

Isotropic 2nd microlocalization due to Lebeau and Γ -analytic microfunctions

東大理 片岡 清臣 (Kiyômi Kataoka)

東大理 竹内 潔 (Kiyoshi Takenchi)

§ 0 Introduction

Lebeau は 1985 年に論文 [5] において、余接 bundle $T^*\mathbb{R}^n$ の isotropic submfd に沿った microfunction に対する 2nd microlocalization の理論を創始した。しかしながら、その理論は Hyperfunction の FBI 変換を用いて記述されていたため、代数解析的対応物がは、まりしていなかった。本稿においては彼の定義した第 2 超局所台 $SS_P^2 u$ と同値な条件が microfunction としての定義正則函数により記述できたことを報告する。その結果を用いると、Lebeau のいう " Γ -analytic microfunction" なる陪特性帯 Γ に沿って一意接続性を持つ microfunction の class は、よく知られた正則パラメータ付き microfunction よりも真に広い class でありながら、local Bochner の定理を用いて micro 解析性が sweep-out できる class に 他ならないことがわかる。さらに Kashiwara-

Laurent [4] の 2nd microlocalization の理論を陪特性帯上に制限した場合の Bony type ([11]) の microlocal Holmgren の定理の analogy を得ることが出来る。

§ 1 Lebeau の second FBI transformation

1.1 幾何学的 conditions

まず

$$(1.1) \quad \begin{cases} M = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{d'} \times \mathbb{R}^{n-d} \\ X = \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{d'} \times \mathbb{C}^{n-d} \end{cases}$$

$$x' = (x_1, \dots, x_d) \quad \dots$$

とし、余接 bundle $\sqrt{-1} T^*M$ の regular involutive $\pm$ submanifold Λ と、その1つの bicharacteristic leaf $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-d}$ の fixed unit vector $\overset{\circ}{z}''$ を用いて次のように定める。

$$(1.2) \quad \begin{cases} \Lambda = \left\{ (x', x''; \sqrt{-1} \overset{\circ}{z}' dx' + \sqrt{-1} \overset{\circ}{z}'' dx'') \mid \overset{\circ}{z}' = 0 \right\} \\ \cup \quad \sqrt{-1} T^*\mathbb{R}^n \\ \Gamma = \left\{ \begin{array}{c} \text{''} \\ \left| \begin{array}{l} x'' = 0, \overset{\circ}{z}' = 0 \\ \overset{\circ}{z}'' = \overset{\circ}{z}'' \end{array} \right. \end{array} \right\} \end{cases}$$

この定義より $\Gamma \cong \mathbb{R}^d$ かつ、 $\overset{\circ}{T}^*\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ に次のように埋め込むことが出来る。

$$(1.3) \quad \begin{array}{ccc} \overset{\circ}{T}^*\Gamma & \hookrightarrow & \mathbb{C}_{\overset{\circ}{z}'}^{d'} \times \mathbb{C}_{\overset{\circ}{z}''}^{n-d} = \mathbb{C}_{\overset{\circ}{z}}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x'; \overset{\circ}{z}' dx') & \longrightarrow & (x' - \sqrt{-1} \overset{\circ}{z}', 0) \end{array}$$

また $\overset{\circ}{S}S_{\Gamma}^2 u$ を 式 (1.3) により $\overset{\circ}{T}^*\Gamma$ を $\mathbb{C}^n$ の subset と同一視することにより、

$$(1.6) \quad \overset{\circ}{S}S_{\Gamma}^2 u \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\circ}{T}^*\Gamma \cap S_{\Gamma}^2 u \quad \text{と定義する。}$$

以上の定義はコンパクト台の Hyperfunction u に対するものであったが、コンパクト台でない場合も台を cut-off して (1.4) 式の積分変換をほどこすことにより $S_{\Gamma}^2 u$, $\overset{\circ}{S}S_{\Gamma}^2 u$ が定義されることを注意しておく。また、これらの第2超局所台は $\Gamma \subset \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n$ 上 microfunction として一致する2つの Hyperfunction に対しては同一のものを与えることが容易に check される。よって Γ -analytic microfunction が次のように定義される。

Def 1.3 (Γ -analytic microfunction)

for $u \in \mathcal{C}_M|_{\Gamma}$

$$u \text{ が } \Gamma\text{-analytic microfunction} \iff \overset{\circ}{S}S_{\Gamma}^2 u = \phi$$

§ 2 定義正則函数による full characterization

さて本節においては、“ Γ -analytic microfunction” という条件を u の定義正則函数についての言葉で記述する結果を述べよう。

Theorem 2.1

$u(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対し z 次の 2 条件は同値。

i) $u(x)$ は Γ -analytic

ii) u は $\mathcal{C}_M|_\Gamma$ の section z 次 z 次のように記述できる。

$$(2.1) \quad u(x) = \left[\int_{|\bar{z}'' - \frac{\circ}{z}''| \leq \varepsilon} F(x + \sqrt{-1}(0, \frac{\circ}{z}''), \bar{z}'') d\sigma(\bar{z}'') \right]$$

ここに $F(z, \bar{z}'')$ は C^∞ かつ z について正則で z 次の領域で定義されている。

$$(2.2) \quad \left\{ (z', z'', \bar{z}'') \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{R}^{n-d} \mid |z| < \varepsilon, |\bar{z}''| = 1 \right.$$

$$|\bar{z}'' - \frac{\circ}{z}''| \leq \varepsilon$$

$$\operatorname{Im} z'' \cdot \bar{z}'' > C \left[|\operatorname{Im} z''|^2 + (|\operatorname{Re} z''|^2 + |\bar{z}'' - \frac{\circ}{z}''|^2) \cdot |\operatorname{Im} z'| \right] \Bigg\}$$

for some $\varepsilon > 0, C > 0$

Remark 2.2

$n-d=1$ の時, Γ は $\sqrt{-1}S^*M$ 内で考えれば, Lagrangean submtd となる, ている。この時, $\frac{\circ}{z}'' = \pm 1$, $\bar{z}'' \in \mathbb{R}^1$ かつ, 上記 (2.1) のような積分表示は不要になる。 $n-d=1$, $\frac{\circ}{z}'' = 1$ の時, ii) の条件は以下のようになる。

$$ii) (n-d=1, \frac{\circ}{3}''=1)$$

$$(2.3) \quad u(x) = [F(z)]$$

F は

$$(2.4) \quad \left\{ (z', z'') \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^1 \mid \begin{array}{l} |z| < \varepsilon \\ \text{Im } z'' > C |Re z''|^2 \cdot |Im z'| \end{array} \right\}$$

$\parallel$
 $\mathbb{C}^n$

for some $\varepsilon > 0, C > 0$

において正則である。

もし u が z' を正則パラメータとして u microfunction z' あれば上の F は

$$(2.5) \quad \left\{ \quad \quad \mid |z| < \varepsilon, \text{Im } z'' > 0 \right\}$$

まで正則にのびてしまうことに注意すると、" Γ -analytic microfunction" が z' を正則パラメータとして u microfunction $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{O}_{z'}$ よりも真に広い $\mathcal{C}_M|_{\Gamma}$ の subclass を定めていることがわかる。

(Th. 2.1 の sketch of proof)

$T_{\Gamma}^2 u$ と指数因子のみのずれをもつ次の "modified 2nd FBI-transf" $\widehat{T}_{\Gamma}^2 u$ を導入する。

$$(2.6) \quad \widehat{T}_{\Gamma}^2 u(z; \lambda, \mu)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \exp \left[-\frac{\lambda \mu^2}{2} (z' - x')^2 - \frac{\lambda}{2} (\mu z'' - F_1 \frac{\circ}{3}'' - x'')^2 \right] dx$$

この $\widehat{T}_P^2 u$ の増大度によつて $S_P^{\circ 2} u$ と同値な条件を記述することができる。さらに以下のような inversion formula をもつ。

Lemma 2.3 (inversion formula for $\widehat{T}_P^2$)

$\forall a, b > 0, \forall u \in B_{cpt}(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad & u(x) \\
 &= \text{const.} \int_{S_{z'}^{d-1} \times S_{z''}^{n-d-1} \times \mathbb{R}_\lambda^+ \times \mathbb{R}_\mu^+} e^{-\frac{a^2 \lambda \mu^2}{2} - \frac{b^2 \lambda}{2}} \left[1 - \frac{\sqrt{-1} z' \cdot D_{z'}}{a \lambda \mu^2} \right] \left[1 - \frac{\sqrt{-1} z'' \cdot D_{z''}}{b \lambda \mu} \right] \\
 & \quad \widehat{T}_P^2 u \left(z' - \sqrt{-1} a z', \frac{z'' - \sqrt{-1} b z'' + \sqrt{-1} z''}{\mu}; \lambda, \mu \right) \lambda^{n-1} \mu^{2d-1} d\sigma(z') d\sigma(z'') \\
 & \quad \quad \quad d\lambda d\mu
 \end{aligned}$$

この等式は本質的には

$$(2.8) \quad u(x) = \int \delta(x' - y') \delta(x'' - y'') u(y) dy$$

という形に reduce する。

Th. 2.1 はこの Lemma によつて $\widehat{T}_P^2 u$ の増大度と u の定義正則関数の正則域の情報に変換することにより得られる。詳細は [8] を見られたい。 $\square$

§ 3 Γ -analytic microfunction の一意接続性

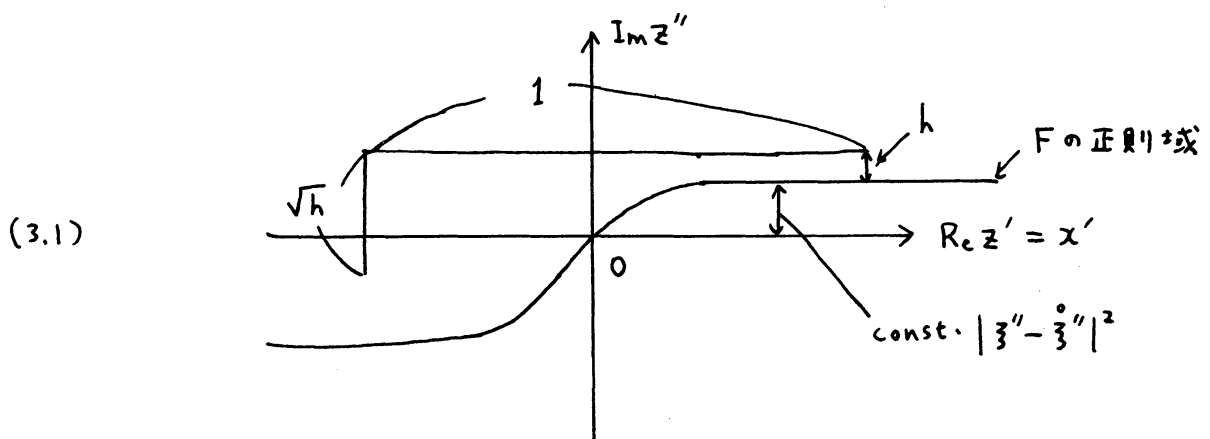
§ 2 で得られた定義正則函数による characterization により、
 以下のような Lebeau による一意接続性についての結果を
 local Bochner の定理という解析接続の定理のみを用いて初等
 的に示すことが可能となる。

Th 3.1 (unique continuation property)

$u(x) \in \mathcal{C}_M|_{\Gamma}$ が “ Γ -analytic microft” であれば、
 u は Γ に沿って一意接続性を持つ。

(sketch of proof)

Γ が $x' \in \mathbb{R}_x^d$ によつて parametrize されていること、及
 び (2.1) 式の F が ζ'' を fix したとき以下のような領域で
 正則になることに注意して local Bochner の定理を用いる。



ここで $\sqrt{h}$ は h よりも 0 に近づく speed が遅いこと、 $|z'' - z'''|^2$
 は、(2.1) 式の積分領域を縮めることにより十分小と仮定
 してよい。何故なら、 ζ'' のまわりに積分領域を縮めたこと
 による効果は Γ 上の microfunction としては 0 だからである。



さらに regular involutive な Λ 上の Kashiwara-Lauder の 2nd microlocal analysis の結果を $\Gamma \subset \Lambda$ 上に制限すると、 $T^*\Gamma$ 上での singular spectrum の条件で Γ 上の半空間に台をもつ $\mathcal{C}_M|_\Gamma$ の section がなぬこと、いわゆる microlocal Holmgren の定理が成立したが、その analogy が $\mathring{S}S_\Gamma^2 u \subset T^*\Gamma$ に対しても成り立つ。すなわち、

Th 3.2 (microlocal Holmgren)

$\dot{p} \in \Gamma$: 1 点, φ : Γ 上の real-valued real analytic function s.t.

$$\varphi(\dot{p}) = 0, \quad d\varphi(\dot{p}) \neq 0 \quad \text{とする。}$$

$u \in \mathcal{C}_M|_\Gamma$ に対して、

$$\pm d\varphi(\dot{p}) \notin \mathring{S}S_\Gamma^2 u \quad \text{が成り立つ時、}$$

$\dot{p}$ の n.h.d で、 u が $\{\varphi < 0\}$ で 0。

$\Rightarrow \dot{p}$ の n.h.d で u が 0。

この定理も Th 2.1 を精密化した結果と解析接続のみで証明される。

Remark 3.3

Th 3.1 の proof において $\sqrt{h}$ が h よりも 0 に近づく speed が遅いことを用いたが、注意深い考察により、同じ order でもよいことが分かる。

References

- [1] Bony : Extensions du théorème de Holmgren, Sémin.
Goulaouic - Schwarz 1975-1976, exposé 17.
- [2] Bony - Schapira : Propagation des sing. analytiques pour les
solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Inst.
Fourier, Grenoble, 26, 1 (1976), pp 81-140
- [3] Kashiwara - Kawai : Second microlocalization and Asymptotic
Expansions, Lect. Note in Physics No. 126, pp 21-76
- [4] Kashiwara - Laurent : Théorèmes d'annulation et deuxième
microlocalisation, Prepublication d'Orsay.
- [5] Lebeau : Deuxième Microlocalisation sur les sous-variétés
isotropes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 35, 2 (1985)
pp 145-216
- [6] Okada - Tose : FBI-transf. and second microlocalization,
J. Math. pures et appl. 70, 1991, pp 427-453.
- [7] S-K-K : Microfes and pseudodifferential equations,
Lect. Note in Math. Vol 287, Springer Verlag, 1973. pp 265-529
- [8] Takeuchi : Master thesis I, II, (1992), presented to.
Univ. of Tokyo.