

一次元力学系の弱正則性について

辻井 正人

京都大学理学部数学教室

ここでは一次元の C^2 写像 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ のエルゴード的な性質について考える。まず、次のような Borel 確率測度の空間 $\mathcal{M}([0, 1])$ の上の関数 $\bar{\chi}(\cdot)$ を考える。

$$\bar{\chi} : \mathcal{M}([0, 1]) \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$$

$$\bar{\chi}(\mu) = \int_{[0, 1]} \log |df(x)| d\mu(x).$$

ここで $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ には、開集合 (a, b) と $[-\infty, b)$, $a, b \in \mathbf{R}$ で生成される位相を考える。もし、 f が critical point を持てば、 $\bar{\chi}(\cdot)$ は不連続になる。この事実は系 f の解析をする上でのいくつかの困難を引き起こす。そこで我々は次のような正則性条件を考える。

DEFINITION.

- (1) 点 $x \in [0, 1]$ が弱正則であるとは、関数 $\bar{\chi}(\cdot)$ の集合

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$$

の閉包への制限が連続であることとする。

- (2) C^2 写像 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ が弱正則であるとは、Lebesgue 測度についてほとんど全ての点が弱正則であることである。

$\mathcal{A}^r$ ($r \geq 2$) を C^r 写像 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ で次の条件 (A1) と (A2) を満たすものとする。

(A1) f の critical point は全て非退化である。

(A2) $f([0, 1]) \subset (0, 1)$ かつ $\{c_i\}_{i=1}^d \subset (0, 1)$ 。

弱正則な系に対しては次が成り立つ

THEOREM A. もし、写像 $f \in \mathcal{A}^r$ が弱正則ならば二つの開集合 $U_1, U_2 \subset M$ があって次の条件を満たす。

- (1) U_1 は全ての hyperbolic periodic sinks の basin の和である。
- (2) U_2 上のほとんど全ての点は正のリアプノフ指数を持つ絶対連続な ergodic measure に対して generic になる。
- (3) 絶対連続な確率測度 ν が $\nu(U_1 \cup U_2) = 0$, を満たすとき、

$$\omega_f(\nu) \subset \mathcal{M}^0(f) \equiv \{ \mu \in \mathcal{M}_f \mid \chi(x) = 0 \quad \mu\text{-a.e.} \}$$

2

ここで $\omega_f(\nu)$ は $\{n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} f^j(\nu)\}_{n=1}^{\infty}$ の極限集合、 $\chi(x)$ は Lyapunov exponent 即ち、

$$\chi(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} n^{-1} \log |df^n(x)|_0$$

系として次が得られる。

COROLLARY. もし C^r 写像 $f \in \mathcal{A}^r$ が弱正則であるとき、任意の絶対連続な確率測度 ν について

$$\omega_f(\nu) \subset \{\mu \in \mathcal{M}_f \mid \mu \text{ は Pesin の entropy formula を満たす.}\}.$$

ここで Pesin の entropy formula とは、次の等式である。

$$h_\mu(f) = \int \max\{\chi(x), 0\} d\mu(x).$$

次に問題になるのは、弱正則な系が十分多いかということである。 C^r 写像の空間、 $C^r([0, 1], [0, 1])$, を考え、そこに C^r -norm, $\|\cdot\|_{C^r}$, と C^r -topology を与える。 $C^r(M, M)$ の中で弱正則な系の全体を $\mathcal{R}^r$ と書くことにする。このとき次が得られる。

THEOREM C. $\mathcal{R}^r$ は $\mathcal{A}^{r,1}$ の open dense subset を含む。 ($r \geq 2$)

THEOREM D. C^r -写像の空間 $C^r([0, 1], \mathbf{R})$ 上の Borel 確率測度 m がその部分空間 $C^q([0, 1], \mathbf{R})$ ($q > r$) に沿って quasi-invariant であるとき、

$$m(\mathcal{A}^{r,1} - \mathcal{R}^r) = 0. \quad (r \geq 2)$$

特に、theorem D から次の事実が得られる。

COROLLARY. n -parameter 族, $F(x, t) \in C^r([0, 1] \times [-1, 1]^n)$, の中で

$$\{t \in [-1, 1] \mid F(\cdot, t) \in \mathcal{A}^{r,1} - \mathcal{R}^r\}$$

の Lebesgue 測度が 0 になるものは稠密である。

REFERENCES

1. M.Tsujii, *A measure on the space of mappings and dynamical system theory* (preprint).
2. M.Tsujii, *Weak regularity of Lyapunov exponents in one dimensional dynamics* (preprint).