

Weinberg の方法について

京都大学数理解析研究所 荒 木 不二洋

§ 1 Introduction

§ 2 問題の設定

§ 3 物理的背景

§ 4 Weinberg の方程式

§ 1 Introduction

静田氏の話にもあつたように、三体問題の Resolvent に対して (変数 z が実軸にない場合), Lippmann-Schwinger の積分方程式を書くと, その kernel が連続スペクトルを持っていて, Hilbert Schmidt 型にはならない。ところが未知関数を適当に変えてやると, 新しく導入した関数は kernel が Hilbert Schmidt 型の線型積分方程式をみたし, したがって問題が扱いやすくなる。事実これが Faddeev の議論の第一の step である。

Weinberg は n 体問題でこれと同じことをするにはどうしたらよいかということを提案し, 少なくとも三体問題の時には Hilbert Schmidt 型の kernel が得られることを示した。さらに Hunziker が n 体の時にも Weinberg の方法によつて Hilbert Schmidt 型の kernel が得られることを示している。したがって, Weinberg の与えた方程式で, z を実軸に近ずけた極限を Faddeev 流に議論すれば, n 体問題についても, 3 体問題の Faddeev の結果と類似のものが得られるのではないと思われる。もちろんこれは将来の課題である。

ここでは Weinberg の方法を証明ぬきで説明する。参考文献は

S. Weinberg, Phys. Rev. 133 (1964) B232-256.

W. Hunziker, Phys. Rev. 135 (1964) B800-803

§ 2 問題の設定

n 体のハミルトニアンとして

$$H = H_0 + V$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^n p_i^2 / (2m_i)$$

$$V = \sum_{i < j} V_{ij}, \quad V_{ij} = V(x_i - x_j)$$

を考える。

まず全運動量

$$P = \sum p_i$$

が H の各項と“可換”であり、 P の異なる値に対する H は同等なので $P=0$ での H を $\hat{H}$ と書いて

H の性質を調べる。(すなわちヒルベルト空間を P のスペクトル分解によつて $\mathcal{H} = \int \mathcal{H}_p d\mu(p)$, $P_k = \int p_k d\mu(p)$, $H = \int H_p d\mu(p)$ のように直和積分に分解する。 $(\mathcal{H}_p, H_p - \frac{p^2}{2M})$ は互にユニタリ同値にとれるので($M = \sum m_i$), その時例えば $p=0$ で $\mathcal{H}_p$ の上の H_p を調べればよい。)

ハミルトニアンのスペクトルを調べるために, resolvent

$$G(z) = (z - H)^{-1}$$

を定義し, Lippmann Schwinger 方程式(resolvent equation)

$$G(z) = G_0(z) + K(z) G(z)$$

$$G_0(z) \equiv (z - H_0)^{-1}$$

$$K(z) \equiv G_0(z) V$$

を考える。

もし $n=2$ ならば, $\hat{K}(z)$ は z が正または0の実数でなければ Hilbert-Schmidt 型になる。ところが, $n \geq 3$ ではそうならない。そこで $G(z)$ と相互に簡単な関係で結ばれた $C(z)$ を導入して, $C(z)$ に対する方程式が, $\hat{I}(z)$ が Hilbert-Schmidt 型であるような kernel $I(z)$ と既知項 $B(z)$ を使つて

$$C(z) = B(z) + I(z) C(z)$$

の型になるように工夫せよというのが問題である。この際, $B(z)$ と $C(z)$ の関係は, $\text{Im } z \rightarrow 0$ での $C(z)$ のふるまいがわかれば, $G(z)$ のふるまいもたゞちにわかるものが望ましい。

Weinberg の方法はそのような $C(z)$, $I(z)$, $B(z)$ を一般の n に対して recursive に与える。

§ 3 物理的背景

$n \geq 3$ で $K(z)$ が Hilbert Schmidt 型にならないのには、明らかな理由がある。それは $K(z)$ の定義式の V を V_{ij} にわけて、各 V_{ij} について考えると、 i および j 以外の粒子の運動量 ($p_k, k \neq i, j$) について $K(z)$ は対角的になっている (kernel が δ 関数を含む) からである。座標空間の言葉でいうと、 (ij) という pair 以外の任意の pair の二粒子相互の距離が大になった時、 $\hat{K}(z)$ に対応する x 表示の kernel が小さくならないということである。

これをさけるには、kernel の中に V_{ij} が沢山あらわれて、どの二粒子の座標を引き離しても、直接または間接にどれかの V_{ij} が働いて、 $K(z)$ の x 表示での kernel が小さくなればよい。それには、 $K(z)$ のうちで、いくつかの group の粒子が、各 group 内では相互作用しているが、各 group 間では相互作用を起さないで通り抜けてしまうような部分を除いて、どの粒子も直接または間接に相互作用を及ぼし合っているような部分 (connected part) を取り出して、それに対する方程式を立ててやればよいことが推察される。このような “connected part” を取り出す操作は、いろいろな分野でいろいろな名前のもとに使われているので、どうすればよいかわかっている。(統計力学で cluster expansion, 素粒子論で connected part, truncated part, cluster decomposition, normal product etc., 確率統計で cumulants)

上記の説明をグラフで書くと次のようになる。今 resolvent を型式的に

$$\begin{aligned} (z-H)^{-1} &= (z-H_0)^{-1} (1 - V(z-H_0)^{-1})^{-1} \\ &= (z-H_0)^{-1} + (z-H_0)^{-1} V (z-H_0)^{-1} + \dots \end{aligned}$$

のように展開し、各 V を V_{ij} にわける。今 n 粒子に対応して n 本の線を水平に引き、各 V_{ij} に対応して i 番目と j 番目の線を結ぶ線分を引いて各項を表すことにする。この際、各項中の

V_{ij} の順序に従って、左から右へ対応する線分を書くことにする。この時、位相的に connected な graph とそうでないグラフができる。例えば最初の $(z-H_0)^{-1}$ は n 本の直線だけで明らかに disconnected である。connected なグラフに対応した項の和を connected part $C(z)$ と考える。connected でないグラフも、どの線とどの線が connect されているかということで分類して足すと、それぞれが n のより小さい resolvent の connected part から簡単な rule で作られることがわかる。これがあとで述べる $G(z)$ と $C(z)$ の recursive な関係式である。

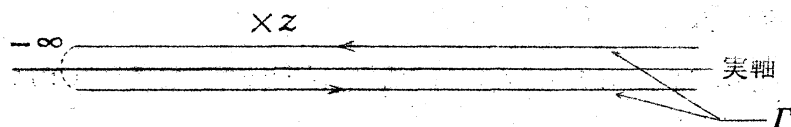
次に connected part $C(z)$ のグラフで一番左方に位置しているいくつかの V_{ij} に対応した線分のうち、 $C(z)$ が connected になる為にどうしても必要な分だけ、前へくり出して考えると、残りの部分に対してはまったく制限がなくなるので、残りの部分が $G(z)$ で表され、前へとりだして分が求める kernel $I(z)$ を与える。作り方によつて $I(z)$ は V ですべての粒子がつながっているので、Hilbert Schmidt 型になる可能性がある。disconnected part の和 $G(z) - C(z)$ および $I(z)$ は、より小さい n に対する $C(z)$ で表すことのできるもので、 $I(z)$ を既知の kernel, $B(z) \equiv I(z)(G(z) - C(z))$ を既知の非斉次項と考えると、求める方程式がでてくる。

§4 Weinberg の方程式

今 convolution $*$ を

$$(f_1 * f_2)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f_1(z') f_2(z - z') dz'$$

ただし $\text{Im } z \neq 0$ に対し、積分路 Γ は実軸のまわりを次の図のようにとる。



実際に使うのは下に有界で互に可換な H_1 と H_2 について、

$$f_1 = (z - H_1)^{-1}, \quad f_2 = (z - H_2)^{-1}$$

の時

$$f_1 * f_2 = (z - H_1 - H_2)^{-1}$$

というように使う。

今 $1 \dots n$ の部分集合を一般に S と文字で表し、

$$H_S = \sum_{i \in S} P_i^2 / (2m) + \sum_{i < j, i \in S, j \in S} V_{ij}$$

$$G_S(z) = (z - H_S)^{-1}$$

と定義する。そこで connected part $C_S(z)$ を

$$G_S = \sum C_{S_1} * \dots * C_{S_\nu}$$

で recursive に定義する。ここに和は集合 S を互に disjoint な $S_k, 1 \leq k \leq \nu$ の union にわけるすべての partition (ν も任意に変える) についての和 (順序だけが異なるものはどれか一つだけとる。) で, そのうち $\nu=1$ の項が定義したい $C_S(z)$ であり, 残りの項は同様の式で定義されるより低い order の $C(z)$ で与えられる。例えば

$$C_i(z) = (z - H_i)^{-1}$$

$$C_{ij}(z) = (z - H_{ij})^{-1} - (z - H_i - H_j)^{-1}$$

一般に

$$C_S(z) = \sum_m (-1)^{m-1} (m-1)! \sum_{\{s_1 \dots s_m\}} (z - H_{s_1} - \dots - H_{s_m})^{-1}$$

kernel $I_S(z)$ は

$$I_S(z) = \sum C_{S_1}(z) * C_{S_2}(z) V_{S_1 S_2}$$

$$V_{S_1 S_2} = \sum_{i \in S_1, j \in S_2} V_{ij}$$

和は S を nonempty で互に disjoint な S_1 と S_2 の union にわける partition についてとり, (S_1, S_2) と (S_2, S_1) はどちらか一つだけとる。特に

$$I_i = 1$$

最後に非斉次項は

$$B_S(z) = I_S(z) \{ G_S(z) - C_S(z) \}$$

で与えられ, 方程式は

$$C_S(z) = B_S(z) + I_S(z) C_S(z)$$

となる。

ポテンシャル $V(x)$ が L_2 ならば, H_S のスペクトルに属さない z に対して $I(z)$ は Hilbert Schmidt 型であり, その Hilbert Schmidt norm は $z \rightarrow -\infty$ で $(\operatorname{Re} z)^{-1}$ で小さくなること, Hunziker によって示されている。