

- 5) D. J. Kaup, A. C. Newell: J. Math. Phys. **19** (1978) 798.
- 6) T. Kawata, H. Inoue: J. Phys. Soc. Japan. **44** (1978) 1968.
- 7) M. Wadati, K. Konno, Y. H. Ichikawa: J. Phys. Soc. Japan **46** (1979) 1965.
- 8) M. Wadati, K. Konno, Y. H. Ichikawa: J. Phys. Soc. Japan **47** (1979) 1698.
- 9) K. Konno, Y. H. Ichikawa, M. Wadati: J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 1025.
- 10) Y. Ishimori: J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 2471.
- 11) H. C. Yuen, W. E. Ferguson: Phys. Fluids. **21** (1978) 2116.
- 12) J. Satsuma: J. Phys. Soc. Japan **40** (1976) 286.
- 13) F. Kako, N. Yajima: J. Phys. Soc. Japan **49** (1980) 2063.
- 14) M. Makino, T. Kamimura, T. Taniuti: J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 980.
- 15) G. L. Lamb, Jr.: J. Math. Phys. **18** (1977) 1964.
- 16) F. Lund, T. Regge: Phys. Rev. D, **14** (1976) 1524.

Singularities of the Principal Chiral Field on $SL(N, R)$

*V. E. Zakharov,

* ランダウ理論物理研究所

*A. V. Mikhailov,

** 富山大学工学部

** 川 田 勉

近年、相対論的に不変な非線形場の研究が盛んである。Zakharov 等は,¹⁻³⁾ パラメータ λ を含む N 次行列微分方程式,

$$\phi_{\xi} = \frac{U}{1+\lambda} \phi, \quad \phi_{\eta} = \frac{V}{1-\lambda} \phi, \quad (1)$$

により, Principal Chiral 方程式

$$(g_{\eta} g^{-1})_{\xi} + (g_{\xi} g^{-1})_{\eta} = 0, \quad (2)$$

が, 逆散乱法に沿って解ける事を示した。但し, ξ, η は light-cone 座標, $\xi = (t-x)/2$, $\eta = (t+x)/2$ である。(2) は, 現在迄知られている大半の 2 次元モデル, 南部等のカイラ

川田 勉

ルモデル, Gross-Neveu の $Sp(2N, \mathbf{R})$ モデル,⁴⁾ Lund-Regge のモデル, その他を含んでいる。ここでは, $g \in SL(N, \mathbf{R})$ として, Soliton 解の分類と, この場合の特徴である解の発散の $x-t$ 空間上の軌道 (Singularity) を調べる。

(1) で $U = g_\xi g^{-1}$, $V = g_\eta g^{-1}$ とすれば, g が実及び $\det g = \text{const.}$ より, U, V も実で更に,

$$\text{Tr. } U = \text{Tr. } V = 0 \quad (3)$$

又, (1) の積分可能条件,

$$U_\eta + V_\xi = 0, U_\eta - V_\xi + [U, V] = 0, \quad (4)$$

は (2) に一致し, 解 g は (1) の λ -parameter 解 $\Phi(\lambda)$ を知れば, $g = \Phi(0)$ で与えられる。

(4) の trivial 解 (実定数とする) U_0, V_0 が Jordan 標準とすれば, 次式の解 J_1, J_2 は可換となる。

$$J_{1\xi} = \frac{U_0}{1+\lambda} J_1, J_{2\eta} = \frac{V_0}{1-\lambda} J_2. \quad (5)$$

真空解 $J = J_1 J_2$ で Φ を因子化する,

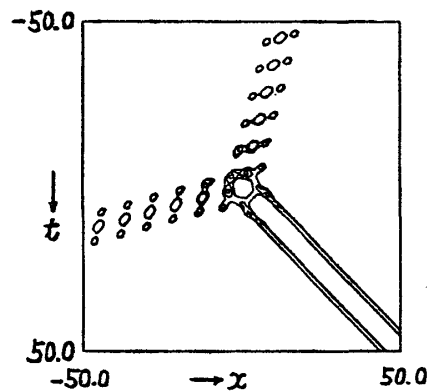


図1 3×3 -Breather Soliton の Singularity. 3 ヶの 2×2 -Soliton の共鳴作用にみえる。但し,

$$\lambda_1 = -\bar{\lambda}_1 = 0.75 + i$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0.866 \end{pmatrix}, V_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

(積分定数値は省略)

$$\Phi(\lambda) = \Psi(\lambda) J(\lambda). \quad (6)$$

λ 独立な行列, $\Phi_1 = \Psi(1) J_1(1)$, $\Phi_2 = \Psi(-1) J_2(-1)$ を導くと, (1), (5) より

$$V \Phi_1 = \Phi_1 V_0, \quad U \Phi_2 = \Phi_2 U_0, \quad (7)$$

$$2 \Phi_{1\xi} = (\Phi_2 U_0 \Phi_2^{-1}) \Phi_1, \quad 2 \Phi_{2\eta} = (\Phi_1 V_0 \Phi_1^{-1}) \Phi_2, \quad (8)$$

を得る。(3), (7) より $\text{Tr. } U_0 = \text{Tr. } V_0 = 0$, U, V の行列式は保存する事が判る。

詳細は省くが (6) の $\Psi(\lambda)$ は, $\Psi^{-1}(\lambda)$ も同様だが, λ に関する部分分数展開を指定すれば決定できる。対称性 $\Psi(\lambda^*) = \Psi^*(\lambda)$ を考慮して次の形が採用された。

$$\Psi(\lambda) = E + \sum_{j=1}^{M_1} \frac{A_j}{\lambda - \lambda_j} + \sum_{j=1}^{M_1+M_2} \left(\frac{A_j}{\lambda - \lambda_j} + \frac{A_j^*}{\lambda - \lambda_j^*} \right), \quad (9)$$

$\Psi^{-1}(\lambda)$ も同様の形である。^{*}ここに A_j は λ 独立である。右辺第二項の (A_j, λ_j) は実数であり, 第三項では複素数である。表示 (9) は, M_1 ケの non-breather soliton と M_2 ケの breather soliton を記述すると考えておく。解の構成は, 最終的には連立方程式の解法に帰着される。Cramer 公式を使う際に現れる行列式は, $x-t$ 空間内のある曲線で消失し, 解が発散する。この発散の軌跡 (Singularity) は, 行列 U_0, V_0 の形と, モードが non-breather か breather かに強く影響される。当然の事ながら, non-breather は自由度が低く簡単であり, Singularity の発生は, パラメータ^{**}) に依る。

以下では, Singularity が常に現れる breather モードに話を限定し, 基本的な 2×2 -Soliton ($N=2$) とその応用に少し触れる。

$N=2$ では $U_0 = V_0$ として良く, $\det U_0$ の符号で分類される。次の 2 種を考えるものとする。

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

(i) $\det U_0 < 0$: Pohlmeyer⁵⁾ に習って (4) を 2 ケの実スカラー場の方程式に直せる。結果は, $SU(2) \times SU(2)$ 不変の式⁵⁾ を $\sinh(\cdot)$ 形に変えたものとなっている。Singularity は, $t-x$ 面の帯状域内に概周期的に分布する閉曲線となる。

(ii) $\det U_0 = 0$: (8) に対称性 $\Phi_{1,2}^T = S \Phi_{1,2}^{-1} S^{-1}$ ($S = \delta_3 \delta_1$) を課すと, Gross-Neveu の $Sp(2, \mathbf{R})$ モデル⁴⁾ を得る。Singularity は ξ, η 軸に漸近する双曲線となる。

$N > 2$ の時でも遠方における Singularity の様子が解析できる。図 1 は、 $N = 3$, $\det U_0 < 0$ のケースの数値例である。(9)で soliton 数を、 M_1, M_2 とするのは早計かも知れない。 $\det U_0 < 0$ で $M_2 = 2$ のケースを計算して 3 ケの 2×2 -Soliton を遠方で得た。

終りに (2) のエネルギー及び運動量密度,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \text{Tr.} (U^2 + V^2), \quad \mathcal{D} = -\text{Tr.} (U^2 - V^2), \quad (11)$$

を 2×2 non-breather モードについて求める。 $\det U_0 < 0$ では、 $\mathcal{H} = 1$, $\mathcal{D} = 0$, $\det U_0 = 0$ では、 $\mathcal{H} = \mathcal{D} = 0$ を得る。

注釈

- *) その pole を $\bar{\lambda}_k$ とする。
- **) 求積の際に現れる積分定数を指す。

参 考 文 献

- 1) V. E. Zakharov and A. B. Shabat: Func. Anal. Appl. **14** (1980) 166.
- 2) V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov: Soviet Physics JETP **47** (1978) 1017.
- 3) V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov: Comm. Math. Phys. **74** (1980) 21.
- 4) A. Neveu and N. Papanicolaou: Comm. Math. Phys. **58** (1978) 31.
- 5) K. Pohlmeyer: Comm. Math. Phys. **46** (1976) 207.

スピン系, $SU(2)$ - ゲージ場, 軸対称重力場方程式
の関連性, ある種の厳密解と準粒子的励起

京工織大・工芸 武 野 正 三

§ 1 Introduction

ソリトンの数理物理の面白さの一つは、広い意味でのソリトンを記述する非線型微分方程式が、微分幾何学、一般相対論、場の理論、プラズマ物理、流体力学、格子力学、磁性体の物理学、高分子物理、生体物理等に於て、同じ形で或は類似の形で現われることであろう。ソリト