

Silov 境界上のベクトル値函数と Weil 表現.

広大理

山田裕史
(Yamada Hirofumi)

§ 1. A simple example

実数直線 $\mathbb{R}$ は実単純リー群 $G = SL(2, \mathbb{R}) (\cong SU(1, 1))$ に付随するエルミート対称空間 $\mathcal{D} = \{z = x + iy; y > 0\}$ (上半平面) の Silov 境界と考える。 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, $x \in \mathbb{R}$ とし、作用は $g \cdot x = (ax + b)(cx + d)^{-1}$ で与えられる。 $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、

$$(U(g)f)(x) = (cx + d)^{-1} f((ax + b)(cx + d)^{-1}) \quad \text{for } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすると $(U, L^2(\mathbb{R}))$ は G のユニタリ表現であることは、簡単に確かめられる。 U が次のように既約分解されることはよく知られている。 ([4, p102])

$$U = U_+ \oplus U_-$$

U_+ の空間 $\cong$ 上半平面の Hardy 空間 H_+

U_- の空間 $\cong$ 下半平面の Hardy 空間 H_-

(U_+ は正則離散系列の極限の表現である。)

$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して フーリエ変換を

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x) dx \quad (y \in \mathbb{R})$$

により定義すると.

$$H_+ \cong \{ f \in L^2(\mathbb{R}) ; \hat{f}(y) \equiv 0 \text{ for } y < 0 \}$$

$$H_- \cong \{ f \in L^2(\mathbb{R}) ; \hat{f}(y) \equiv 0 \text{ for } y > 0 \}$$

である。([1])

本稿ではこの現象の一般化を、Weil 表現を用いて考察する。証明の方針は基本的には [3] に従う。

§2. $\check{\text{Silov}}$ 境界上の函数.

まず記号を整理しておく。

$$G = SU(n, n) = \{ g \in SL(2n, \mathbb{C}) ; gJg^* = J \text{ かつ } J = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \}$$

$$K = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G ; (a+ib, a-ib) \in S(U(n) \times U(n)) \right\}$$

$$\cong S(U(n) \times U(n)) \quad \text{極大コンパクト部分群.}$$

$$\mathcal{D} = G/K \cong \{ z = x + iy ; x, y \in H(n), y \gg 0 \}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで } H(n) \text{ は } n \times n \text{ ユニタリ行列全体, } \gg \text{ は正定値である.} \end{array} \right)$$

$$\mathcal{D} \text{ の } \check{\text{Silov}} \text{ 境界} = \overline{\mathcal{D}} \cap \{ \text{Im } z = 0 \} \cong H(n)$$

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, \quad x \in H(n) \quad \text{と } 1 \neq z \in \mathbb{C} \text{ を作用させる.}$$

$$g \cdot x = (ax + b)(cx + d)^{-1} \quad \text{と与えられる. また, } H(n) \cong \mathbb{R}^{n^2} \text{ 上の}$$

ユークリッド測度を dx とかく。

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & a^{*-1} \end{pmatrix} \in G ; a \in GL(n, \mathbb{C}), \det a \in \mathbb{R} \right\}$$

とかくとこれは G の 極大双曲型部分群である。 P の任意の元は $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($a \in GL(n, \mathbb{C}), \det a \in \mathbb{R}, x \in H(n)$) と一意的に分解される。

今 $GL(n, \mathbb{C})$ の 多項式表現で determinant factor を含まないもの (τ, V_τ) を固定する。 V_τ には $\tau(a^*) = \tau(a)^*$ となるように内積 $\langle, \rangle_{V_\tau}$ を入れたおく。

$$L^2_\tau(H(n)) := \left\{ f: H(n) \rightarrow V_\tau ; \int_{H(n)} \langle \tau(1+x^2)f(x), f(x) \rangle_{V_\tau} dx < \infty \right\}$$

とおく。 $f \in L^2_\tau(H(n))$ に対して フーリエ変換を

$$\hat{f}(y) = \int_{H(n)} e^{-i\tau(x)y} f(x) dx \quad y \in H(n)$$

と定義する。 ただしこれは distribution sense である。

$p+q \leq n$ なる 非負整数 p, q に対して 符号 $\alpha(p, q)$ の $H(n)$ の元全体を $O_{p,q}$, その閉包を $\bar{O}_{p,q}$ とかく。 尤, $p+q=n$ なら, $O_{p,q}$ は 開集合で, $O_{p,q} = \bigcup_{\substack{p' \leq p \\ q' \leq q}} O_{p',q'}$ である。

$p+q=n$ なる p, q に対して,

$$L^2_{\tau(p,q)}(H(n)) := \left\{ f \in L^2_\tau(H(n)) ; \text{supp } \hat{f} \subset \bar{O}_{p,q} \right\}$$

とおく。

$f \in L^2_{\mathbb{C}}(H(n))$ に対し

$$(T(g)f)(x) = \det(cx+d)^{-n} \tau(cx+d)^{-1} f(ax+bx(cx+d)^{-1})$$

for $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ により G の表現を定義する。

Proposition 1 $L^2_{\mathbb{C}}(p,q)(H(n))$ は $T(P)$ -不変である。

本稿の目的は $L^2_{\mathbb{C}}(p,q)$ 内の G -不変な部分空間の存在を示すことである。既約成分の explicit な実現は今後の問題として残っている。

§3 Weil 表現とそのテンソル積

$G = SU(n, n)$ は $g(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{pmatrix}$ ($a \in GL(n, \mathbb{C})$, $\det a \in \mathbb{R}$), $t(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($b \in H(n)$), $\sigma = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ という形の元で生成される。 G の Weil 表現 (Segal-Shale-Weil 表現, 調和表現) L は各元に対し、次式で与えられる。

$$(L(g(a))f)(w) = (\det a) f(a^*w)$$

$$(L(t(b))f)(w) = e^{-i\langle bw, w \rangle} f(w)$$

$$(L(\sigma)f)(w) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int e^{-2i\operatorname{Re}\langle w, w' \rangle} f(w') |dw'|^2.$$

ここで $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$, $|dw'|^2$ は $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ のユークリッド測度, $2^n d(\operatorname{Re} w'_1) d(\operatorname{Im} w'_1) \cdots d(\operatorname{Re} w'_n) d(\operatorname{Im} w'_n)$, $\langle, \rangle$ は $\mathbb{C}^n$ の

エルミート内積である。急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$ は L の不変部分空間である。

表現 $L \ni Lf = \overline{L} \bar{f}$ (右辺の $-$ は複素共役) により定義し、 $L_{p,q} = \overset{p}{\otimes} L \otimes \overset{q}{\otimes} \overline{L}$ とおく。 $L_{p,q}$ は次式で実現される。

$$(L_{p,q}(g(a))f)(\xi) = (\det a)^{p+q} f(a^* \xi)$$

$$(L_{p,q}(t(b))f)(\xi) = e^{-i \operatorname{Tr} \xi Q \xi^* b} f(\xi)$$

$$(L_{p,q}(U)f)(\xi) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{(p+q)n} \int e^{-2i \operatorname{Re} \operatorname{Tr}(\xi Q \xi'^*)} f(\xi') |d\xi'|^2$$

for $f \in L^2(M(n, p+q; \mathbb{C}))$. 同様に $Q = \begin{pmatrix} 1_p & \\ & -1_q \end{pmatrix}$ である。
 ことに $\mathcal{S}(M(n, p+q; \mathbb{C}))$ は不変部分空間である。

§4. 柏原 - Vergne の理論, 復習 ([2])

今 $p+q = k$ とする。 $X = M(n, k; \mathbb{C}) \times M(n, k; \mathbb{C})$,

$\mathbb{C}[X] = \{ X \text{ 上の多項式全体 (各 entry が変数)} \}$ とおく。

$$\Delta_{ij} = \sum_{\nu=1}^k \frac{\partial^2}{\partial \xi_{i\nu} \partial \eta_{j\nu}} \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad \text{と} \quad \text{する。} \quad f \in \mathbb{C}[X] \text{ の}$$

pluri-harmonic とする。 $\Delta_{ij} f \equiv 0 \quad (\forall i, j)$ により定義する。

$\mathcal{H} = \{ X \text{ 上の pluri-harmonic 多項式全体} \}$ とする。

$(\lambda, V_\lambda) \in GL(k, \mathbb{C})$ の既約表現 とする。

$\mathcal{H}(\lambda) := \{ p: X \rightarrow V_\lambda, \text{ pluri-harmonic 多項式};$

$$p(\xi c, \eta^t c) = \lambda(c)^{-1} p(\xi, \eta) \quad \forall c \in GL(k, \mathbb{C}) \}$$

とおく。 $H(\lambda) \neq \{0\}$ となるような $GL(k, \mathbb{C})$ の既約表現 λ の全体を Σ とおく。 $\lambda \in \Sigma$ に対して $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$ の $H(\lambda)$ 上の表現 $\tau(\lambda)$ が、

$$(\tau(\lambda)(g_1, g_2)p)(\xi, \eta) = p(g_1^{-1}\xi, g_2^{-1}\eta)$$

により定まる。

Proposition 2 [2, Th. 6.3]

- ① $\tau(\lambda)$ は $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$ の既約表現、
- ② $\lambda \mapsto \tau(\lambda)$ は injective.

$\lambda \in \Sigma$ に対して $\text{Hom}(H(\lambda), V_\lambda)$ -valued 多項式

$I = I_\lambda \in I_\lambda(\xi)p = p(\xi, \bar{\xi})$ ($p \in H(\lambda)$) により定義される。

I_λ が次の諸性質を満たすことは簡単に確かめられる。

i) harmonic i.e.,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \bar{\xi}_j} I_\lambda(\xi) = 0$$

ii) $I_\lambda(\xi c) = \lambda(c)^{-1} I_\lambda(\xi) \quad \forall c \in GL(k, \mathbb{C})$

iii) $I_\lambda(a\xi) = I_\lambda(\xi) \tau(\lambda)(a, a^{*-1}) \quad \forall a \in GL(n, \mathbb{C})$.

ここで今後は $p=q=n$ とする。 §1で始めに固定した

$GL(n, \mathbb{C})$ の多項式表現 τ に対して $\tilde{\tau} = \text{id} \otimes \tau$ とする。

$\tilde{\tau}$ は Σ の image に属している。([2])

i.e., $\left\{ \begin{array}{l} \exists! \lambda : GL(n, \mathbb{C}) \text{ の表現, } \tilde{\tau} = \tau(\lambda) \\ \quad \quad \quad (\text{実は } \lambda \simeq \tau) \\ \exists! I = I_\lambda : \text{Hom}(V_\tau, V_\lambda) \text{-valued harmonic 多項式} \end{array} \right.$

§5. 結 論.

$M(n, n; \mathbb{C})$ は簡単に M とかく。Weil 表現のテンソル積 $L_{p,q}$ ($p+q=n$) は §3 と同じ式で、

$$L^2(M, V_\lambda) := \left\{ f: M \rightarrow V_\lambda; \int_M \|f(\xi)\|_{V_\lambda}^2 |d\xi|^2 < \infty \right\}$$

に作用する。これを $L_{p,q}^\lambda$ とかく。 $\mathcal{S}(M, V_\lambda)$ は $L_{p,q}^\lambda$ の不変部分空間である。 $f \in \mathcal{S}(M, V_\lambda)$ に対して、

$$(\mathcal{F}_{p,q}^\lambda f)(x) := \int_M e^{i\tau \xi Q \xi^* x} I(\xi)^* f(\xi) |d\xi|^2 \quad x \in H(n)$$

という積分変換を考える。この積分は絶対収束して、 $H(n)$ 上の C^∞ -関数と定める。

Proposition 3 $f \in \mathcal{S}(M, V_\lambda)$ に対して $\mathcal{F}_{p,q}^\lambda f$ は $L_{p,q}^\lambda$ の元である。さらに、 $\mathcal{F}_{p,q}^\lambda$ は $L_{p,q}^\lambda$ と $\mathcal{T}$ の間の intertwining 作用系である。

たとえば $g = g(a)$ に関して、

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{p,q}^\lambda L_{p,q}^\lambda(g) f)(x) &= \int_M e^{i\tau \xi Q \xi^* x} I(\xi)^* (\det a)^{p+q} f(a^* \xi) |d\xi|^2 \\ &= (\det a)^{-n} \int_M e^{i\tau a^* \xi Q \xi^* a^* x} I(a^* \xi)^* f(\xi) |d\xi|^2 \\ &= (\det a)^{-n} \tau(a^*)^{-1} (\mathcal{F}_{p,q}^\lambda f)(a^* x a^{*-1}) \end{aligned}$$

OK.

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ において.

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{p,q}^{\mathbb{R}} L_{p,q}^{\mathbb{R}}(g)f)(x) &= \int_M e^{i\tau \xi Q \xi^* x} I(\xi)^* e^{-i\tau \xi Q \xi^* b} f(\xi) d\xi^2 \\ &= (\mathcal{F}_{p,q}^{\mathbb{R}} f)(x-b) \end{aligned}$$

OK.

$g = \sigma$ においては次の lemma が成り立つ。

Lemma 4 $M \ni \xi \mapsto f(a\xi)$ が任意の $a \in GL(n, \mathbb{C})$

に対して harmonic 多項式ならば

$$\begin{aligned} \int_M e^{-2i\operatorname{Re} \tau \xi Q \xi^*} e^{i\tau \xi Q \xi^* x} f(\xi) d\xi^2 \\ = (-2\pi i)^{(p-q)n} (\det x)^{-n} e^{-i\eta Q \eta^* x^{-1}} f(x^{-1}\eta) \end{aligned}$$

この lemma より σ についての intertwining relation は得られる。 //

さて $\mathcal{S}(M, V_\lambda)$ の $\mathcal{F}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ による image を調べる。

Lemma 5 $M \ni \xi \mapsto \xi Q \xi^* \in H(n)$ の image は

$\bar{\mathcal{O}}_{p,q}$ に含まれる。

今 $dy \in H(n)$ 上のユークリッド測度とすると、これは $\mathcal{O}_{p,q}$

$(p+q=n)$ 上の測度と見られる。 $y \in H(n)$ に対して

$$V_y = \{ \xi \in M; \xi Q \xi^* = y \}$$

とおく。このとき、各 V_y 上に測度 $dy \xi^2$ が存在して、

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}_{p,q}^{\mathbb{C}} f)(x) &= \int_M e^{i\tau \xi Q \xi^* x} I(\xi)^* f(\xi) |d\xi|^2 \\
 &= \int_{H(n)} e^{i\tau x y} dy \int_{V_y} I(\xi)^* f(\xi) |dy \xi|^2
 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\bar{f}(y) = \int_{V_y} I(\xi)^* f(\xi) |dy \xi|^2$ における lemma 5

より $\text{supp } \bar{f} \subset \bar{O}_{p,q}$ である。

$$(\mathcal{F}_{p,q}^{\mathbb{C}} f)(x) = \int_{H(n)} e^{i\tau x y} \bar{f}(y) dy.$$

すなわち、 $\mathcal{F}_{p,q}^{\mathbb{C}} f \in L^2_{\mathbb{C}}(p,q)$ 。

この議論を Proposition 3 と合わせることにする。次の

結果を得る。

Proposition 6

$p+q=n$ なる組 (p,q) に対して。

$L^2_{\mathbb{C}}(p,q)$ 内に G -不変な部分空間が存在する。

文献.

- [1] S. Bochner : Group invariance of Cauchy's formula for several variables, Ann. of Math. 45, 686-707 (1949).
- [2] M. Kashiwara and M. Vergne : On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials, Inventiones math. 44, 1-47 (1978).
- [3] ————— : Functions on the Shilov boundary of the generalized half plane, in "Non-Commutative Harmonic Analysis", Springer Lecture Notes in Math. 728, 136-176, 1979.
- [4] 岡本清弘 : 等質空間上の解析学, 紀伊國屋, 1980.