

CONSERVATIVENESS AND FELLER PROPERTY OF DIFFUSION PROCESSES ON RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH m -BAKRY-ÉMERY RICCI TENSOR FOR $m \leq 1$

桑江一洋 (K. Kuwae) 福岡大学理学部

1. LAPLACIAN の比較定理

中国科学院の Xiang-Dong Li 氏との Laplacian の比較定理に関する共同研究 [5] に基づき, 氏と北京師範大学の Songzi Li 氏との共同研究 [6] について報告する. (M, g) を完備で滑らかな境界のないリーマン多様体とする. $\phi \in C^2(M)$ を固定する. $C_0^\infty(M)$ 上の作用素 L を $L := \Delta - \langle \nabla \phi, \nabla \cdot \rangle$ で定めると, これは $\mu := e^{-\phi} \text{vol}_g$ について対称になる. すなわち $\int_M (-Lf)g d\mu = \int_M \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\mu =: \mathcal{E}(f, g)$ が $f, g \in C_0^\infty(M)$ で成立する. L を Witten Laplacian あるいは重み付き Laplacian と呼ぶ. ディリクレ形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $(\mathcal{E}, C_0^\infty(M))$ の $L^2(M; \mu)$ 上の最小閉拡張とし, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対応する拡散過程を $\mathbf{X} = (\Omega, X_t, \mathbf{P}_x)$ とおく. $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の $L^2(M; \mu)$ -半群は連続な熱核を許容することが知られている ($\phi \in C^\infty(M)$ のときは [3, 7.5] を参照). $m \in]-\infty, +\infty]$ に対して m -Bakry-Émery リッチテンソル $\text{Ric}_{m,n}(L)$ を

$$\text{Ric}_{m,n}(L)(x) := \text{Ric}(x) + \text{Hess } \phi(x) - \frac{\nabla \phi(x) \otimes \nabla \phi(x)}{m-n}$$

で定める. M 上の関数 K に対して $\text{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq K(x)$, $x \in M$ が成立するとき曲率次元条件 $\text{CD}(K, m)$ が成立すると呼ぶ. $m = n$ のときは ϕ は定数と規約する. この場合は $\text{Ric}_{m,n}(L)(x) = \text{Ric}(x)$ となる. $m \geq n$ で K が定数なら (M, d_g, μ) の $\text{RCD}(K, m)$ -条件と同値になる. ここでは $m \leq 1$ の場合に重み付き Laplacian L の比較定理 ([5]) に基づいて $\mathbf{X}$ の保存性と Feller 性への変形されたやや強い判定条件を与える. $r_p(x) := d_g(x, p)$ を距離関数とする.

定義 1.1 ((ϕ, m) -完備性). $m \leq 1$ とする. (M, g, ϕ) が (ϕ, m) -完備であると任意の $p \in M$ に対して

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^r e^{-\frac{2\phi(\gamma_t)}{n-m}} dt \mid \gamma \text{ は単位速度測地線で } \gamma_0 = p, \gamma_{r_p(x)} = x \right\} = +\infty$$

が成立することとする.

以下の比較定理は $m = 1$ で κ が定数の場合に [8] で最初に証明された.

定理 1.2 (Laplacian の比較定理 [5], cf. [8]). $x, p \in M$, $m \leq 1$ とする. $\text{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq (n-m)\kappa(s_p(x))e^{-\frac{4\phi(x)}{n-m}}$, $x \in B_R(p)$ なら,

$$Lr_p(x) \leq (n-m)\text{cot}_\kappa(s_p(x))e^{-\frac{2\phi(x)}{n-m}}$$

が $x \in \{r_p < R, s_p < \delta_\kappa\} \setminus \text{Cut}(p) \cup \{p\}$ で成立する. ここで κ は $[0, +\infty[$ 上の連続関数で, $s_p(x)$ は

$$s_p(x) = \inf \left\{ \int_0^{r_p(x)} e^{-\frac{2\phi(\gamma_t)}{n-m}} dt \mid \gamma \text{ は単位速度測地線で } \gamma_0 = p, \gamma_{r_p(x)} = x \right\}$$

で与えられる。さらに (M, g, ϕ) が (ϕ, m) -完備なら $x \in \{r_p < R\} \setminus \text{Cut}(p) \cup \{p\}$ で結論が成立する。ここで $\cot_\kappa$ は初期条件 $\lim_{s \rightarrow 0} s \cot_\kappa(s) = 1$ をみたす Riccati 方程式

$$(1.1) \quad -\frac{d\cot_\kappa}{ds}(s) = \kappa(s) + \cot_\kappa(s)^2,$$

の $[0, \delta_\kappa[$ 上の解で δ_κ はその爆発時刻である。 $\kappa \leq 0$ なら $\delta_\kappa = +\infty$ となる。 $\delta_\kappa < \infty$ なら末期条件 $\lim_{s \rightarrow \delta_\kappa} (\delta_\kappa - s) \cot_\kappa(s) = 1$ も満たされる。 κ が定数のときは $\kappa \leq 0$ の場合も含めて $\cot_\kappa(s) = \sqrt{\kappa} \cos(\sqrt{\kappa}s) / \sin(\sqrt{\kappa}s)$, $\delta_\kappa = \pi / \sqrt{\kappa_+}$ となる。

定理 1.2 の証明は以下の 2 つの補題に基づく。

補題 1.3. $m \leq 1$ とする。 γ_r を単位速度測地線で $\gamma_0 = p$ と $\dot{\gamma}_0 = \theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ を満たすものとする。 s を $ds = e^{\frac{-2\phi(\gamma(r))}{n-m}} dr$ を満たすパラメータとし, $\lambda(r, \theta) = (e^{\frac{2\phi}{n-m}} Lr_p)(r, \theta)$ とする。このとき

$$(1.2) \quad \frac{d\lambda}{ds} \leq -\frac{\lambda^2}{n-m} - e^{\frac{4\phi(\gamma(r))}{n-m}} \text{Ric}_{m,n}(L) \left(\frac{d\gamma}{dr}, \frac{d\gamma}{dr} \right)$$

となる。特に

$$(1.3) \quad \frac{d\lambda}{dr} \leq -e^{\frac{-2\phi(\gamma(r))}{n-m}} \frac{\lambda^2}{n-m} - e^{\frac{2\phi(\gamma(r))}{n-m}} \text{Ric}_{m,n}(L) \left(\frac{d\gamma}{dr}, \frac{d\gamma}{dr} \right)$$

が $x = (r, \theta) \notin \text{Cut}(p) \cup \{p\}$ で成立する。さらに等号がある点で成立すれば、その点において $\nabla^2 r_p$ は多重度 $n-1$ の零でない固有値を一つもつ。

補題 1.4 (リッカチ不等式の比較定理). $\kappa : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とし, a_κ を $]0, \delta_\kappa[$ で定義される境界条件 $\lim_{s \downarrow 0} a_\kappa(s) = +\infty$ を満たすリッカチ方程式 $a'_\kappa(s) + a_\kappa(s)^2 + \kappa(s) = 0$, $s \in]0, \delta_\kappa[$ の一意的な C^1 -解とする。 $S \in]0, +\infty[$ を固定する。 $b_\kappa(s)$ を $]0, S[$ での C^1 -関数で境界条件 $\lim_{s \downarrow 0} b_\kappa(s) = +\infty$ を伴うリッカチ不等式 $b'_\kappa(s) + b_\kappa(s)^2 + \kappa(s) \leq 0$ for $s \in]0, S[$ の解とする。このとき $b_\kappa \leq a_\kappa$ が $]0, S \wedge \delta_\kappa[$ 上で成立する。

補題 1.3 の証明は L に対する Bochner-Weitzenböck 公式: u が C^3 となる点で

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L |\nabla u|^2 &= |\nabla^2 u|^2 + \text{Ric}_{\infty,n}(L)(\nabla u, \nabla u) + \langle \nabla Lu, \nabla u \rangle \\ &= |\nabla^2 u|^2 + \text{Ric}_{m,n}(L)(\nabla u, \nabla u) - \frac{\nabla \phi \otimes \nabla \phi}{n-m}(\nabla u, \nabla u) + \langle \nabla Lu, \nabla u \rangle. \end{aligned}$$

を $u = r_p$ on $M \setminus \text{Cut}(p) \cup \{p\}$ で適用することと, $M \setminus \text{Cut}(p) \cup \{p\}$ 上で $|\nabla r_p| = 1$ より $\nabla^2 r_p$ に対して ∇r_p が固有値 0 に対応する固有ベクトルであることから従う不等式

$$|\nabla^2 r_p|^2 \geq \frac{(\Delta r_p)^2}{n-1} \geq \frac{(\Delta r_p)^2}{n-m}.$$

から得られる。

2. 主結果

$\phi_p(r) := \inf_{B_r(p)} \phi$ とする。K を $[0, +\infty[$ 上の非負連続な非減少関数で以下の (K) という条件を満たすとする:

$$(K): \quad \int_{r_o}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{K\left(e^{-\frac{2\phi_p(r)}{n-m}} r\right) e^{-\frac{2\phi_p(r)}{n-m}}}} = +\infty \quad \text{for some } r_o > 0.$$

注意 2.1. (1) 条件 (K) は $\phi_p(r) \leq \phi(p)$ から

$$(2.1) \quad \int_{r_o}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{K(r)}} = +\infty \quad \text{for some } r_o > 0$$

を常に意味する。さらに ϕ が下に有界なら逆も成立する。

(2) 条件 (K) は $p \in M$ には依存しない。

定理 2.2 (X の保存性). $p \in M$ を固定する。条件 (K) を仮定し

$$(2.2) \quad \text{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq -K(s_p(x))e^{-\frac{4\phi(x)}{n-m}} \quad \text{for any } x \in M$$

が $m \leq 1$ で成立するとする。このとき X は保存的である。

定理 2.3 (X の Feller 性). 条件 (K) を仮定し

$$(2.3) \quad \text{Ric}_{m,n}(L)(z) \geq -K(s_q(z))e^{-\frac{4\phi(z)}{n-m}} \quad \text{for any } z, q \in M$$

が $m \leq 1$ で成立するとする。このとき X は Feller 性をもつ。

例 2.4. $\varepsilon \in [0, 1]$ と $\delta \in [\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}, 1]$ を考える。K を正定数とし $K(r) = Kr^{2(1-\delta)}$ とおく。このとき (2.1) が常に成立する。非正 C^2 -関数 $\phi(x) = -\frac{(n-m)\varepsilon}{4} \log(1+r_p^2(x))$ を考える。このとき $\phi_p(r) \geq -\frac{(n-m)\varepsilon}{4} \log(1+r^2)$ であり、これより条件 (K) が成立する。特に $\varepsilon = \delta = 1$ の場合に次が成立する。もし $\text{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq -Ke^{-\frac{4\phi(x)}{n-m}}$ がすべての $x \in M$ に対して $m \leq 1$ で成立すれば、熱半群 $P_t = e^{tL}$ は保存性とフェラー性をもつ。

例 2.5. ユークリッド空間 $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{Euc}})$ の場合を考える。この場合は $\text{Ric}_{m,n}(L) = (n-m)e^{-\frac{\phi}{n-m}} \text{Hess}\left(e^{\frac{\phi}{n-m}}\right)$ である。K を非負定数とし以下の条件を考える。

$$(A) \quad \text{Hess}\left(e^{\frac{\phi}{n-m}}\right) + \frac{K}{n-m}e^{-\frac{3\phi}{n-m}}E_n \geq O.$$

ここで E_n (resp. O) は (n, n) -単位 (resp. (n, n) -零) 行列である。条件 (A) の下では $\mathbb{R}^n$ 上で $\text{Ric}_{m,n}(L) \geq -Ke^{-\frac{4\phi}{n-m}}$ である。この場合、条件 (K) は $K = 0$ か $K > 0$ かつ $\phi(x) \geq -\frac{n-m}{4} \log(1+|x-p|^2)$ がある $p \in \mathbb{R}^n$ で成立するときに $K \equiv K$ で成立する。 $K = 0$ の場合を考えよう。このとき熱半群 $P_t = e^{tL}$ は $e^{\frac{\phi}{n-m}}$ の凸性から保存性とフェラー性をもつ。特に、 ϕ の凸性があれば同じ結論を得る。この事実は $m \geq n$ の場合での [7, Theorems 1.4 and 1.5] の結果と $|\nabla \phi(x)| \leq C|x-p| \log \log(1+|x-p|)$ がある $C > 0$ と $p \in \mathbb{R}^n$ で成立することからも示せる。次に $K > 0$ の場合を考える。仮定 (A) は $K \geq \frac{n-m}{2}$ の場合に $\phi(x) = -\frac{n-m}{4} \log(1+|x|^2)$ に対して成立する。

実際, $f(x) := e^{\frac{\phi(x)}{n-m}} = (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{4}}$ は $K \geq \frac{n-m}{2}$ で次の評価を満たす:

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(x) + \frac{K}{n-m} f^{-3}(x) E_n &\geq \text{Hess } f(x) + \frac{K}{n-m} f(x) E_n \\ &= (1 + |x|^2)^{-\frac{9}{4}} \left(\frac{5}{4} x_i x_j - \frac{1}{2} (1 + |x|^2) \delta_{ij} + \frac{K}{n-m} (1 + |x|^2)^2 \delta_{ij} \right)_{ij} \\ &\geq \frac{5}{4} (1 + |x|^2)^{-\frac{9}{4}} (x_i x_j)_{ij} \geq O. \end{aligned}$$

したがって (2.3) が成立し, $\phi(x) := -\frac{n-m}{4} \log(1 + |x|^2) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ は条件 **(K)** を $K \geq \frac{n-m}{2}$ の下で満たす. これより熱半群 $P_t = e^{tL}$ は $m < 1$ で $\phi(x) = -\frac{n-m}{4} \log(1 + |x|^2)$ に対して保存性とフェラー性をもつ.

定理 2.2 の証明は Grigor'yan [2] の保存性の判定条件に帰着される. また定理 2.3 の証明は Azencott [1] の Feller 性の判定条件に帰着される ([4] に通常の Laplacian の場合での証明がある). $m \geq n$ の場合の Laplacian の比較定理は $\text{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq (m-1)\kappa(r_p(x))$ なら $Lr_p(x) \leq (m-1)\cot_\kappa(r_p(x))$, $r_p(x) < \delta_\kappa$ の形のため, **X** の保存性や Feller 性は **(K)** よりも弱い条件である (2.1) で成立することが知られている ([7, Theorems 1.4 and 1.5])

REFERENCES

- [1] R. Azencott, *Behavior of diffusion semi-groups at infinity*, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 193–240.
- [2] A. Grigor'yan, *On stochastically complete manifolds*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **290** (1986), 534–537.
- [3] A. Grigor'yan, *Heat kernel and analysis on manifolds*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **47**. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009.
- [4] E. P. Hsu, *Stochastic analysis on manifolds*, Graduate Studies in Mathematics, **38**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [5] K. Kuwae and X.-D. Li, *Laplacian comparison theorem on Riemannian manifolds with $\text{CD}(K, m)$ -condition for $m \leq 1$* , preprint, 2018.
- [6] K. Kuwae, S.-Z. Li and X.-D. Li, *Conservativeness and Feller property of diffusion processes on Riemannian manifolds with m -Bakry-Émery Ricci tensor for $m \leq 1$* , 2018, preprint.
- [7] X.-D. Li, *Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds*, J. Math. Pures Appl. (9) **84** (2005), no. 10, 1295–1361.
- [8] W. Wylie and D. Yeroshkin, *On the geometry of Riemannian manifolds with density*, preprint, 2016.