

Hecke の予想について

京大理 土方正明

1. $\Gamma_0(N) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$ とする.
1936 年に, Hecke は “ (N を素数として, weight 2, Haupttypus の) $\Gamma_0(N)$ の modular form は全て, level N の 2 次形式 から作る theta 級数の 一次結合 として表せるだろう ” と予想した (cf.

Hecke: Analytische Arithmetik positiven quadratischen Formen, Kgl. Danske, Vid. Selskab. (12) 1940, p. 100 ~).

2. 1955 年, Eichler によって, その予想は証明された. (Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen, Crelle, (195) 1955, p. 157-).

同時に, 彼は N が素数でないとき, 上の予想は一般には成立しないことを示した. そして, N が square free という仮定の下に, 次のような (一寸奇妙な) 命題を証明した. cf. 上に引用したもの, 及び

Quadratische Formen und Modul-

funktionen, Acta Arith. (4) 1958, p217~). 従って τ は weight 2 以上も扱っているが, 簡単なものの, 以下ではそれに示す。

“ $f(\tau)$ を $\Gamma_0(N)$ の cusp form とし, その τ - $\frac{1}{N}$ 展開 at ∞ は $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}$ とする。このとき次の性質を有する $\Gamma_0(N)$ の cusp form $g(\tau) = \sum b_n e^{2\pi i n \tau}$ が存在する。

(i) $g(\tau)$ は level N 以下の二次形式から得られる theta 級数の一次結合。

(ii) $(n, N) = 1$ ならば $a_n = b_n$ 。”

即ち, “level と素でない n を無視すると, theta で書ける” というのである。

2. N と素でない Hecke 予想 (の仮定) が成り立つのは割合簡単な理由による。 M を N の約数, d を N/M の約数 ($d \neq 1$) とすると, $\Gamma_0(M)$ の cusp form f は自然に $\Gamma_0(N)$ の cusp form とみられるが, 更に $f(d\tau)$ も $\Gamma_0(N)$ の cusp form となり, こういう $f(d\tau)$ は (準-112 級数) と v と v にしか成らないので theta で表せようもないが) 実際, theta で表せない。

4. Atkin-Lehner は $\Gamma_0(N)$ の cusp form f が New form であるというのを次によって定義した。

(i) $f(\tau)$ は $\Gamma_0(M)$ ($M|N$) の cusp form $h(\tau)$ 及びその transform $h(d\tau)$ ($d|\frac{N}{M}$) で生成される部分空間の orthogonal complement に入る

(ii) $f(\tau)$ は Hecke 作用素 T_n ($(n, N)=1$) の同時固有函数である。

そして彼等は $\Gamma_0(N)$ の cusp form の空間は $\Gamma_0(M)$ ($M|N$) の new form $h(\tau)$ 及びその transform $h(d\tau)$ ($d|\frac{N}{M}$) で張られることを示した。(cf. Hecke Operators on $\Gamma_0(m)$ Math. Ann (195) 1970)

5. このようにして, 4 を並べてみれば, N が合成数のとき $\Gamma_0(N)$ の new form は theta で書けるか? というのが真の問題であることに気づく。これができたのは一般の cusp form は theta とその(上のようを簡単な) transform の一次結合で書ける。これが, 最近, 私と斎藤裕君とで考えた問題であり, 答はまさに, その通りであった。実際三宅敏恒君の論文により 2.2, f を new form と仮定して示すれば, $f=g$ と結論できる。

さらに

それは Eichler の証明法 (Hecke 作用素の cusp form の空間での trace と Brandt Matrix の trace を取った) を new form の観点で再考することによって, 次のように改良できる。

6. 2. a (i) の N 以下 の T 度 N の (一般には更にその一部) に限れる.

7. 先の (N が square free と限らば) Trace formula (U.S.-Japan Sem. Modern Method in Number theory 1971 に発表) の定性的部分を便にすることによって, N が square free の仮定を N が $T < \infty$ と ∞ の一つ simple prime factor を持つ こと. $\exists p, N = pN', (p, N') = 1$ p 素. で置き換えることができる.

8. 6, 7 の証明には, theta の方には new form (の生成する subspace) に当るものを定義する必要がある. 今迄述べた外見上には全く現わなかったが, 実際には $\Gamma_0(N)$ がその単射群 (の index 2 の部分群) になっているように ($\mathbb{Q}$ 上の algebra $M_2(\mathbb{Q})$ の order, 及び (ある意味で $\mathbb{H}$ に対応して決る) $\mathbb{Q}$ 上の definite quaternion の order の (数論的意味での) 局所的性質が essential である.

9. N が square free の仮定を落すには, すくなくとも今迄扱われていた $\Gamma_0(N)$ 型 以外の order の局所理論が必要である.