

Schwinger 汎函数微分方程式と超準解析

九大 工学部 川畑茂徳

§1. 超準解析 (nonstandard analysis) の場の量子論への応用を目標とする。具体的には超準的に一般化された函数の理論とその上の汎函数微積分に大別される。前者によつて線形理論, Dirac 空間の数学的基礎づけを行い, 後者によつて Schwinger 汎函数微分方程式を取扱う。超準解析を用いた Dirac 空間の数学的基礎づけは, G. Takeuti¹⁾ M.O. Farrukh²⁾ 等によつて試みられたが今のところ成功したとはいえない。例えば線型作用素の連続スペクトル λ に対応する固有ベクトルを e_λ とするとき, $(e_\lambda, e_\lambda) = \delta(\lambda - \lambda)$ が Dirac 空間で成立する。この関係式を誘導できる理論は今まで存在しなかったようである。我々の超準的に一般化された函数の理論では, «独立変数にかける» 作用素, 微分作用素について, 上の関係式が成立することは自明である。R. Kurata³⁾ は急激な函数空間の超積分^{*}を用いて線形理論の正当化を試みた。しかし^{*}では Bogoliubov-Parasiuk⁴⁾ 流の積の一般理論を含まない,

その上除法に関して困難があり、多くの問題点を残している。
 F. Edwards と R.E. Peierls²⁾ は線型化した Schwinger 方程式を、有限次元の Fourier 変換に相当する汎函数 Fourier 変換を形式的に定義して解いたが、彼等の方法は数学的正当性が全くなく単なる形式的計算であり、その計算すら不明確で曖昧なところが多い。我々は超準的に拡張された「無限次元空間の一様測度」による積分を定義し、F. Edwards 等の結果を正当化する。我々の超準的汎函数微積分は Schwinger 方程式以外にも利用できるがここでは触れない。Dirac 空間、繰込み理論への応用は現在考察中である。

§2 超ユークリッド空間 $(E, |E|)$

N を自然数の集合 (0 を含めて) とし、 N 上の Fréchet の filter をふくむ ultrafilter を固定して考えこれを以下 $\mathcal{U}$ とあらわす。 h_n を Hermite 函数とする、

$$h_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

d 次元の場合、 $h_p(x) = h_{p_1}(x_1) h_{p_2}(x_2) \cdots h_{p_d}(x_d)$ 、 $p = (p_1, p_2, \dots, p_d) \in N_d$
 p_j は整数 ≥ 0 と置きかえて考えておく、また $|p| = \sum_{j=1}^d p_j$ と書く。 $\mathbb{C}^n$ を n 次元複素ユークリッド空間とし、

$$E = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}^{n+1} / \sim$$

として E を定義する。すなわち $(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}^{n+1}$ ここに $a^{(n)}$ は $n+1$ 次元ベクトル ($a^{(n)} = (a_0^{(n)}, \dots, a_n^{(n)})$ と考えてよい) である。 $\prod \mathbb{C}^{n+1}$ の 2 元, $a = (a^{(n)}), b = (b^{(n)})$ に対し,

$$a \sim b \iff \{n; a^{(n)} = b^{(n)}\} \in \mathcal{F}.$$

という同値関係を定義し, それによ, て $\prod \mathbb{C}^{n+1}$ を類別したものが E である。 $(a^{(n)})$ を含む同値類を $[a^{(n)}]_n$ であらわそう。 E の元の間には自然に加法が定義され, $\mathbb{C}$ 上の線型空間となる。 $a, b \in E$ の内積は当然,

$$(a, b) = [(a^{(n)}, b^{(n)})]_n \in {}^*\mathbb{C}$$

によ, て定義される。ここに $(a^{(n)}, b^{(n)})$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の内積である。

E の元で, とくにある数列 $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ があ, て

$$[a^{(n)}]_n = [(a_0, a_1, \dots, a_n)]_n$$

と書けるような元の全体から作られる部分空間を, E^0 とおく。これは ${}^*\mathbb{R}, {}^*\mathbb{C}$ と異なり, 何らかの集合の超積で書かれるものではない。数列 $(a_n), (b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ が E^0 の元 $[a^{(n)}]_n, [b^{(n)}]_n$ を定義する時には, $[a^{(n)}]_n = [b^{(n)}]_n$ ならば, 実は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n = b_n$ である。いいかえると $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ から E^0 への対応

$$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \longrightarrow E^0$$

は単射, したが, て双射となり, E^0 はただの数列空間である。

E の元に対し, エルミート函数系 $\{e_n\}$ を用いて *R から *C への函数 ψ を対応させ, この函数の全体を $E_n({}^*R)$ とする。

$a = [a_n]_n \in E$ に対し,

$$a \longmapsto \psi = [\psi_n]_n = \left[\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p^{(n)} e_p \right]_n$$

明らかに, $a, b \in E$ の内積に関して, $a \longmapsto \psi, b \longmapsto \varphi$ とするとき

$$(a, b) = \left[\int \psi_n(x) \overline{\varphi_n(x)} dx \right]_n = ((\psi, \varphi) \text{ と書く })$$

やえに上の対応

$$E \longrightarrow E_n({}^*R)$$

は内積を不変にする同型対応である。この写像による E の同型 $E_n({}^*R)$ が定義される。上で注意したところより, E_n は形式的エルミート級数 $\sum_{p=0}^{\infty} a_p e_p, a_p \in \mathbb{C}$ の全体と同一視される。

形式的エルミート級数空間としての E_n において (a_p) が急激少数列のときには急激少数函数 (S) を, 後増加少数列のときには後増加超函数 (S') を, (a_p) が他の場合にはホルバルト空間 l^2 を作る。すなわち $(S) \subset (l^2) \subset (S') \subset E_n$, この関係は任意の d 次元で正しい。

§3 空間 E_n , E_n 上の線型作用素

定義 3-1 $\phi \in E_n$ のとき微分 $D\phi$ を定義する。

$$\hat{D}\phi = \left[\sum_{|p|, |q| \leq n} \lambda_{qp} a_p^{(n)} h_q \right] \in \mathbb{E}_n \quad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n$$

$$D\phi = \left[\sum_{|q| \leq n} \left(\sum_{p \in N_d} \lambda_{qp} a_p \right) h_q \right]_n \in \mathbb{E}_n^0 \quad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n^0$$

但し, $\lambda_{qp} = (Dh_p, h_q)_2$, Dh_p は通常の微分である。

注意 3-1 $d=1$ 次元の場合

$$\hat{D}\phi = \left[\sum_{0 \leq p \leq n} \left\{ \sqrt{\frac{p+1}{2}} a_{p+1}^{(n)} - \sqrt{\frac{p}{2}} a_{p-1}^{(n)} \right\} h_p \right]_n \quad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n$$

$$D\phi = \left[\sum_{0 \leq p \leq n} \left\{ \sqrt{\frac{p+1}{2}} a_{p+1} - \sqrt{\frac{p}{2}} a_{p-1} \right\} h_p \right]_n \quad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n^0$$

定義 3-2 $\phi \in \mathbb{E}_n$ に対し不定積分 $\int \phi dz$ を次式で定義する

$$\int \phi dz = \left[\sum_{|p|, |q| \leq n} I_{qp} a_p^{(n)} h_q \right]_n \in \mathbb{E}_n \quad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n$$

$$\int \phi dz = \left[\sum_{|q| \leq n} \left(\sum_{p \in N_d} I_{qp} a_p \right) h_q \right]_n \in \mathbb{E}_n^0 \quad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n^0$$

但し $\Pi = (I_{qp})_{|p|, |q| \leq n}$ は $\lambda_{qp} = (Dh_p, h_q)_2$ とするとき, $(\lambda_{qp})_{|p|, |q| \leq n}$ の逆行列であり, $I = (I_{qp})_{q, p \in N_d}$ は $(\lambda_{qp})_{q, p \in N_d}$ の逆行列である。

定義 3-3 Fourier 変換の定義 $\phi \in \mathbb{E}_n$ に対し

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\phi)(\lambda) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int e^{i\lambda x} \phi(x) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[\sum_{|p| \leq n} a_p^{(n)} (\mathcal{F}h_p)(\lambda) \right]_n \end{aligned}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{|p| \leq n} a_p^{(m)} i^{|p|} h_p(x) \right]_n \in E_n,$$

定義 3-4 独立変数をかける作用素の定義

$$\hat{x} \circ \phi = \left[\sum_{|p|, |q| \leq n} \tau_{qp} a_p^{(m)} h_q \right]_n \in E_n, \quad \forall \phi \in E_n$$

$$x \circ \phi = \left[\sum_{|q| \leq n} \left(\sum_{p \in N_d} \tau_{qp} a_p \right) h_q \right]_n \in E_n^0 \quad \forall \phi \in E_n^0$$

但し, $\tau_{qp} = (x h_p, h_q)_{L^2}$

注意 3-2 定義 3-4 より $(4 h_p, h_q)_{L^2} < \infty \quad (\forall p, q \in N_d)$ とする
整函数 ψ をかける作用素は自然に定義される,

$$\hat{\psi} \circ \phi = \left[\sum_{|p|, |q| \leq n} d_{qp} a_p^{(m)} h_q \right]_n \in E_n \quad \forall \phi \in E_n$$

$$\psi \circ \phi = \left[\sum_{|q| \leq n} \left(\sum_{p \in N_d} d_{qp} a_p \right) h_q \right]_n \in E_n^0 \quad \forall \phi \in E_n^0$$

但し $d_{qp} = (\psi h_p, h_q)_{L^2}$

Lemma 3-1 (1) $\tau: (S') \rightarrow E_n^0$ とすると τ の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} (S') & \xrightarrow{\tau} & E_n^0 \\ D \downarrow & & \downarrow D \\ (S') & \xrightarrow{\tau} & E_n^0 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} (S') & \xrightarrow{\tau} & E_n^0 \\ \downarrow \tau, \tau^{-1} & & \downarrow \tau, \tau^{-1} \\ (S') & \xrightarrow{\tau} & E_n^0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \phi \in E_n^0 \text{ のとき} \quad & \tau(\hat{D}^v \phi) = (\hat{\tau} \sigma)^v \tau \phi & v \in N \\ \phi \in E_n \text{ のとき} \quad & \tau(\hat{D}^v \phi) = (\hat{\tau} \sigma)^v \circ \tau \phi & v \in N, \end{aligned}$$

証明, 1) $T \in (S)$ の z は DT の Hermite 係数 (但し $d=1$)

$$\begin{aligned}\langle DT, h_p \rangle &= -\langle T, h'_p \rangle \\ &= -\langle T, \sqrt{\frac{p}{2}} h_{p-1} - \sqrt{\frac{p+1}{2}} h_{p+1} \rangle \\ &= -\sqrt{\frac{p}{2}} \langle T, h_{p-1} \rangle + \sqrt{\frac{p+1}{2}} \langle T, h_{p+1} \rangle\end{aligned}$$

つまり z は h_p の係数。

2) $d=1$ の z は証明する。

$$\hat{\chi} \circ \phi = \left[\sum_{0 \leq p \leq n} \left\{ \sqrt{\frac{p+1}{2}} a_{p+1}^{(n)} + \sqrt{\frac{p}{2}} a_{p-1}^{(n)} \right\} h_p \right]$$

つまり $\hat{\chi} \circ \phi = \tilde{\phi}$ と書くと z は $\tilde{\phi}$ の係数。

$$\begin{aligned}(\hat{\sigma}) \circ \tilde{\phi} &= i \left[\sum_{0 \leq p \leq n} \left\{ \sqrt{\frac{p+1}{2}} i^{p+1} a_{p+1}^{(n)} + \sqrt{\frac{p}{2}} i^{p-1} a_{p-1}^{(n)} \right\} h_p \right]_n \\ &= i \left[\sum_{0 \leq p \leq n} i^p \left\{ -\sqrt{\frac{p+1}{2}} a_{p+1}^{(n)} + \sqrt{\frac{p}{2}} a_{p-1}^{(n)} \right\} h_p \right]_n \\ &= \chi(\hat{\phi})\end{aligned}$$

q.e.d.

example 3-1 $d=1$ 次元の場合に述べた

$$(1) \quad \chi x^m = (2x)^{\frac{1}{2}} (-1)^m g^{(m)}(x)$$

$$(2) \quad \delta(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-y)^l}{l!} D^l \delta(x), \quad \forall y \in \mathbb{R} \text{ 固定 } (x \text{ 変})$$

③ 定義より

$$\begin{aligned}D_x \delta(x, y) &= \left[\sum_{p \leq n} \left\{ \sqrt{\frac{p+1}{2}} h_{p+1}(y) - \sqrt{\frac{p}{2}} h_{p-1}(y) \right\} h_p(x) \right]_n \\ &= - \left[\sum_{p \leq n} h'_p(y) h_p(x) \right]_n\end{aligned}$$

故に

$$D_x^l \delta(x, y) = (-1)^l \left[\sum_{p \leq n} h_p^{(l)}(y) h_p(x) \right]_n$$

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-y)^l}{l!} D_x^{(l)} \delta(x) &= \left[\sum_{p \leq n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l y^l}{l!} h_p^{(l)}(0) h_p(x) \right]_n \\ &= \left[\sum_{p \leq n} h_p(y) h_p(x) \right]_n = \delta(x, y).\end{aligned}$$

$$(3) \quad \mathcal{F}(e^{bx}) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \delta(\sigma, ib), \quad b \in {}^*\mathbb{R}$$

(3) (1), (2) より明らかである。

$$(4) \quad \mathcal{F}\delta = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} I, \quad \mathcal{F}I = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \delta$$

$$\text{但し } I = \left[\sum_{p \leq n} \int h_p(z) dz h_p \right]_n \equiv \left[(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{p \leq n} i^p h_p(0) h_p \right]_n$$

Lemma 3-2 $\tau: (S') \rightarrow E_n^0$ (injection) とする。次の図式は可換である。但し $p(x)$ は独立変数 x の多項式である。注)

$$\begin{array}{ccc}(S') & \xrightarrow{\tau} & E_n^0 \\ \downarrow p(x) \circ & & \downarrow p(x) \circ \\ (S') & \xrightarrow{\tau} & E_n\end{array}$$

証明, $p(x) = x$ のとき証明すれば十分。 $\phi \in (S')$ とする

$$x \circ \phi = \left[\sum_{p \leq n} \left(\sum_{q \in N} (x h_p, h_q) a_p \right) h_q \right]_n$$

但し, $a_p = \langle \phi, h_p \rangle$, $\sum_{p \in N} (x h_p, h_q) a_p = \langle x \phi, h_q \rangle$ であるから,

$$x \circ \phi = \left[\sum_{q \leq n} \langle x \phi, h_q \rangle h_q \right]_n = \tau(x \phi) \quad \text{q.e.d.}$$

注) $\mathcal{O}_H$ に属する整函数であればよい。

Lemma 3-3 $\lambda \in {}^*\mathbb{R}$ とする. $X \circ e_\lambda = \lambda e_\lambda$, $\frac{1}{i} D f_\lambda = \lambda f_\lambda$

の解は $e_\lambda = \delta(\lambda, x)$, $f_\lambda = \exists! e(\lambda, x)$ である. 従って,

$$(f_\lambda, f_{\lambda'}) = (e_\lambda, e_{\lambda'}) = \delta(\lambda, \lambda') \quad \lambda, \lambda' \in {}^*\mathbb{R},$$

証明 $f_\lambda = [\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p h_p]_n$ とおく, 定義より,

$$\frac{1}{i} D f_\lambda = \frac{1}{i} \left[\sum_{p \in \mathbb{N}} \left\{ \sqrt{\frac{p+1}{2}} a_{p+1} - \sqrt{\frac{p}{2}} a_{p-1} \right\} h_p \right] = \lambda f_\lambda$$

従って, $\sqrt{\frac{p+1}{2}} a_{p+1} - \sqrt{\frac{p}{2}} a_{p-1} = i \lambda_n a_p$, 但し $\lambda = [\lambda_n]_n \in {}^*\mathbb{R}$

を解くことに還元される. $a_p = i^p b_p$ とおくと

$$\sqrt{\frac{p+1}{2}} b_{p+1} + \sqrt{\frac{p}{2}} b_{p-1} = \lambda_n b_p \quad p \in \mathbb{N}$$

この漸化式を満たす解は Hermite 函数 $h_p(\lambda_n)$ の定数倍である.

• 更に $f_\lambda = [\sum_{p \in \mathbb{N}} i^p h_p(\lambda) h_p]_n = \exists! \delta(\lambda, \cdot)$. $X \circ e_\lambda = \lambda e_\lambda$ も

同様にして $e_\lambda = [\sum_{p \in \mathbb{N}} h_p(\lambda) h_p]_n = \delta(\lambda, x)$ q.e.d.

注意 3-3 1) ϕ が整函数で $\forall p \in \mathbb{N}_0$ について $\int \phi h_p d\mathbb{Z} < \infty$

のとき $\phi \in \mathcal{E}_h^0$ である.

2) $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{c_{m+1}}{m!} g^{(m)} \in \mathcal{E}_h^0$, 但し $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|c_m|} = M \geq 0$,

$M=0$ のとき hyperfunction と同一視される.

定義 3-5 $\phi(x, y) \in \mathcal{E}_h({}^*\mathbb{R}^d \times {}^*\mathbb{R}^d)$ のとき, $\phi(x, y) =$

$[\sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij}^{(n)} h_p(x) h_q(y)]_n$ と表わされる. 行列 $A = (A_{ij}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq n}$

が逆行列 $B = (B_{p,q}^{(n)})_{|p|, |q| \leq n}$ をもつとき, $\phi(x, y)$ は可逆であるといふ。

$$\phi^{-1}(x, y) = \left[\sum_{|p|, |q| \leq n} B_{p,q}^{(n)} h_p(x) h_q(y) \right]_n \in E_n({}^* \mathbb{R}^d \times {}^* \mathbb{R}^d)$$

で逆元を定義する。

Lemma 3-4 $\phi(x, y) \in E_n$ が可逆のとき

$$\int_{{}^* \mathbb{R}^d} \phi^{-1}(z, z) \phi(z, x) d'z = \int_{{}^* \mathbb{R}^d} \phi(z, z) \phi^{-1}(z, x) d'z = \delta(z, x)$$

§ 4 E_n^0, E_n 上の汎函数微積分,

E_n 上の函数 — 一般に ${}^* \mathbb{C}$ 値をとる — は

$$F(\varphi) = [F_n(\varphi_n)]_n$$

の形式のものに限定する。 $F_n(\varphi_n) = F_n(\sum_{|p| \leq n} a_p^{(n)} h_p)$ は $a^{(n)}$ の値のみに依存するから F_n は $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の函数とみなされる。

$\forall n \in \mathbb{N}$ について $F_n \in C^1(\mathbb{C}^{n+1})$ のとき, $F \in C^1(E_n)$, また $\forall n \in \mathbb{N}$ について $F_n \in (S')(\mathbb{C}^{n+1})$ のときには, $F \in S'(E_n)$ と書く ---。

定義 4-1 $F \in L^1(E_n)$ のとき

$$\int_{E_n} F(\varphi) d\varphi = \left[\int_{\mathbb{C}^{n+1}} F_n(a_0^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}) da_0^{(n)} \dots da_n^{(n)} \right]_n \in {}^* \mathbb{C}$$

で (E_n) 上の汎函数積分を定義する

2) $F \in C^1(E_n)$ のとき

$$\frac{\delta F(\phi)}{\delta \phi(z)} = \left[\sum_{|p| \leq n} \frac{\partial F_n}{\partial a_p^{(n)}} h_p(z) \right]_n \in (E_n)_z$$

但し, $\psi = \left[\sum_{|p| \leq n} a_p^{(n)} h_p \right]_n$ で汎函数微分を定義する。

3) (汎函数 Fourier 変換の定義) $F \in S'(E_n)$ のとき

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}F)(\lambda) &= \int F(\psi) e^{i(\phi(z), \lambda(z))} \delta\left(\frac{\phi}{\sqrt{2\pi}}\right) \\ &= \left[(\mathcal{F}F_n)(\lambda^{(n)}) \right]_n \end{aligned}$$

こゝに, $(\mathcal{F}F_n)(\lambda^{(n)}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int F_n(x) e^{i\lambda x} dx \in S'(\mathbb{C}^{nH})$ である。

Theorem 4-1

1) $F, G \in L^1(E_n) \Rightarrow \int (F+G) \delta\phi = \int F \delta\phi + \int G \delta\phi,$

2) $\phi_0 \in E_n$ を 1, 固定すると, $F \in L^1(E_n)$ のとき

$$\int F(\phi + \phi_0) \delta\phi = \int F(\psi) \delta\psi, \quad \text{但し } \psi = \phi_0 + \phi,$$

3) Fourier 変換を $\mathcal{F}\phi \equiv \tilde{\phi}$ と書くとき,

$$\int F(\tilde{\phi}) \delta\phi = \int F(\tilde{\phi}) \delta\tilde{\phi} = \int F(\phi) \delta\phi$$

4) $(K\phi)(\eta) = \int K(\zeta, \eta) \phi(\zeta) d\eta$, $K(\zeta, \eta) \in \mathbb{E}_n$ i' 線型変換を定義する。但し $K(\zeta, \eta) = [\sum_{|p|, |q| \leq n} k_{pq}^{(n)} e_p(\zeta) e_q(\eta)]_n$ i' 可逆とする。 $K = (k_{pq}^{(n)})_{|p|, |q| \leq n}$ の逆行列を K^{-1} とする, また $|\det K^{-1}| \equiv [\det |K^{-1}|]_n$ とおく。

$$\int F(K\phi) \delta\phi = |\det K^{-1}| \int F(\phi) \delta\phi$$

5) $G \in C^1(\mathbb{E}_n) \cap B(\mathbb{E}_n)$, $F \in C^1_0(\mathbb{E}_n) \Rightarrow$

$$\int G(\phi) \frac{\delta F(\phi)}{\delta \phi(\zeta)} \delta\phi = - \int F(\phi) \frac{\delta G(\phi)}{\delta \phi(\zeta)} \delta\phi$$

6) $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{E}_n) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\left(\frac{\delta F(\phi)}{\delta \phi(\zeta)}\right)(\lambda) &= \int \frac{\delta F(\phi)}{\delta \phi(\zeta)} e^{i \int \phi(\zeta) \lambda(\zeta)} \delta\left(\frac{\phi}{\sqrt{2\pi}}\right) \\ &= -i \lambda(\zeta) (\mathcal{H}F)(\lambda), \end{aligned}$$

さらに汎函数 Fourier 変換と, その共役変換は $\mathcal{S}'(\mathbb{E}_n)_\phi$ と $\mathcal{S}'(\mathbb{E}_n)_\lambda$ の間に互いに逆な同型対応を定める。

Theorem 4-2

1) $G, F \in C^1(\mathbb{E}_n) \Rightarrow$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(\zeta)} \{ G(\phi) F(\phi) \} = \frac{\delta G(\phi)}{\delta \phi(\zeta)} F(\phi) + G(\phi) \frac{\delta F(\phi)}{\delta \phi(\zeta)}.$$

但し $G(\phi)F(\phi) = [G_n F_n]_n$ とある。

2) $F \in C^1(\mathbb{R})$, $G \in C^1(\mathbb{E}_n) \Rightarrow$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(z)} F(G(\phi)) = \left. \frac{dF}{d\beta} \right|_{\beta=G(\phi)} \frac{\delta G(\phi)}{\delta \phi(z)} = F'(G(\phi)) \frac{\delta G(\phi)}{\delta \phi(z)}$$

3) $f \in C^1(\mathbb{R})$ のとき,

$$\frac{\delta}{\delta \phi(z)} \frac{\partial}{\partial \eta} f(\phi(\eta)) = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\delta}{\delta \phi(z)} f(\phi(\eta))$$

4) (chain rule), $F(\phi, z) \in C^1(\mathbb{E}_n) \times \mathbb{E}_n \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta F(\phi, z)}{\delta \phi(\eta)} \frac{\delta}{\delta F(\phi, z)} d\eta = \frac{\delta}{\delta \phi(\eta)}$$

5) $F \in C^2(\mathbb{E}_n)$ のとき

$$\frac{\delta^2 F(\phi)}{\delta \phi(z) \delta \phi(\eta)} = \frac{\delta^2 F(\phi)}{\delta \phi(\eta) \delta \phi(z)}$$

example 4-1 1) $\frac{\delta \phi(z)}{\delta \phi(\eta)} = \delta(z, \eta)$

2) $f \in C^1(\mathbb{R})$ のとき, $\frac{\delta}{\delta \phi(z)} \int f(\phi(\eta)) d\eta = \int \frac{\delta f(\phi(\eta))}{\delta \phi(z)} d\eta$
 $= \int \frac{\partial f(\phi(\eta))}{\partial \phi(\eta)} \delta(z, \eta) d\eta = \frac{\partial f(\phi(z))}{\partial \phi(z)}$

Theorem 4-1, 4-2 の証明は, すべて有限次元空間の微積分

の定理に還元できる。

§5 Schwinger 方程式.

量子化された場の理論においては Green 函数 $G(x, x')$, $x, x' \in R^4$ はその系の状態を特徴づける。Green 函数の満たす方程式は、そのままの形では求めることはできない。しかし仮想的な外部場を導入したときの Green 函数 $G(x, x'; \phi)$ については ϕ に関する functional differential equation (これが Schwinger equation と呼ばれる) を導くことができる。もし $G(x, x'; \phi)$ が求まれば $\eta(x, x') = G(x, x'; 0)$ とすればよい。Schwinger equation の解を関数空間上の積分型 (continual integral) で表現することが望ましい。我々は Schwinger 方程式の解を $\mathbb{R}_n$ 上の "continual integral" で表現して取扱う。

nucleon と meson の相互作用についての Schwinger 方程式は,

$$\left[-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m - g\gamma_5 \phi(x) + ig\gamma_5 \int d^3z \Delta(x, z; \phi) \frac{\delta}{\delta \phi(z)} \right] G(x, x'; \phi) = \delta(x - x') \quad \dots (5.1)$$

$$\begin{aligned} [-\square_3 + B^2] \Delta(z, z'; \phi) &= \delta(z - z') + ig \text{Tr} \gamma_5 \int d^3z \Delta(z, z) \frac{\delta G(z', z; \phi)}{\delta \phi(z)} \\ &\quad - g \text{Tr} \gamma_5 \phi(z) G(z', z; \phi) \quad \dots (5.2) \end{aligned}$$

$$\gamma_i \text{ は Dirac matrix, } \square_3 = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}$$

簡単のため問題を linear にして (5.2) を

$$(-\square_3 + k^2) \Delta(z, z') = \delta(z - z')$$

でおきかえる。

$$\mathcal{L} \equiv \left[-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \lambda_\mu} + m - g\gamma_5 \phi(x) + i\gamma_5 g \int dz \Delta(x, z) \frac{\delta}{\delta \phi(z)} \right],$$

とおくと

$$\mathcal{L}: E_n \times E_n \times S'(E_n) \longrightarrow E_n \times E_n \times S'(E_n)$$

な operator と考えられる。ここには $G(x, x'; \phi)$ は超準的 (= 一般化した) 函数すなわち $E_n \times E_n \times S'(E_n)$ の元と考える。

$-g\gamma_5 \phi(x)$ の項を消去するためには,

$$G(x, x'; \phi) = G_1(x, x'; \phi) R_1^{-1}(\phi)$$

$$R_1^{-1}(\phi) = \exp\left(-\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \phi(z) \Delta^{-1}(z, z') \phi(z') dz dz'\right)$$

とおくと, Lemma 3-4, Theorem 4-2-1 より

$$\left\{ -i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \lambda_\mu} + m + i g \gamma_5 \int dz \Delta(x, z) \frac{\delta}{\delta \phi(z)} \right\} G_1(x, x'; \phi) = \delta(x, x') R_1$$

ここで汎函数 Fourier 変換の公式 (Theorem 4-1-6) を用いる

と,

$$\begin{aligned} \left\{ -i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \lambda_\mu} + m - g \gamma_5 \int dz \Delta(x, z) \lambda(z) \right\} (\mathcal{F} G_1)(x, x'; \lambda) &= \delta(x, x') \mathcal{F} R_1 \\ &\equiv R_2(\lambda) \delta(x, x') \\ &\dots (5.3) \end{aligned}$$

R_2 を評価するためには,

$$\phi(z) = \phi'(z) - \int \Delta(z, z') \phi(z') dz'$$

とおくと, Lemma 3-4 より

$$\begin{aligned}
P_2(\lambda) &= \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \lambda(z) \Delta(z, \frac{z}{2}) \lambda(z') dz dz' \right\} \\
&\times \int \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \phi'(z) \Delta^{-1}(z, z') \phi'(z') dz dz' \right\} \delta\left(\frac{\phi'}{\sqrt{2\pi}}\right) \\
&\equiv C \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \lambda(z) \Delta(z, \frac{z}{2}) \lambda(z') dz dz' \right\}
\end{aligned}$$

$C = |\det \Delta^{-1}|^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} (1+i)^n (1-i)^{n-1} \right]_n$. 但し
 $\Delta_{pq} = \langle \Delta * h_p, h_q \rangle$, Δ は Klein-Gordon 方程式の Green 函数
とすると、 $\Delta = (\Delta_{pq})_{|p|, |q| \leq n}$ の正の固有値の数を ρ とする
, $|\det \Delta^{-1}| \equiv [|\det \Delta^{-1}|]_n$.

(5.3) 式において, $\Omega(z) = \int \Delta(z, \frac{z}{2}) \lambda(\frac{z}{2}) dz'$ という変数変換
をすると,

$$\begin{aligned}
&[-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m - gV_5 \Omega(x)] G_2(x, x'; \Omega) = C \delta(x, x') \\
&\times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \Omega(z) \Delta^{-1}(z, z') \Omega(z') dz dz' \right\} \dots (5.4)
\end{aligned}$$

$$\text{そこで } G_2(x, x'; \Omega) \equiv (\mathcal{H} G_1)(x, x'; \lambda)$$

$G_3(x, x'; \Omega)$ を

$$[-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m - gV_5 \Omega(x)] G_3(x, x'; \Omega) = \delta(x, x') \dots (5.5)$$

すなわち外部場 $\Omega(x)$ の下での相互作用を考えたいときの Green
函数とする。一方

$$G(x, x'; \phi) = P_1(\phi) (\mathcal{H} G_1)(\phi)$$

$$= R_1^{-1}(\phi) \int G_2(x, x'; \Omega) \exp \left\{ -i \int \Omega(z) \bar{\Delta}(z, z') \phi(z') dz dz' \right\} \delta\left(\frac{\Omega}{\sqrt{2\pi}}\right) \times |\det \bar{\Delta}|$$

(② Theorem 4-1-4)

$$= C |\det \bar{\Delta}| R_1^{-1}(\phi) \int G_3(x, x'; \Omega) \delta\left(\frac{\Omega}{\sqrt{2\pi}}\right) \\ \times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_{\pi \mathbb{R}^4} \Omega(z) \bar{\Delta}(z, z') \Omega(z') dz dz' - i \int_{\pi \mathbb{R}^4} \Omega(z') \bar{\Delta}(z, z') \phi(z') dz dz' \right\}$$

そこで $G(x, x') \equiv G(x, x'; 0)$ とおくと,

$$G(x, x') = C |\det \bar{\Delta}| \int G_3(x, x'; \Omega) \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_{\pi \mathbb{R}^4} \Omega(z) \bar{\Delta}(z, z') \Omega(z') dz dz' \right\} \\ \times \delta\left(\frac{\Omega}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

(4.5)式を一般の場合に解くには, E_n 上のスペクトル分解の定理を使うのが便利である。しかし和風の都合上述べられないので簡単にとける場合のみを取扱う。

meson recoil が無視できる場合, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ の函数はすべて $x_0 = t$ の函数となり, (4.5)式は簡単にとけて

$$G_3(t, t') = \delta(t, t') \exp \left(-ig \int_{t'}^t \Omega(s) ds \right)$$

$$\text{但し } \left(i \frac{\partial}{\partial t} + m \right) \delta(t, t') = \delta(t, t')$$

従って

$$G(t, t') = C |\det \bar{\Delta}| \delta(t, t') \exp \left\{ \frac{i}{2} g^2 \int_{t'}^t dz \int_{t'}^t dz' \Delta(z, z') \right\}$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^4} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int \Omega(z) \bar{\Delta}(z, z') \Omega(z') dz dz' \right\} \delta \left(\frac{\Omega}{\sqrt{2\pi}} \right) \quad \text{注1)} \\ \equiv C C' |\det \bar{\Delta}'| \exp \left\{ \frac{i}{2} g^2 \int_{t'}^t dz \int_{t'}^t dz' \Delta(z, z') \right\}$$

$$\begin{aligned} \therefore C C' |\det \bar{\Delta}'| &= |\det \bar{\Delta}|^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{n}{2}} (1+i)^3 (1-i)^{n-5} \right]_n \times \\ |\det \bar{\Delta}'|^{-\frac{1}{2}} &\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{n}{2}} (1-i)^3 (1+i)^{n-5} \right]_n |\det \bar{\Delta}| \\ &= [1]_n = 1. \end{aligned}$$

よって

$$G(t, t') = \delta(t, t') \exp \left\{ \frac{i}{2} g^2 \int_{t'}^t dz \int_{t'}^t dz' \Delta(z, z') \right\}$$

$\Delta(z, z')$ として

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \beta^2 \right) \Delta(t, t'; \vec{x}, \vec{x}') = \delta(t, t') \delta(\vec{x}, \vec{x}')$$

の解をとれば以前 Tomonaga^{b)} により得られた微分方程式と一致する解を得ることが出来る。

注意 5-1 1) Schwinger 方程式を解く際に用いられた積 $\phi(z) \psi(z)$ 等は ultraproduct の意味での積 $[\phi_n \psi_n]_n$ である。

2) Schwinger 方程式を超準解析で取扱うのは自然である。
なぜかというところ、fermion の Green 函数の場合

注1) $\Omega(z) = \Omega(z) - g \int_{t'}^t \Delta(z, \eta) d\eta$ という平行移動を行った。

$$U_E(x) = A_E^{ext}(x) - i\epsilon^2 \sum_{n,m} \int_P (S(y-z) \gamma^m S^c(z-y) \gamma^m) D_{n,E}^c(y-z) A_m^{ext}(z) dz dy$$

という量で汎関数微分 $\frac{\delta}{\delta U_E(x)}$ を行う。ところが $S^c, D_{n,E}^c$ は因果的 Green 函数, $A_E^{ext}(x)$ は超函数でありから $U_E(x)$ には, 超函数の積, 合成積が現われてくる。このような量を超函数の範囲内で考えることは不可能であるから, 超函数を一般化した函数の理論が必要である。

我々の場合 $S^c(y-z) D_{n,E}^c(y-x)$ は $S^c(y-z), D_{n,E}^c(y-x) \in IE_n^{\circ}(*\mathbb{R}^4 \times *\mathbb{R}^4)$ と考え, $A_m^{ext}(z) \in IE_n^{\circ}(*\mathbb{R}^4)$ でありから $U_E(x)$ は $U_E(x; A_m^{ext}) \in IE_n^{\circ} \times \mathcal{L}'(IE_n^{\circ})$ とみることが出来る。したがって $U_E(x)$ は超準的に一般化した函数の理論で取扱えることになる。

文 献

- 1) G. Takeuti ; Proc. Jap. Academy 38, 414-418 (1961)
- 2) M.O. Farrukh ; Journal of Mathematical Physics
vol. 16. NO.2 February 1975.
- 3) R. Kurata ; Mem. Fac. Engi. Kyushu Univ. vol 25
(1965-1966)
- 4) Bogoliubov, N.N. and O.A. Parasiuk ; Acta Mathematica. 97. 227 (1957).
- 5) S.H. Edwards and R.E. Peierls ; Proc. Roy. Soc. (London)
A224, 24. (1954)
- 6) S.I. Tomonaga , Progr. Theor. Phys. Osaka 1. (1946).