

不規則波浪の浅水変形に伴うスペクトル変化に関する研究

間瀬 肇・James T. Kirby・栗林 賢一

SPECTRAL CHANGE DUE TO WAVE SHOALING OF RANDOM WAVES

By Hajime MASE, James T. KIRBY and Ken-ichi KURIBAYASHI

Synopsis

A nonlinear shoaling model in frequency domain derived from the variable depth Korteweg-de Vries (KdV) equation, equivalent to the 'consistent shoaling model' by Freilich and Guza (1984), was used to predict spectral changes of 1-D random waves. A random wave experiment with Pierson-Moskowitz spectrum was done to get detailed data of wave transformation over a uniform slope. The model overestimated the observations even in the region where there were no wave breaking. In order to make the agreement between the predictions and experimental observations well, the frequency domain KdV shoaling model was modified to represent the dispersion relation and shoaling of linear component waves. As a result, the agreement between the predictions and observations in the shoaling region became better. An energy dissipation term must be included in the modified frequency domain KdV model to apply to the breaking region.

1. は じ め に

不規則波浪の取り扱い方法(解析法)には、大きく分けてスペクトル解析法と波別解析法がある。スペクトル解析法は、水位変動を振幅、周波数および波向がそれぞれ異なる無数の正弦波(微小振幅の成分波)がランダムな位相で重なり合ったものと考え、各成分波のエネルギーの周波数、波数、波向きに対する分布特性、変形、構造物への作用を解析するものである。線形の問題では、各成分波の変形や作用力を微小振幅波理論を用いて算定し、その結果を加え合わせて解を得ることができる。非線形の問題になると、各成分波は干渉しあって独立ではなくなるが、それでも理論的取り扱いが可能である。しかし、各成分波が特定の位相で重なり合って波が砕け、エネルギー逸散が生じるといった非線形性が非常に顕著で、かつ不連続な砕波および砕波後の現象に対しては純理論的取扱いは困難であり、何らかの経験的・便宜的手法を取り入れなければならない。

波別解析法は、水位変動からゼロアップクロス法等で個々波(一波一波)を定義することによって、個々波の波高や周期の分布特性を調べたり、個々波を波高と周期の等しい規則波として扱い、波の変形や構造物への作用を算定するものである。波別解析法の範疇にはいるものとして最大波法、有義波法、確率分布法がある。単一最大波法および有義波法は、個々波の統計量としての代表量である最大波や有義波を波高と周期がそれらと等しい規則波で置き換え、規則波の理論および実験結果を利用するものである。代表波として平均波が用いられることもある。代表波の規則波への置き換えをせず、直接個々波を規則波として取り扱い波高や作用力の分布を算定する方法、あるいは個々波の確率分布を入力条件として規則波の結果を用いて対象とする確率特性を算定する方法が確率分布法である。波別解析法は元々便宜的なもので

あり、砕波の影響も適当な仮定のもとに容易に取り込めるが、適当に区切られた一波を規則波として取り扱うという点で理論の根拠に欠ける。スペクトル解析法および波別解析法にはそれぞれ利点、欠点があり、対象とする問題によって使い分けなければならないが、いずれにせよできるだけ波動理論に立脚するのがよいのはいうまでもない。

本研究は、スペクトル解析法に基づいた不規則波浪の浅水変形の予測モデルを検討する。スペクトル成分波の振幅変化を線形浅水変形理論により求めると、水深が比較的大きい領域では概ね実測値を説明できるが、ある程度水深が浅くなって非線形性が卓越してくると実測値と合わなくなる。海岸近くのアーセル数が $O(1)$ の浅海領域では非線形理論が必要となる。

Boussinesq 方程式は弱い分散性と有限振幅性を含んだ理論式であり、Peregrine¹⁾ が任意海底海浜に対する Boussinesq 方程式を導いて以来多くの実験的研究がなされ、さらに理論が発展させられてきた。岸からの反射が無視でき、岸方向のみへ波が伝播するという条件においては Boussinesq 方程式から KdV 方程式が得られる。Freilich and Guza²⁾ は Boussinesq 方程式から任意スペクトルを有する風波の浅水変形理論（ただし汀線に直角入射する場合）、Liu et al.³⁾ は屈折・回折を考慮した非線形波の浅水変形理論を導いた。ここでは、KdV 方程式を用いて不規則波浪の成分波に対する浅水変形式を導き、その適用性を水理実験で確かめる。また、得られた浅水変形式の特徴を考察し、適用範囲が広げられるよう修正することによって予測精度の向上を目指す。

2. KdV 方程式を用いたスペクトル成分波の浅水変形式

次式で表される非線形性と分散性を含む Boussinesq 方程式は、浅海域での波動理論として有用であることが知られている^{1), 2)}。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \varepsilon \zeta) \mathbf{u}] = O(\varepsilon^2, \varepsilon \mu^2, \mu^4) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \zeta = \mu^2 \left\{ \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u})] - \frac{h^2}{6} \frac{\partial}{\partial t} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\} + O(\varepsilon^2, \varepsilon \mu^2, \mu^4) \quad \dots\dots\dots (2)$$

この式は、代表周波数 ω_0 、代表振幅 a_0 、代表水深 h_0 を用いて以下のように無次元化されており（ダッシュがついた変数が次元量）,

$$t = \omega_0 t', \quad (x, y) = k_0 (x', y') = \frac{\omega_0}{\sqrt{g h_0}} (x', y'),$$

$$h = \frac{h'}{h_0}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}'}{\left[\frac{a_0}{h_0} \sqrt{g h_0} \right]}, \quad \zeta = \frac{\zeta'}{a_0} \quad \dots\dots\dots (3)$$

二つの無次元パラメータ

$$\varepsilon = \frac{a_0}{h_0}, \quad \mu^2 = \frac{\omega_0^2 h_0}{g} \quad \dots\dots\dots (4)$$

が $O(\varepsilon) = O(\mu^2) < 1$ であることが条件である。また、水深変化が波長に比べて小さい

$$O(|\nabla h|) \leq O(\mu^2) \quad \dots\dots\dots (5)$$

とすると、式(2) は次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \zeta = \mu^2 \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial t} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + O(\varepsilon^2, \varepsilon \mu^2, \mu^4) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで一次元伝播の場合を考える。 $\phi_x = u$ なる速度ポテンシャル ϕ を導入し、式(1) と式(2) の u を書き直す。

$$\zeta_t + (h\phi_x)_x + \varepsilon(\zeta\phi_x)_x = 0 \quad (7)$$

$$\phi_{xt} + \varepsilon\phi_x\phi_{xx} + \zeta_x - \frac{\mu^2 h^2}{3}\phi_{xxx} = 0 \quad (8)$$

最低次のオーダーの関係式

$$\zeta = -\phi_t \quad (9)$$

を式(7) の左辺第3項に代入した後、式(7) および(8) から ζ を消去して次式が得られる。

$$\phi_{tt} - (h\phi_x)_x + \varepsilon(\phi_t\phi_x)_x + \frac{\varepsilon}{2}(\phi_x^2)_t - \frac{\mu^2 h^2}{3}\phi_{xxx} = 0 \quad (10)$$

波は x の正方向(岸方向)にのみ伝播するものとし、次の変数を導入する。

$$\xi = \int \frac{dx}{C} - t, \quad \tau = \varepsilon t, \quad \chi = \varepsilon x \quad (11)$$

ただし、 $C = \sqrt{h}$ である。これらの変数を用いて式(10) は次のように表される。

$$\phi_{\xi\xi} + C\phi_{\xi\chi} + \frac{1}{4C}h_x\phi_\xi + \frac{3}{2C^2}\phi_{\xi\xi}\phi_\xi + \frac{\mu^2 h^2}{6\varepsilon C^2}\phi_{\xi\xi\xi} = O(\varepsilon, \mu^2) \quad (12)$$

式(9) の関係式を用いて ϕ_ξ を ζ で表すと

$$\zeta_\tau + C\zeta_\chi + \frac{1}{4C}h_x\zeta + \frac{3}{2C^2}\zeta\zeta_\xi + \frac{\mu^2 h^2}{6\varepsilon C^2}\zeta_{\xi\xi} \cong 0 \quad (13)$$

が得られる。これは任意海底地形に対する KdV 方程式である。固定座標系の表示に直せば次のようになる。

$$\zeta_t + \sqrt{h}\zeta_x + \frac{h_x}{4\sqrt{h}}\zeta + \frac{3\varepsilon}{2\sqrt{h}}\zeta\zeta_x + \frac{h^{5/2}\mu^2}{6}\zeta_{xxx} = 0 \quad (14)$$

波は基本周波数 ω_1 に対して周期的であるとし、その調和成分の重ね合わせとして次のように Fourier 級数表示する。

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n' e^{i(\int k_n dx - \omega_n t)} + \text{c.c.} \quad (15)$$

$$\omega_n^2 = gk_n^2 h \quad (16)$$

ここで、c.c. は式(15) の右辺第1項の共役複素数であり、 $\omega_n = n\omega_1$ 、 k_1 を波数の基本成分とすると $k_n = nk_1$ である。式(15) を a_0 、 ω_0 、 k_0 を用いて無次元化する。

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n e^{in(\int \bar{k}_1 dx - \bar{\omega}_1 t)} + \text{c.c.} \quad (17)$$

ここで、 $\bar{k}_1 = k_1/k_0$ 、 $\bar{\omega}_1 = \omega_1/\omega_0$ である。複素振幅 A_n は水深 h の変化と同程度にゆっくり変化するものとする。

$$\frac{dA_n}{dx} \sim \frac{dh}{dx} \sim O(\varepsilon, \mu^2) \quad (18)$$

条件(18)のもとで、式(17)を式(14)に代入して

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dx} + \frac{h_x}{4h} A_n - \frac{\mu^2}{6} i n^3 \bar{k}_1^3 A_n + \frac{3\epsilon i \bar{k}_1}{8h} \sum_l \sum_m [(l+m) A_l A_m e^{i(l+m-n)\phi_1} \\ + (l-m) A_l A_m^* e^{i(l-m-n)\phi_1} - (l-m) A_l^* A_m e^{i(-l+m-n)\phi_1} \\ - (l+m) A_l^* A_m^* e^{i(-l-m-n)\phi_1}] = 0; \quad n=1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる。ここで、*は共役複素数であり、 ϕ_1 は次式の基本成分に対する位相関数である。

$$\phi_1 = \int \bar{k}_1 dx - \bar{\omega}_1 t \quad (20)$$

式(19)の非線形項で n 次成分に寄与するのは次の共鳴条件を満たす場合である。

$$\pm \bar{\omega}_l \pm \bar{\omega}_m - \bar{\omega}_n = 0 \quad (21)$$

$$\pm \bar{k}_l \pm \bar{k}_m - \bar{k}_n = 0 \quad (22)$$

すなわち、

$$\pm l \pm m - n = 0 \quad (23a)$$

$$l, m, n \geq 1 \quad (23b)$$

である。非線形項の第1項に対しては

$$l+m-n=0 \rightarrow m=n-l \quad (24)$$

であり、また $m \geq 1$ より $l \leq n-1$ でなければならない。第2項に対しては

$$l-m-n=0 \rightarrow m=l-n \quad (25)$$

であり、また $m \geq 1$ より $l \geq n+1$ である。第3項に対しては

$$-l+m-n=0 \rightarrow m=n+l \quad (26)$$

となり、 $m \geq 1$ より $l \geq 1-n$ となるが、式(23b)より $l \geq 1$ である。第4項に対しては

$$l+m+n=0 \rightarrow m=-l-n \quad (27)$$

となるが、式(23b)により成立しない。以上のことに加え成分波の個数を N として式(19)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dx} + \frac{h_x}{4h} A_n - \frac{\mu^2}{6} i n^3 \bar{k}_1^3 A_n \\ + \frac{3\epsilon i n \bar{k}_1}{8h} \left[\sum_{l=1}^{n-1} A_l A_{n-l} + \sum_{l=n+1}^N A_l A_{l-n}^* + \sum_{l=1}^{N-n} A_l^* A_{n+l} \right] = 0; \quad n=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)の非線形項の第2項と第3項は $2 \sum_{l=1}^{N-n} A_l^* A_{n+l}$ と一つにまとめることができる。次元量に直すと次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dx} + \frac{h_x}{4h} A_n - \frac{1}{6} i n^3 \bar{k}_1^3 h^2 A_n \\ + \frac{3i n \bar{k}_1}{8h} \left[\sum_{l=1}^{n-1} A_l A_{n-l} + 2 \sum_{l=1}^{N-n} A_l^* A_{n+l} \right] = 0; \quad n=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (29)$$

ただし、ダッシュは省略してある。式(29)の左辺第2項は浅水変形、第3項は波の分散性、第4項は波の非線形干渉を表すものである。これは、Freilich and Guza²⁾によって導かれた consistent shoaling model と等価である。ただし、Freilich and Guza²⁾は複素振幅表示を用いてないため実数の振幅と位相のそれぞれに対する非線形結合方程式となるが、ここでは複素振幅に対する非線形結合方程式となる。

式(29)の特徴を見るため、次の方程式を考える。

$$A_x + (\alpha + i\beta)A = 0 \quad (30)$$

ここで、 α および β は実数とし、 A を

$$A = ae^{i\phi} \dots\dots\dots (31)$$

と表す。ただし、 a は実数とする。式(31) を式(30) に代入して、虚数部と実数部について整理すると次のようになる。

$$a_x + aa = 0 \dots\dots\dots (32)$$

$$\phi_x + \beta = 0 \dots\dots\dots (33)$$

式(32) および式(33) の解は次のようである。

$$a = a_0 e^{-a(x-x_0)} \dots\dots\dots (34)$$

$$\phi = -\beta(x-x_0) \dots\dots\dots (35)$$

ここで、 a_0 および x_0 はそれぞれ初期振幅および初期位置である。 a が正であれば式(34)より振幅 a は伝播とともに減少し、 a が負であれば増加する。また、 β が正であれば式(35)より位相 ϕ は減少し、 β が負であれば増加する。すなわち、式(30) の第2項は a と β の正負によって複素振幅 A の振幅および位相を増減させるものである。

式(29)の左辺第2項の浅水変形項の係数は実数であり、波の伝播方向に水深が浅くなるとき $h_x < 0$ であるので振幅は増加し、左辺第3項の分散項は負の虚数であるので位相は増加する。第4項の非線形項は、各項が実数であるか、虚数であるか、またその正負によって振幅および位相の増減に寄与する。

3. 不規則波浪の浅水変形実験および周波数領域における KdV 方程式による計算結果

3.1 実験装置および実験方法

実験は長さ 27 m、幅 50 cm、深さ 75 cm の両面ガラス張り水槽で行なった。この水槽の一端には電気油圧式不規則波発生装置が設置されている。造波機は二つのアクチュエータを有しており、一つはピストン運動による造波、他はフラッター運動による造波を行なう。周期の長い波については前者、周期の短い波については後者の方法で造波する。今回の実験では前者を用いた。水槽の他端には海底勾配が 1/20 の一様勾配の模型海浜を設置した。一様水深部の水深は 47 cm とした。

実験に用いた不規則波は、ピーク周波数が 0.6 Hz の Pierson-Moskowitz 型スペクトルを有するもので、波群度係数 (Groupiness Factor) は 0.73 である。水位変動は、斜面法先部とそれより 2 m 造波板よりの地点、水深 30, 25, 20, 17.5, 15, 12.5, 10, 7.5, 5, 2.5 cm の各地点で測定した。データの記録時間は約 18 分、サンプリング間隔は 0.04 sec とした。

3.2 実験結果

Fig. 1 は最大波高 H_{max} 、1/10 最大波高 $H_{1/10}$ 、有義波高 $H_{1/3}$ 、平均波高 $\bar{H}$ の岸沖方向の変化を沖波有義波高 H_0 (7.04 cm) で無次元化して、無次元水深 h/H_0 に対して示したものである。最大波高は $h/H_0 = 2.49$ (水深 17.5 cm) で最大となる。この地点より碎波が生じる。1/10 最大波高、有義波高および平均波高は $h/H_0 = 1.78$ (水深 12.5 cm) から減少し始める。この地点から碎波が顕著になってくる。

Fig. 2 は波の代表量として有義波および平均波を用いてアーセル数 $Ur_{1/3}$ および $\bar{U}r$ を計算し、無次元水深に対してその変化を示したものである。Boussinesq 方程式、KdV 方程式の適用範囲はアーセル数が $O(1)$ の場合であるので、本実験に対しては $Ur_{1/3}$ を参照するとおおよそ $1.42 < h/H_0 < 2.84$ ($10\text{cm} < h < 20\text{cm}$) であるが、碎波は $h/$

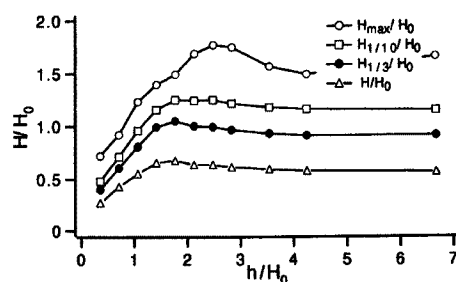


Fig. 1. Cross-shore variations of representative wave heights.

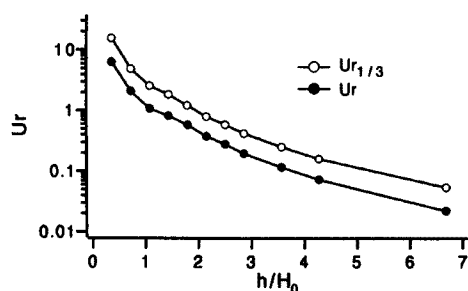


Fig. 2. Cross-shore variations of representative Ursell parameters.

$H_0 = 1.78$ ですでに顕著になっている。

Fig. 3 は各地点のエネルギースペクトルの実測値（実線）を示したものである。同時に式(29)による計算結果（点線）も載せてあるが詳細は後に説明する。スペクトルは次のように求めた。サンプリング間隔が 0.04 sec の約 18 分間のデータから、1 つ置きに取った 1024 個のサブセット（サンプリング間隔が 0.08 sec およびデータ長 81.92 sec）を 10 個作る。各サブセットに対してスペクトル計算を行なった後、アンサンブル平均する。そのアンサンブル平均したスペクトル値を 3 個ずつ移動平均してスペクトルの推定値とした。したがって、自由度は 60、ナイキスト

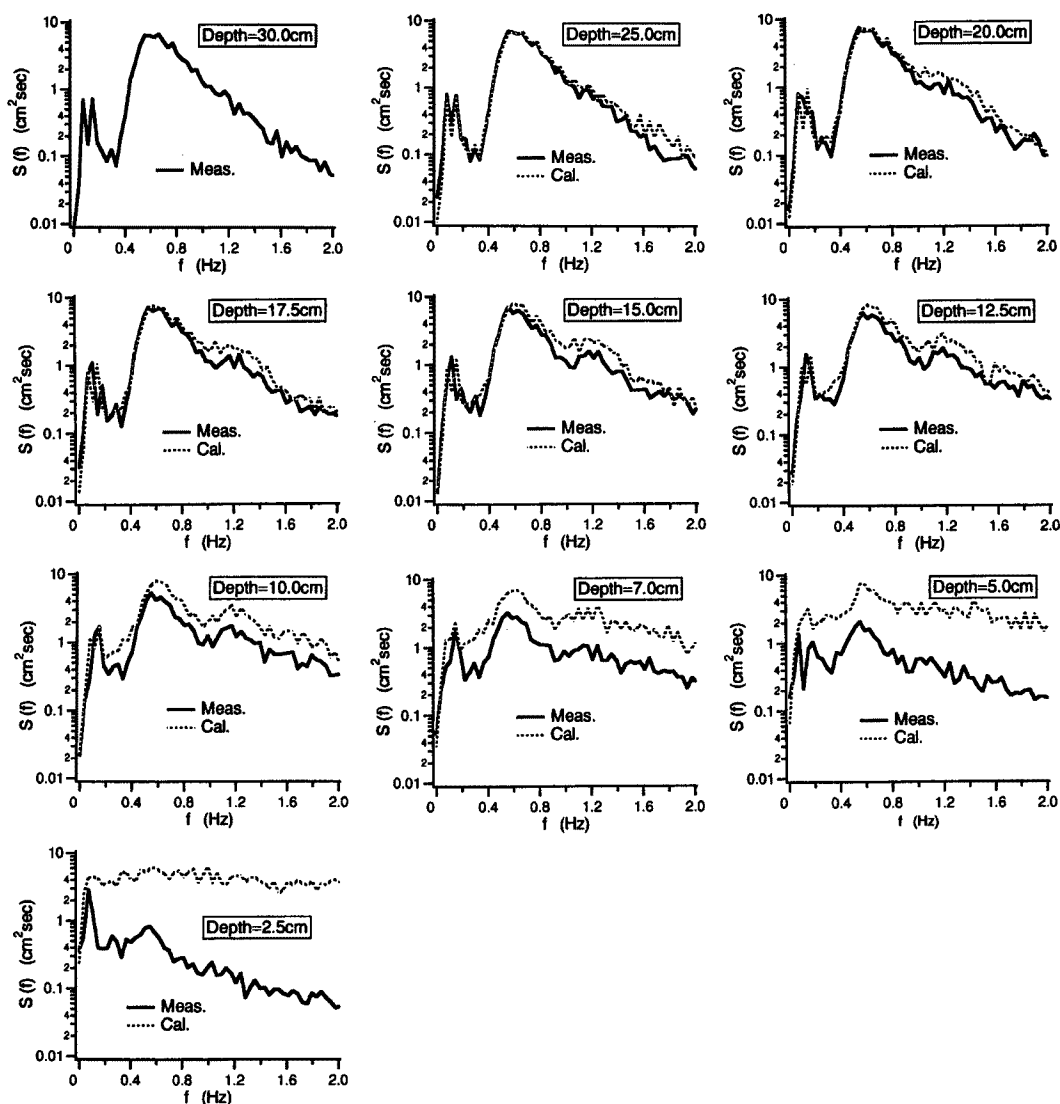


Fig. 3. Measured energy spectra and calculated ones by the frequency domain KdV equation of Eq. 29.

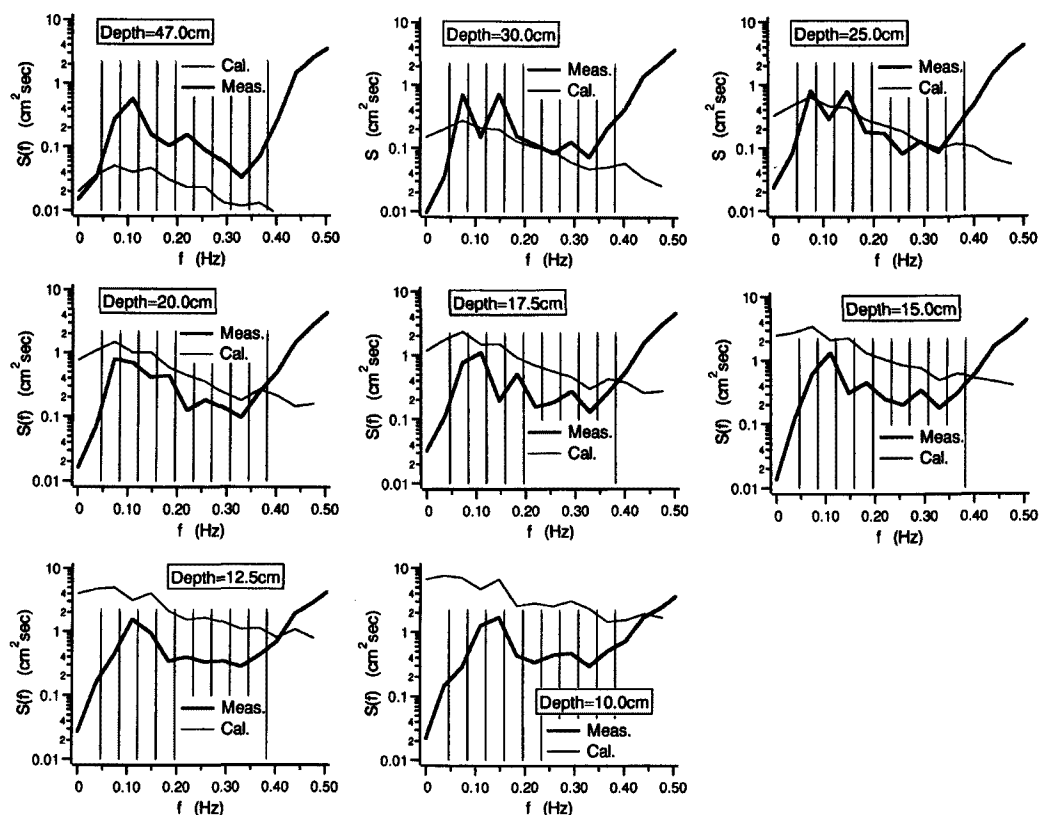


Fig. 4. Energy spectra in low frequency region.

周波数は 6.25 Hz, 分解周波数は 0.037 Hz である。

水深の大きい領域 ($h \geq 25$ cm) ではピーク周波数の 2 倍調和周波数周辺のエネルギーピークは見られないが, 水深 15 cm の地点では 2 倍調和成分のエネルギーピークがはっきり現われ, また 3 倍調和周波数周辺のエネルギーピークも若干現われている。水深 15 cm の地点はすでに最大波高が減少している地点である。水深 12.5 cm の地点におけるスペクトルは, 水深 47 cm 地点のそれに比べてピーク周波数周辺のエネルギー密度が減少しており, また高周波領域のエネルギー密度が全体に増加している。水深が 5 cm と浅くなるとエネルギー分布は平坦になってくる。水深が 2.5 cm の地点ではピーク周波数であった 0.6 Hz のエネルギー密度が小さくなり, 低周波成分のエネルギー密度の方が大きくなっている。

低周波数成分は 2 次干渉によって生じる成分だけでなく, 水槽内の多重反射による成分も含まれていると思われる。Fig. 4 は, $h > 10$ cm の地点に対して, 低周波領域を拡大してエネルギー・スペクトルを示したものである。図中の太線は実測スペクトル, 細線は Sand⁴⁾ の 2 次干渉理論によって求めたスペクトル, 縦線は水槽内に生じる共振周波数を示すためのものである。共振周波数は以下のように求めた。Flick et al.⁵⁾ によると, Fig. 5 に示した水平床と斜面からなる地形上での重複波の波形は次のようになる。

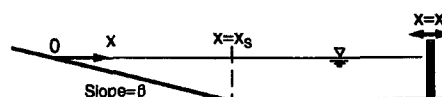


Fig. 5. Bottom topography.

$$\eta = a_p \left(\frac{x_s}{x} \right)^{1/4} \cos \left\{ \left(\frac{4\omega^2 x}{g\beta} \right)^{1/2} - \frac{\pi}{4} \right\} \cos \omega t, \quad 0 < x \leq x_s \quad \dots \dots \dots (36a)$$

$$\eta = a_p \cos \left\{ \left(\frac{\omega^2}{g\beta x_s} \right)^{1/2} (x + x_s) - \frac{\pi}{4} \right\} \cos \omega t, \quad x_s < x \dots \dots \dots (36b)$$

ここで、 β は斜面勾配である。ただし、式(36) は汀線の極く近傍では使えない。もし、 $x = x_L$ に造波板があって水槽内で共振が起こっているものとする、 $x = x_L$ は波の腹でなければならない。したがって、次式が成り立つ。

$$\left(\frac{\omega^2}{g\beta x_s} \right)^{1/2} (x_L + x_s) - \frac{\pi}{4} = n\pi \dots \dots \dots (37)$$

すなわち、

$$\omega_n = 2\pi f_n = \left(n + \frac{1}{4} \right) \pi \frac{\sqrt{g\beta x_s}}{x_L + x_s} \dots \dots \dots (38)$$

である。本実験に対して、 $x_s = 9.4$ m, $x_L = 19.4$ m, $\beta = 1/20$, $n = 1, 2, \dots, 10$ として、 f_n を求めた結果が Fig. 4 の縦線である。Sand⁴⁾ の 2 次干渉理論は一定水深に対するストークス波領域に対して適用できるものであるが、水深 47 cm の地点においては実測値は 2 次干渉理論値に比べかなり大きく、模型海浜からの反射波および多重反射成分波が含まれている可能性がある。 $h = 30$ cm および 25 cm のデータに対しては、実測値と理論値の対応が良いが、これらの低周波成分が拘束波であるとは言いきれない。 $f = 0.11$ Hz の成分波の岸沖方向の振幅変化の実測値を Fig. 6 に示す。理論的に求める共鳴周波数は $f = 0.12$ Hz である。図中の曲線は $f = 0.11$ Hz および $f = 0.12$ Hz として、式(36)によって計算した振幅分布である。 $f = 0.11$ Hz の実測された岸沖方向の振幅変化は、 $f = 0.11$ Hz の計算結果よりも $f = 0.12$ Hz の計算結果に近い。他の低周波成分については理論値との対応が良くないものもある。すなわち、低周波領域の成分は 2 次干渉によるもの、多重反射によるもの、その他の要因によるものが混在しており、一つの要因で説明するのは無理である。

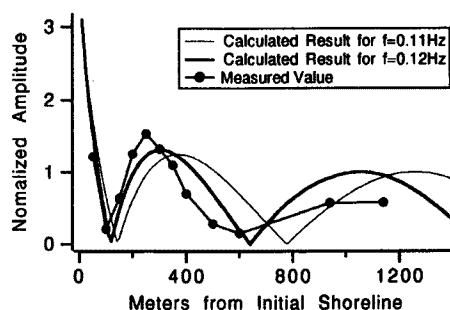


Fig. 6. Cross-shore variations of measured and calculated amplitudes of low frequency component wave.

3.3 スペクトル変化に関する実験結果と計算結果の比較

水深 30 cm の地点における複素振幅の実測値を初期条件としてその後の変化を計算し、スペクトルを求めた。具体的には、一つのサブセットをフーリエ変換して複素振幅 A_n を求め、これを初期条件として式(29)により A_n の変化を計算し、スペクトル値を求める。10 個のサブセットの結果をアンサンブル平均した後、3 点ずつの移動平均をとりスペクトル推定値とした。基本周波数 ω_1 は $\{2\pi/(1024 \times 0.08)\}$ Hz である。成分波の個数 N は 200 とした。式(29) の非線形連立微分方程式の数値計算に当たっては、Bulirsch-Store 法 (Press et al.⁶⁾) を用いた。

Fig. 3 に、実験結果に加えて、計算結果 (点線) をプロットしてある。計算結果は、実測結果と同様、水深が浅くなるにつれて 2 倍調和周波数周辺のエネルギー密度が増加する。計算結果の変化傾向は実測結果のそれをよく表しているが、値自体は計算結果が大きい。これは、すべての成分波の浅水変形式として Green の式を用いていることおよび砕波によるエネルギー減衰を考慮していないことによる。

ここで式(29)の非線形項の影響を見るため、Fig. 7 にすべての成分波に対し微小振幅波理論を適用し

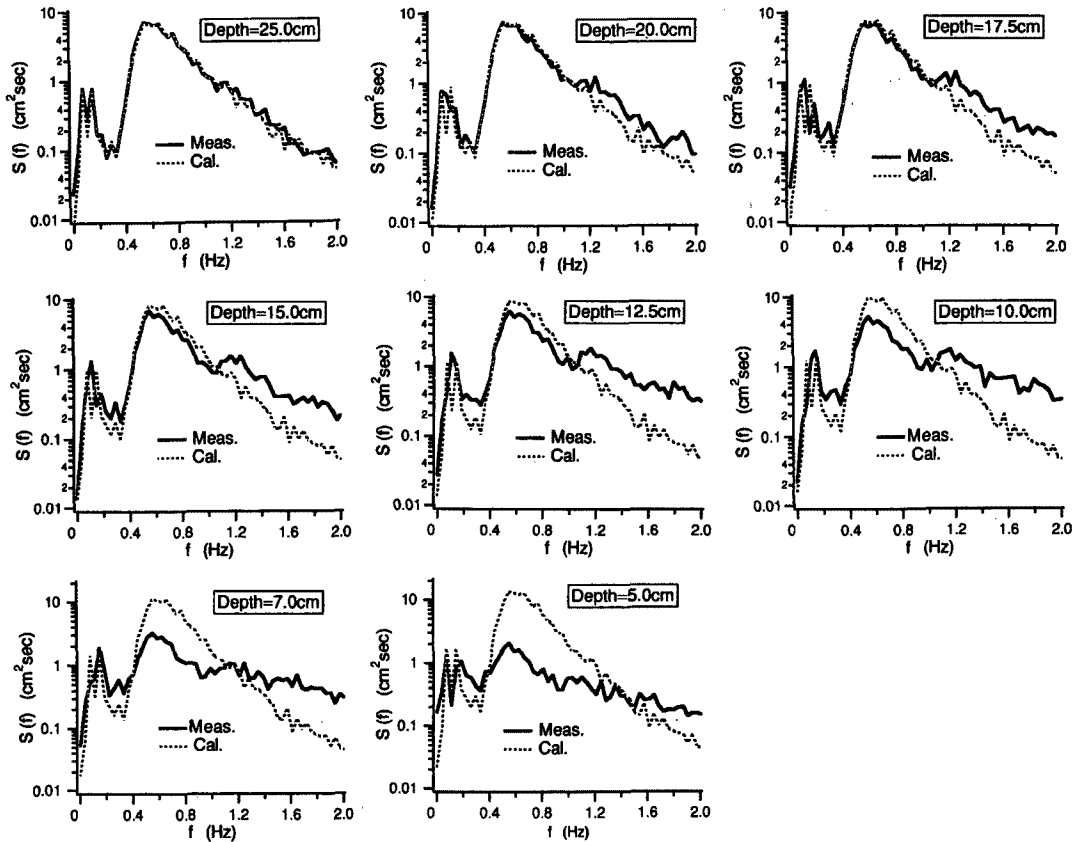


Fig. 7. Comparison of calculated energy spectra by the small amplitude wave theory with measured ones.

て求められるスペクトル（点線）と実験結果（実線）を示した。微小振幅波理論による結果は、水深が浅くなってもスペクトル形は相似形を保ったまま大きくなるだけで、ピーク周波数周辺のエネルギー密度の減少、高周波領域のエネルギー密度の増大は見られない。このことから非線形干渉項の重要性がわかる。

4. 周波数領域における修正 KdV 方程式

式(29)における浅水変形項を次式に基づいて考察する。

$$\frac{dA_n}{dx} = -\frac{h_x}{4h} A_n \quad \dots\dots\dots (39)$$

式(39) を $x=0$ から x まで積分すると、

$$\frac{A_n(x)}{A_n(0)} = \left\{ \frac{h(x)}{h(0)} \right\}^{-1/4} \quad \dots\dots\dots (40)$$

が得られる。これは Green の式である。すなわち、式(29)では成分波の振幅変化を Green の式により算定することになる。そのため、低周波成分の振幅算定に対しては妥当であるが、高周波成分に対しては振幅を過大に算定することになる。Fig. 3 で、碎波が影響しない領域においても、計算結果が実験結果よ

り大きくなるのはこれが主な原因である。ここで、以下の式を考える。

$$\frac{dA_n}{dx} + \frac{(C_{g_n})_x}{2C_{g_n}} A_n = 0 \quad (41)$$

ここで、 C_{g_n} は次式で示される群速度である。

$$C_{g_n} = \frac{1}{2} \frac{\omega_n}{k_n} \left(1 + \frac{2k_n h}{\sinh 2k_n h} \right) \quad (42)$$

式(41) を積分すると、

$$\frac{A_n(x)}{A_n(0)} = \left\{ \frac{C_{g_n}(x)}{C_{g_n}(0)} \right\}^{-1/2} \quad (43)$$

が得られる。これは微小振幅波理論の浅水変形式であり、長波領域では Green の式となる。すなわち、浅水変形を正しく表すには式(41)がよい。

次に、分散項について考える。一定水深における線形波に対しては、式(29) は次のようになる。

$$\frac{dA_n}{dx} - \frac{1}{6} i n^3 k_1^3 h^2 A_n = 0 \quad (44)$$

水位変動は

$$\zeta = \frac{1}{2} A_n e^{i(nk_1 x - n\omega_1 t)} + \text{c. c.} \quad (45)$$

で表される。ここで、

$$A_n = a_n e^{i\phi_n} \quad (46)$$

と表す。ただし、 a_n は実数とする。式(45)と(46)を式(44) に代入して、実数部と虚数部をそれぞれ整理すると次のようになる。

$$a_{n_x} = 0 \quad (47)$$

$$\phi_{n_x} = \frac{1}{6} n^3 k_1^3 h^2 \quad (48)$$

したがって、

$$a_n = \text{constant} \quad (49)$$

$$\phi_n = \frac{1}{6} n^3 k_1^3 h^2 x \quad (50)$$

である。式(49) と式(50) を用いて式(45) を書き直すと、

$$\zeta = \frac{1}{2} a_n e^{i(\frac{1}{6} n^3 k_1^3 h^2 x)} e^{i(nk_1 x - n\omega_1 t)} + \text{c. c.} = \frac{1}{2} a_n e^{i((nk_1 + \frac{1}{6} n^3 k_1^3 h^2)x - n\omega_1 t)} + \text{c. c.} \quad (51)$$

となる。式(51) より波速は次のようになる。

$$C_n = \frac{\omega_1}{k_1} \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{(nk_1 h)^2}{6} \right\}} \quad (52)$$

ここで ω_1/k_1 は浅海長波の波速 $\sqrt{gh}$ であり、 nk_1 を改めて k とおくと、式(52) は

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{1 + \frac{(kh)^2}{6}} \quad \text{..... (53)}$$

となる。

Fig. 8 は、 kh に対して式(53)の関係式および次式の微小振幅波理論の関係式を示したものである。

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{\tanh kh}{kh}} \quad \text{..... (54)}$$

この図によると、式(53)の関係式は $kh \leq 1.0$ では式(54)の関係式の良い近似になっているが、 kh が大きくなると近似精度が悪くなる。分散項を以下のようにすると式(54)の分散関係を表すことができる。

$$\frac{dA_n}{dx} - ink_1 \left(\sqrt{\frac{nk_1 h}{\tanh nk_1 h}} - 1 \right) A_n = 0 \quad \text{..... (55)}$$

以上のことから、式(29)の浅水変形項を式(41)におけるそれに置き換え、また式(29)の分散項を式(55)のそれに変えた次式の修正 KdV 方程式を提案する。

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dx} + \frac{(C_{g_n})_x}{2C_{g_n}} A_n - ink_1 \left(\sqrt{\frac{nk_1 h}{\tanh nk_1 h}} - 1 \right) A_n \\ + \frac{3ink_1}{8h} \left[\sum_{l=1}^{n-1} A_l A_{n-l} + 2 \sum_{l=1}^{N-n} A_l^* A_{n+l} \right] = 0; \quad n=1, 2, \dots, N \quad \text{..... (56)} \end{aligned}$$

分散関係を正しく表すための KdV 方程式の修正は安田ら⁷⁾によっても行なわれている。しかし、その方程式は浅水変形を正しく表していない。式(56)を用いた計算結果と実測結果を比較したものが Fig. 9 である。この Fig. 9 と Fig. 3 を比べると、明らかに修正式を用いた計算結果の方が実験結果に近づいたのがわかる。実験結果と計算結果の対応は水深が 10 cm まで良好であるが、 $h = 10$ cm の地点では 1/10 最大波高、有義波高および平均波高が減少しエネルギーの減衰が生じているので、エネルギー減衰を考慮していない計算結果は実験結果より若干大きくなっている。これより水深が小さくなると理論モデルにエネルギー減衰項を導入しなければならない。

5. あ と が き

本研究は、不規則波浪の成分波に対する浅水変形式を KdV 方程式から導き、水理実験を実施してその適用性を検討した。この浅水変形モデルは、KdV 方程式の適用範囲内（長波領域）における不規則波浪に対して厳密に適用できるものである。実験による不規則波はすべての成分波に対して長波近似が適用できないので、浅水変形が Green の法則に基づくこのモデルは成分波の振幅変化を過大評価する。

そこで、線形波に対し浅水変形と分散関係を厳密に表せる修正 KdV 方程式を提案した。この修正 KdV 方程式モデルを用いると、砕波帯にいたる不規則波のスペクトルの変化をかなりうまく表すことができる。この予測モデルは厳密に波動理論に基づくものではないが、使いやすく、実用的である。計算された複素振幅を用いれば逆フーリエ変換により水位変動を求めることができるので、波の時系列、代表波

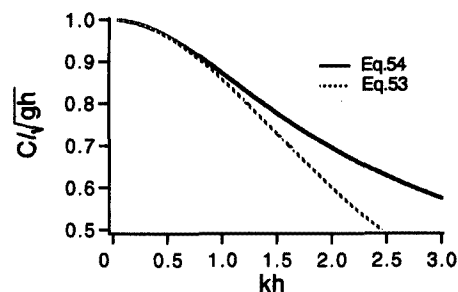


Fig. 8. Phase speed by Eq. 53 and by the small amplitude wave theory of Eq. 54.

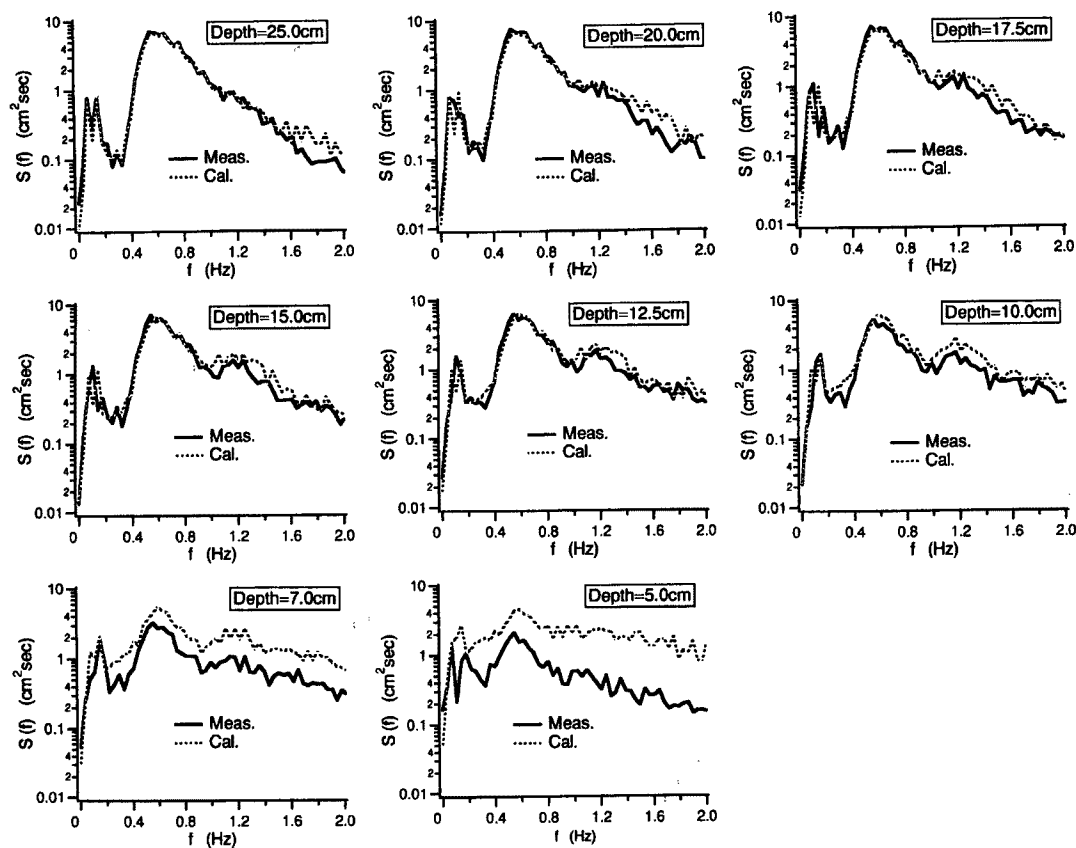


Fig. 9. Measured energy spectra and calculated ones by the modified frequency domain KdV equation of Eq. 56.

高、波高分布も得ることができる。

しかし、ここでは水位変動そのものについての実験結果と理論結果の比較は行なっていないので、この点を詳細に調べるとともに、砕波後の不規則波浪の変化についても予測できるように、砕波によるエネルギー減衰は振幅のみに影響するのか、あるいは位相にも影響するのかを検討した上で、修正 KdV 方程式にエネルギー減衰項を導入する予定である。

本研究は、京都大学後援会の助成金による米国 Univ. of Delaware での研究の一部であり、ここに謝意を表す。滞在中便宜を図って頂いた Univ. of Delaware の Ocean Engineering Group のスタッフ一同、なかでも研究ならびに生活面で非常にお世話頂いた Prof. Nobuhisa Kobayashi に深謝する次第である。

参考文献

- 1) Peregrine, D.H.: Long waves on a beach, Jour. Fluid Mech., Vol. 27, 1967, pp. 815-827.
- 2) Freilich, M.H. and Guza, R.T.: Nonlinear effects on shoaling surface gravity waves, Phil. Trans. R. Soc. Lond., A 311, 1984, pp. 1-41.
- 3) Liu, P.L.-F., Yoon, S.B. and Kirby, J.T.: Nonlinear refraction-diffraction of waves in shallow water, Jour. Fluid Mech., Vol. 153, 1985, pp. 185-201.

- 4) Sand, S. E.: Long wave problems in laboratory models, Jour. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 108, No. 4, ASCE, 1982, pp. 195 - 208.
- 5) Flick, R. E., Inman, D. L. and Guza, R. T.: Two dimensional surf beat, Proc. 17 th Coastal Eng. Conf., ASCE, 1980, pp. 624 - 638.
- 6) Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T.: Numerical Recipes, Cambridge Univ. Press, 1989, pp. 563 - 568.