

Orlicz の問題について

岡山大 理

秋田 実

(Minoru Akita)

作陽短大

後藤 和雄

(Kazuo Gotô)

岡山大 理

鹿野 健

(Takeshi Kano)

Orlicz は Scottish Book の中で、次の問題を提出した ([1], [2])。

Orlicz の問題 (No. 121) 次の 2 つの条件を満たす三角級数の例をあげよ。

$$(1) \quad \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

がすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して発散する。

$$(2) \quad \sum (|a_n|^{2+\varepsilon} + |b_n|^{2+\varepsilon}) < +\infty \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

本稿の主要な目的は、Orlicz の問題の例をひとつあげることである。この問題は Banach と彼の仲間たちによって、特に Orlicz [3] によって研究された。

ここで、次のことを注意しておく。この問題の真の難解さあるいは真の精神は、Orlicz が単なる存在定理を求めたので

はなく、具体的な例を求めたことにある。また、その例が、すべての x に対して発散する性質を備えていなければならないことにある。

まず第一に、指数級数

$$(3) \quad \sum c_n e^{2\pi i n x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

のある部分和の大きさに関する知られた結果を利用して、部分的な解を述べよう。

Proposition 1. $c_n = n^{-\frac{1}{2}} \exp(i a n \log n) \quad (a > 0)$

とあくと、このとき指数級数(3)はほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して発散する。しかも

$$\sum |c_n|^{2+\varepsilon} < +\infty \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

が成立する。

これは M. Weiss の結果 [4] から従う。彼女は Onlicz の問題について知らなかつたらしい。彼女は確率論的手法によつて、指数級数

$$\sum n^{-\frac{1}{2}} \exp(i \beta n \log n + i n \theta)$$

のふるまひを研究した。

Proposition 2.

$$c_n = \begin{cases} k^{-\frac{1}{2}} (\log k)^{-\frac{1}{4}} & \text{if } n = k^2 > 1, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とあくと、このとき、Proposition 1 と同様の結果が成立する。

このことは Fiedler - Junkat - Körner の結果 [5] から従う。彼らは指数和

$$S_N(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{\pi i n^2 x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

のほとんどすべての x に対する評価に興味をもって研究した。

Proposition 3. 指数級数 (3) がすべての x に対して発散し、しかも、

$$\sum |c_n|^{2+\varepsilon} < \infty \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

となるような数列 $c_n \rightarrow 0$ が存在する。

このことは T.W. Körner の結果 [6] から従う。Körner は、とりわけ、次の結果を証明した：

N が十分大きければ、すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\sqrt{N} \ll \sum_{1 \leq n \leq N} a_n e^{i n t} \ll \sqrt{N}$$

となるような複素数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$ が存在する。ただし、

$|a_n| = 1$ ($n=1, 2, \dots, N$) である。

しかし、Körner の証明の方法は effective ではなく、Onlicz の問題の具体例を与えることは出来ない。

他方、Hardy と Littlewood [7] は異なった見地から次の不等式を証明した：

$$S(N) = \sum_{n \leq N} \exp(2\pi i(\alpha n \log n + \beta n)) \ll \sqrt{N}$$

uniformly in $\alpha \neq 0$ and $\beta \in \mathbb{R}$.

我々の知るかぎり, $S(N) \gg \sqrt{N}$ ($\forall \beta \in \mathbb{R}$) であるかどうかについて研究された様子がない。従って, 次の定理を証明しよう。

定理. α を正の実数, β を実数とする。このとき, 次の不等式が任意の α, β に対して成立する。

$$(4) \quad \left| \sum_{e^{\frac{1}{\alpha}} N < n \leq N} \exp(2\pi i(\alpha n \log n + \beta n)) \right| \geq C_{\alpha} \sqrt{N}.$$

ただし, C_{α} は α のみに依存する定数である。

このとき, 次の系が成立する。

系 1.

$$\begin{aligned} S_N &= \left| e^{-i\alpha} \sum_{N < n \leq N} \cos(2\pi \alpha n \log n + n\alpha) \right| \\ &\geq \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{1}{2\alpha}} \left| \cos\left(2\pi \alpha N \exp\left(-\frac{\{ \alpha \log N + \alpha + \alpha \}}{\alpha}\right) - \frac{\pi}{4}\right) \right| + O\left(\frac{1}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

ただし, $\{y\}$ は y の小数部分を表わす。

さて, ここで, Orlicz の問題の例をひとつ与える。三角級数(1)で

$$(5) \quad \begin{cases} a_n = n^{-\frac{1}{2}} \cos(2\pi \alpha n \log n), \\ b_n = -n^{-\frac{1}{2}} \sin(2\pi \alpha n \log n) \end{cases}$$

とおく。この例が問題の条件をある α に対して満たしている

ことを示そう。まず

$$\sum (|a_n|^{2+\varepsilon} + |b_n|^{2+\varepsilon}) < +\infty \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

が成立するのはおきらかである。次に、三角級数(1)がすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して発散することを示す。そのために、次の補題を必要とする。

補題 (Hardy の Divergent Series 定理 26 参照) 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

が収束するならば、任意の正数列 $k_n \uparrow \infty$ に対して、

$$\sum_{A \leq n \leq N} k_n d_n = o(k_N)$$

が成立する。ただし、 A は定数で、 $0 \leq A < 1$ である。

今、三角級数(1)がある α に対していたるところ発散することをも背理法によつて証明する。三角級数

$$\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum n^{-\frac{1}{2}} \cos(2\pi \alpha n \log n + nx)$$

がある x に対して収束すると仮定すると、上の補題において $k_n = \sqrt{n}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{A \leq n \leq N} \cos(2\pi \alpha n \log n + nx) = o(\sqrt{N})$$

がある $x \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ。しかし、系 1 から

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{\sqrt{N}} > 0$$

がある x とある α (たとえば $\alpha = 1, 1/\log 2$) に対して成立する。たとえば、 $\alpha = 1$ に対して同時近似の定理を利用して、

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \cos(2\pi\alpha \exp(-\frac{\beta \log N + \alpha + \beta}{\alpha})) - \frac{\pi}{4} \right| > 0$$

を示すことが出来る。これは矛盾である。従って三角級数(1)はどのような α に対して、いたるところ発散する。

最後に、定理の略証を記す。

$$f(x) = \alpha x \log x + \beta x \quad (\alpha > 0, 0 \leq \beta < 1)$$

とおくと、 $f'(x)$ は単調増加関数だから

$$f'(y_k) = k - \frac{1}{2}, \quad y_k < y_{k+1}$$

となるような数列 $y_k (k \in \mathbb{N})$ が存在する。

$$M = [\alpha \log N + \alpha + \beta]$$

と定義する。ただし、 $[\cdot]$ は $\cdot$ の整数部分を表わす。このとき

$$y_M = e^{-\frac{1}{\alpha}} y_{M+1}.$$

$$S_M = \sum_{y_M < n \leq y_{M+1}} e^{2\pi i f(n)}$$

とおくと、van der Corput の補題[8]によつて、

$$S_M = \int_0^\infty e^{2\pi i (f(x) - Mx)} dx + O(1)$$

が成立する。ここで上の積分に対して stationary phase の方法[9]を使うと、

$$S_M = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta \log N + \alpha + \beta}{2\alpha}\right) \exp\left(\frac{\pi}{4}i - 2\pi i \alpha N \exp\left(-\frac{\beta \log N + \alpha + \beta}{\alpha}\right)\right) + O(1) + O(1/\alpha)$$

を得る。よって、定理が成立する。

もし、 α の値を制限すれば、次の系が成り立つ。

系 2. もし $0 < \alpha < 1/2 \log 2$ ならば、すべての $\beta \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\sum_{1 \leq n \leq N} \exp(2\pi i(\alpha n \log n + \beta n)) \gg \sqrt{N}$$

が成立する。ただし、不等式の定数は α のみに依存する定数である。

文 献

- [1] R.D. Mauldin (ed.): The Scottish Book. Birkhäuser, 1981.
- [2] T. Kano: On the size of some trigonometric polynomials,
In Polynômes Orthogonaux et Applications. Proceedings,
Bar-le-Duc, Lecture Notes in Mathematics, Springer,
No. 1171, 1984.
- [3] N.K. Bary: A Treatise on Trigonometric Series. vol. I,
Pergamon, 1964.
- [4] M. Weiss: On Hardy-Littlewood series. Trans. Amer. Math.
Soc., 91 (1954), 470-479.
- [5] H. Fiedler, W. Junktat and O. Körner: Asymptotic expansions of
finite theta series. Acta Arith., 32 (1977), 129-146.

- [6] T.W. Körner: On a polynomial of Byrnes. Bull. London Math. Soc., 12 (1980), 219 - 224.
- [7] G.H. Hardy and J.E. Littlewood: Some problems of Diophantine approximation: A remarkable trigonometrical series. Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., vol. 2 (1916), 583 - 586.
- [8] E.C. Titchmarsh: The Theory of the Riemann Zeta-Function. Oxford, 1951.
- [9] F.W.J. Olver: Error bounds for stationary phase approximations. SIAM. J. Math. Anal., vol. 5, No. 1 (1974), 19-29.