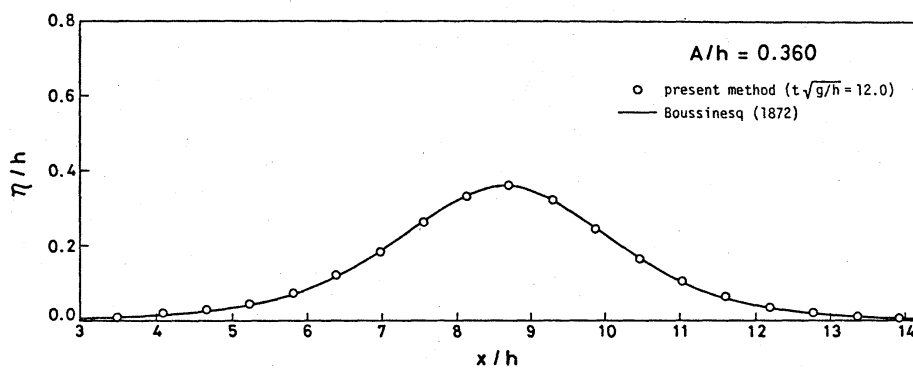


図5 孤立波 (波高 $A/h = 0.360$)

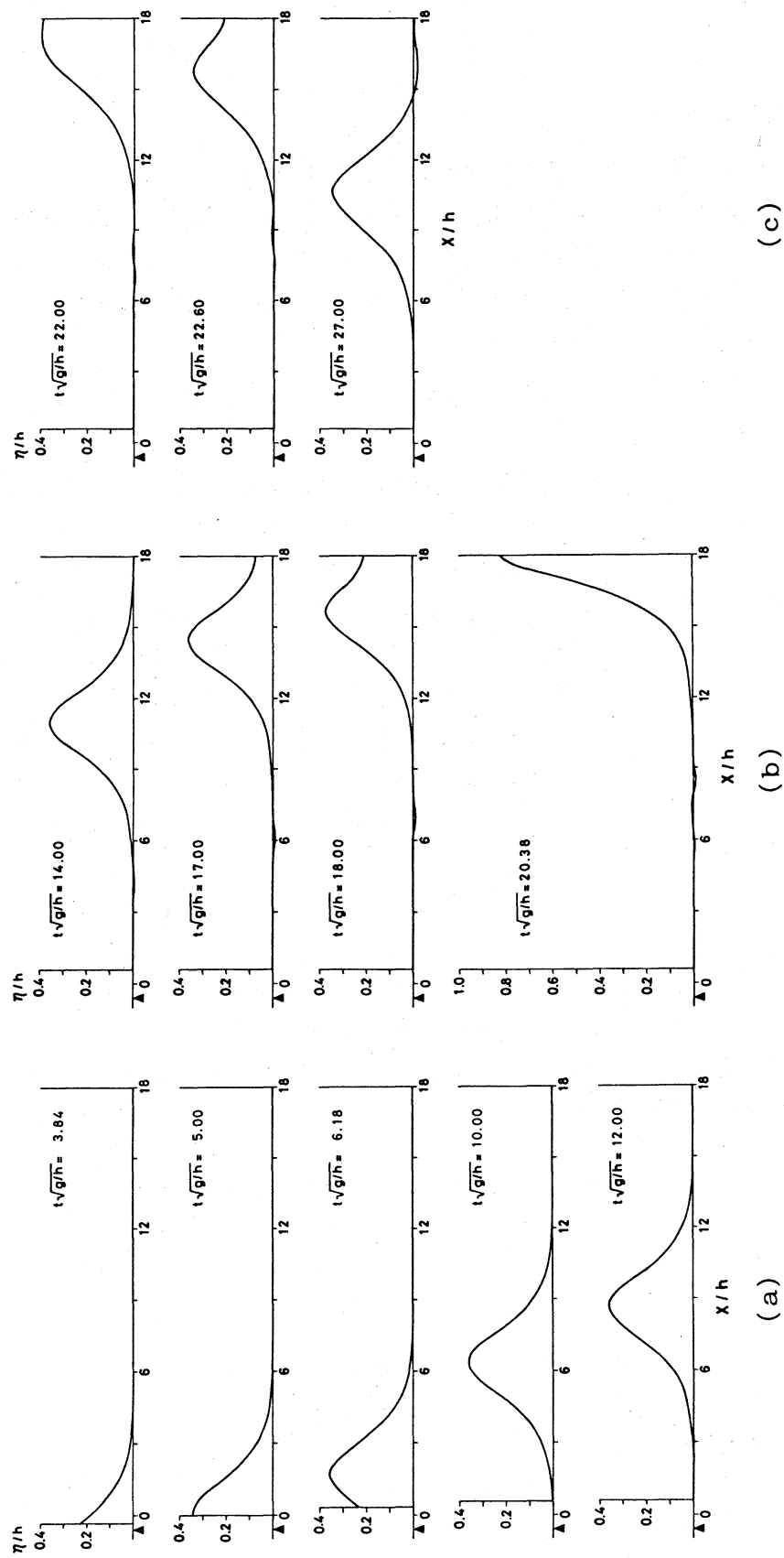


図 4 孤立波の運動の数値シミュレーション
(a) 発生 (b) 伝播と垂直壁へのかけ上がり (c) 反射

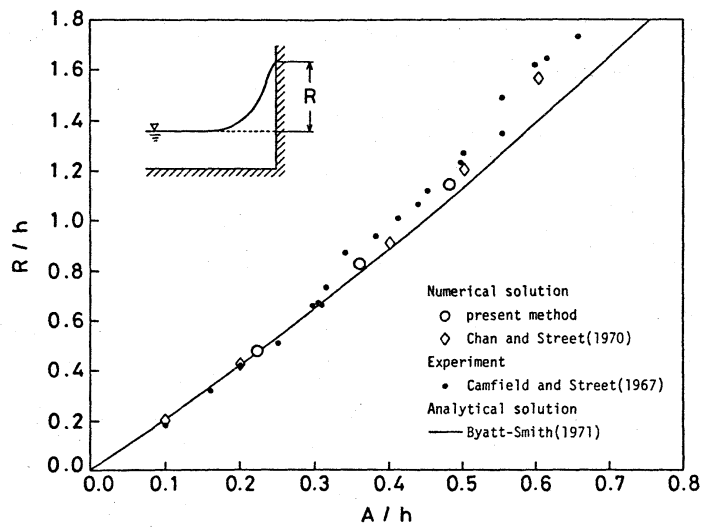


図6 孤立波のかけ上がりの最大高さ R/h

3. 定常自由表面問題の解析

§ 3.1 問題の設定

この問題は、一様水深の水路において、一定の伝播速度で進行する孤立波の形状を求めるものである。そこで、孤立波の伝播速度 c と同じ速度で孤立波と共に移動する動座標系を用いて基礎方程式を記述すれば、この問題は定常自由表面問題となる。そこで、図7において、座標系 $o-xy$ を動座標系とし、孤立波の対称性を考慮して $x \geq 0$ の領域を解析の対象とする。流体は非粘性・非圧縮、流れの場は非回転とすれば、流体の動座標系に対する相対速度 (u, v) を用いて次のように速度ポテンシャルと流れ関数を定義することができる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (18)$$

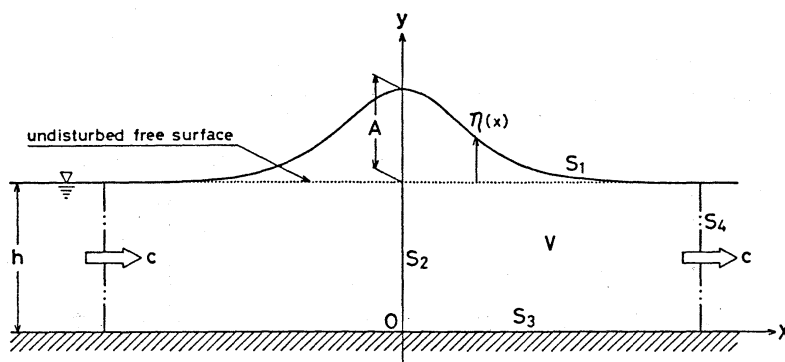


図7 孤立波と動座標系

図7において、境界 S_2, S_4 を等ポテンシャル線と考えると、境界 S_1, S_3 は流線に一致するから次式が成り立つ。

$$\phi = Q \quad ; S_1 \text{上} \quad (19a)$$

$$\phi = 0 \quad ; S_2 \text{上} \quad (19b)$$

$$\phi = 0 \quad ; S_3 \text{上} \quad (19c)$$

$$\phi = \phi_\infty \quad ; S_4 \text{上} \quad (19d)$$

ここに Q は流量を表わし、 $Q=ch$ で与えられる。また ϕ_∞ は無限遠での ϕ の値である。そこで、図7の (x, y) 平面上の流れの場 V を図8に示す (ϕ, ψ) 平面上の矩形領域 D に写像して考えると、基礎方程式は次のように与えられる⁶⁾。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} = 0 \quad ; D \text{内} \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right\}^{-1} + gy = H_0 \quad ; C_1 \text{上} \quad (21)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = 0 \quad ; C_2 \text{ および } C_4 \text{上} \quad (22)$$

$$y = 0 \quad ; C_3 \text{上} \quad (23)$$

ここに、境界 C_1, C_2, C_3, C_4 はそれぞれ図7の境界 S_1, S_2, S_3, S_4 に対応している。 H_0 は、

$$H_0 = \frac{c^2}{2} + gh \quad (24)$$

で与えられる定数である。 h は静水の深さを表わす。

以上より本問題は、 (ϕ, ψ) 平面上の領域 D において式(20)-(23)で表わされる非線形境界値問題を解き、座標値 y を決定する問題に帰着された。このとき、 C_1 上の y が孤立波の形状を与えることは言うまでもない。

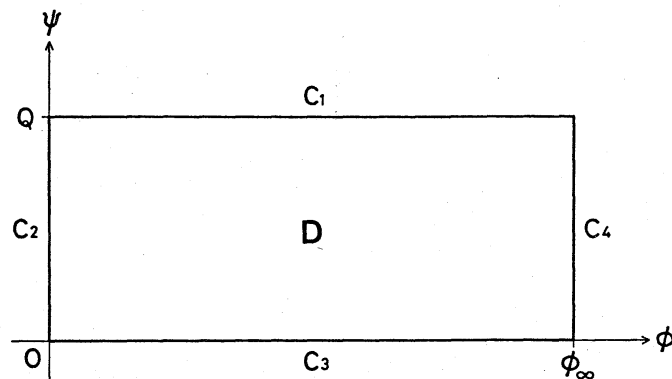


図8 (ϕ, ψ) 平面

§ 3.2 積分方程式への変換

支配方程式 (20) がラプラス方程式であることを用いて、式 (20)-(23) に対してグリーンの公式を適用すると、次のような y と $\partial y / \partial n$ を未知量とする非線形積分方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \alpha_p y_p + \oint_{C_1+C_2+C_4} y \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds - \oint_{C_1} \frac{\partial y}{\partial \phi} \ln \frac{1}{r} ds \\ - \oint_{C_3} \frac{\partial y}{\partial n} \ln \frac{1}{r} ds = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 $\partial y / \partial \phi$ は式 (21) より

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \sqrt{\frac{1}{2(H_0 - gy)} - \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2} \quad (26)$$

で表わされる非線形項である。

§ 3.3 積分方程式の離散化

境界 C を多数の直線要素に分割し、各要素内において y , $\partial y / \partial n$ の値は一定と仮定する。積分方程式 (25) を選点法によって解くものとし、要素の中央点を control point とする。すなわち、この点において式 (25) の残差が零となることを要求する。非線形項 $\partial y / \partial \phi$ の中に含まれる導関数 $\partial y / \partial \phi$ は、考えている要素とその両隣りの要素における y の値を用いて差分近似する。

このようにして積分方程式 (25) を離散化すると、境界 C_1, C_2, C_4 上の y と C_3 上の $\partial y / \partial n$ を未知量とする非線形連立代数方程式が導かれる。これを Newton-Raphson 法により反復計算して解けば、孤立波の形状に関する解析が可能となる⁹⁾。なお、孤立波の形状の第零近似には Boussinesq の理論形状

$$y = h + A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x}{h} \sqrt{\frac{3A}{4h}} \right) \quad (27)$$

を用いる。

§ 3.4 解析結果

式 (25) を解くためには、式 (24) よりわかるように孤立波の伝播速度 c が与えられていなければならない。そこで本解析では、 c の値を仮定して、それに対応する波形と波高 A の値を計算するという方法をとる。

図 9 はこのようにして計算された波高と伝播速度の関係を、理論解や実験データと比較してプロットしたものである。計算値と Daily and Stephan⁷⁾ の実験値との定性的一致は良好である。

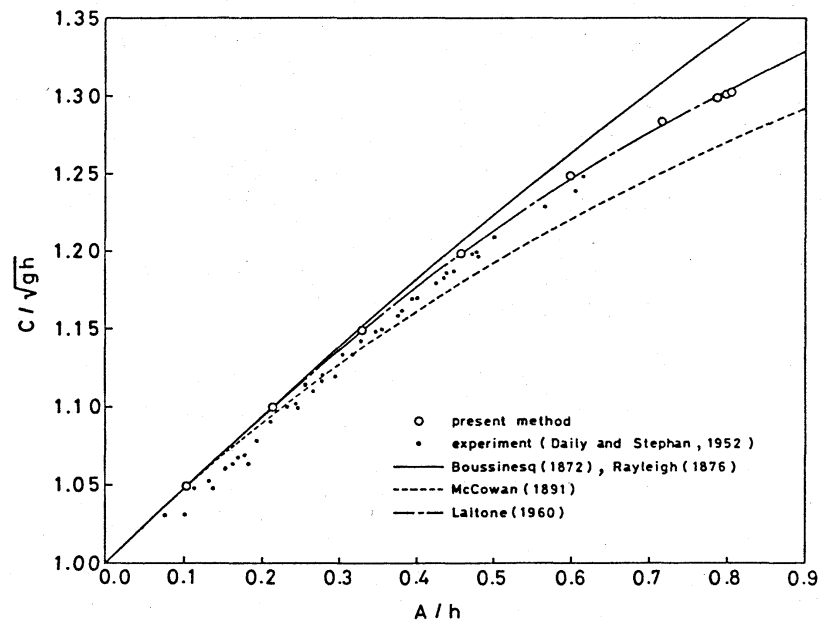


図9 孤立波の波高と伝播速度の関係

図10は、本方法によって計算値された形状とDaily and Stephanの実験で観察された形状との比較を行ったものである。縦軸には静止水面から測った自由表面形状関数 η ($=y-h$)を、横軸には座標 x をそれぞれ静水の深さ h で無次元化した量をとっている。なお図中にはBoussinesqの理論形状も示しており、計算された形状がこの理論形状とは若干異なっている事がわかる。

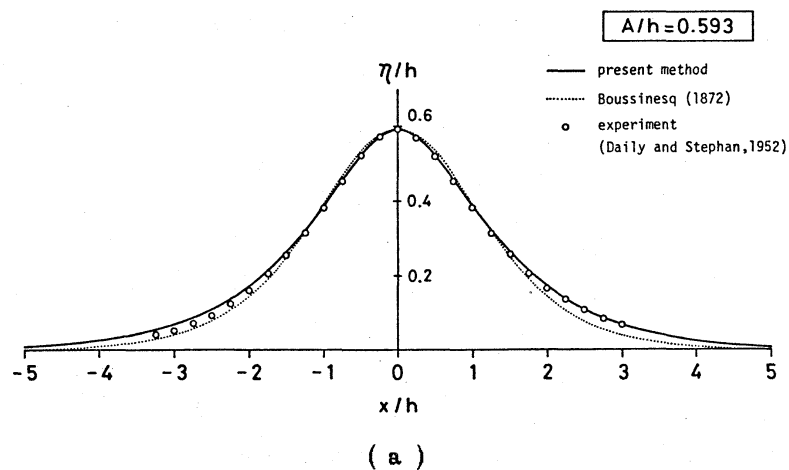
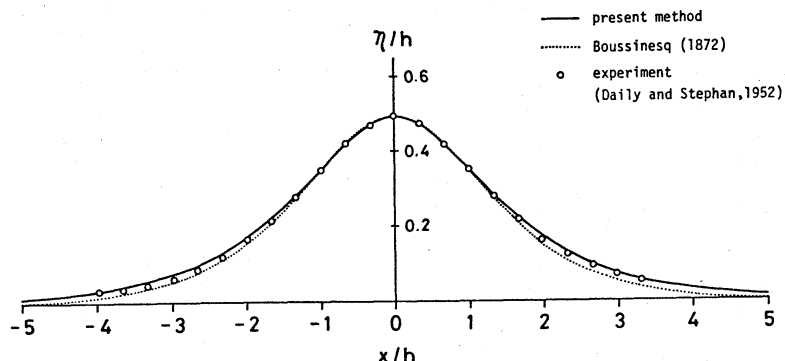
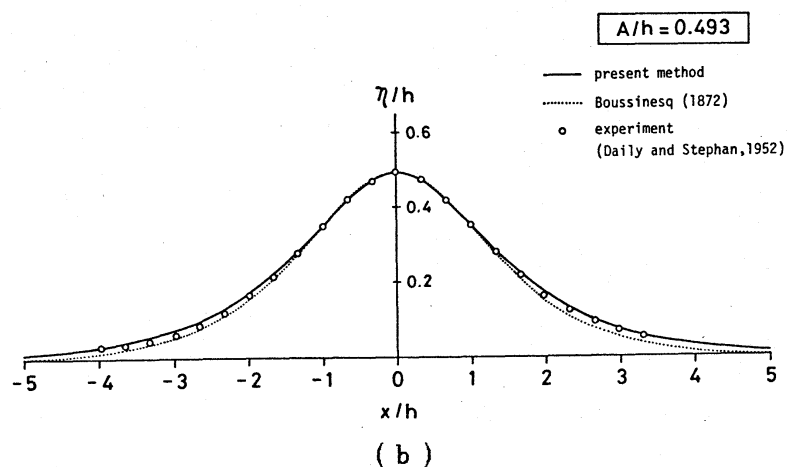
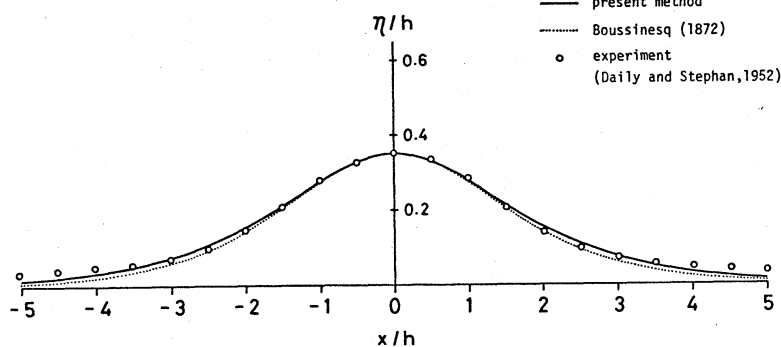
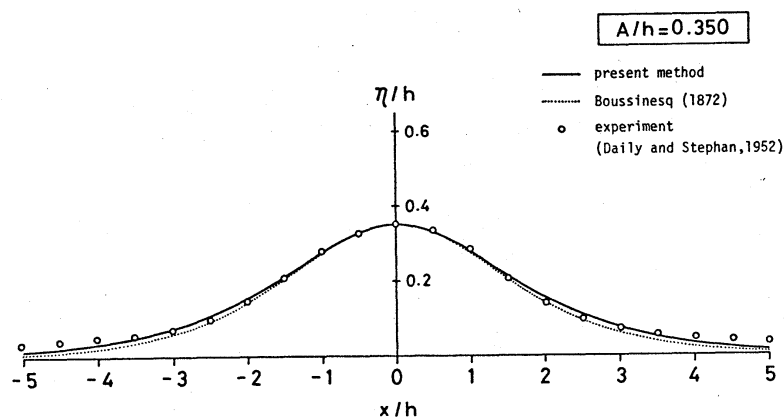


図10 孤立波



(b)



(c)

図10 孤立波 (続き)

§ 3.5 孤立波の最大波高

前節での計算結果を用いて、孤立波が理論的にとりうる最大波高を計算してみよう。Bernoulliの圧力方程式を自由表面上で記述すると

$$\frac{q^2}{2} + gy = H_0 \quad ; \quad S_1 \text{上} \quad (28)$$

となる。ここで、大気圧は零と仮定した。H₀は式(24)で定義される定数である。また

$$q^2 = u^2 + v^2 \quad (29)$$

である。このとき、式(28)の左辺第一項を速度水頭(velocity head)といい、左辺第二項を高度水頭(elevation head)という。さて、式(28)は、「自由表面上では速度水頭と高度水頭の和は一定であり、その値はH₀に等しい」と解釈することができるから、孤立波においては波の頂点(wave crest)において速度水頭

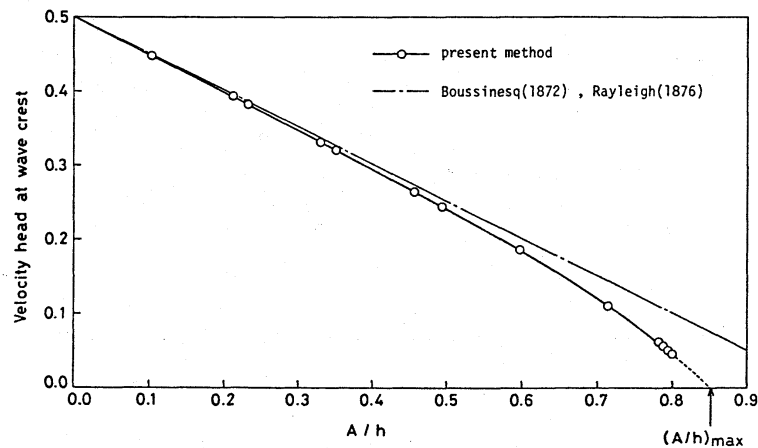


図11 孤立波の最大波高の推定

が最も小さいことになる。この頂点における速度水頭が零になるときが孤立波の限界であり、そのときの波高が最大波高 $(A/h)_{\max}$ を与える。式(28)を変形し、それを孤立波の頂点 $(y=A+h)$ に適用すると

$$\frac{q^2}{2} = \frac{c^2}{2} - gA \quad (30)$$

あるいは、重力加速度 g と静水の深さ h で無次元化して

$$\frac{1}{2} \left(\frac{q}{\sqrt{gh}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^2 - \frac{A}{h} \quad (31)$$

を得る。そこで、図9の計算結果を用いて式(31)から計算される速度水頭を、波高に対してプロットすると図11が得られる。計算値を $q^2/2=0$ に対して外挿すると、 $(A/h)_{\max}=0.855$ が得られる。この値はChan⁶⁾が差分法で計算した値と一致するが、Laitone⁸⁾が摂動法で求めた値 $8/11$ (≈ 0.727) よりもやや大きい(表1参照)。また、 $(A/h)_{\max}$ に対応する最大伝播速度 $(c/\sqrt{gh})_{\max}$ は、1.308 と計算された。

表1 孤立波の最大波高と最大伝播速度の比較

Investigator	$(A/h)_{\max}$	$(c/\sqrt{gh})_{\max}$
(present estimation)	0.855	1.308
McCowan (1894)	0.78	1.249
Yamada (1957)	0.8284	1.287
Laitone (1960)	8/11 (≈ 0.727)	1.284
Lenau (1966)	0.827	1.286
Byatt-Smith (1970)	0.86	1.31
Strelkoff (1970)	0.85	1.304
Chan (1974)	0.855	1.307

4. おわりに

流体力学における非線形自由表面問題に対する、境界要素法を用いる新しい数値解法について述べ、その有効性を実証するいくつかの計算例を報告した。前半で述べた非定常問題に対する解法はここで報告した孤立波の問題の他に、海底隆起による津波の発生¹⁰⁾、スロッシング(sloshing)と呼ばれる、容器内の液体振動現象^{11), 12)}などの解析にも応用され、著効を治めている。また、ここで報告した数値解法は、支配方程式が線形であっても、境界条件が非線形であるために解析が困難な問題に対しても有効である。

参考文献

1. Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 3rd edition, Pergamon Press Ltd., Oxford (1982).
2. Hirt, C. W. and F. H. Harlow, "A General Corrective Procedure for the Numerical Solution of Initial-Value Problems", *Journal of Computational Physics*, Vol.2 (1967), pp.114-119.
3. Chan, R. K.-C. and R. L. Street, "A Computer Study of Finite-Amplitude Water Waves", *Journal of Computational Physics*, Vol.6 (1970), pp.68-94.
4. Camfield, F. E. and R. L. Street, "An Investigation of the Deformation and Breaking of Solitary Waves", Department of Civil Engineering Technical Report, No.81, Stanford University (1967).
5. Byatt-Smith, J. G. B., "An Integral Equation for Unsteady Surface Waves and a Comment on the Boussinesq Equation", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.49, Part 4 (1971), pp.625-633.
6. Chan, R. K.-C., "A Discretized Solution for the Solitary Wave", *Journal of Computational Physics*, Vol.16 (1974),

pp.32-48.

7. Daily, J. W. and S. C. Stephan, Jr., "The Solitary Wave", Proceedings of the 3rd Conference on Coastal Engineering, Cambridge, Massachusetts, October 1952, pp.13-30.
8. Laitone, E. V., "The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves", Journal of Fluid Mechanics, Vol.9 (1960), pp.430-444.
9. 中山 司, "流体力学における非線形自由表面問題の数値解析に関する研究", 学位論文, 東京大学工学部, 1980.
10. Nakayama, T., "Boundary Element Analysis of Nonlinear Water Wave Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.19 (1983), pp.953-970.
11. Nakayama, T. and K. Washizu, "The Boundary Element Method Applied to the Analysis of Two-Dimensional Nonlinear Sloshing Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.17 (1981), pp.1631-1646.
12. Nakayama, T. and K. Washizu, "Boundary Element Analysis of Non-Linear Sloshing Problems", in Developments in Boundary Element Methods-3 (edited by P. K. Banerjee et al.), Elsevier Applied Science Publishers Ltd., 1984, pp.191-211.