

固有デファイナブル作用について

川上 智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

ここでは、実数体の通常の構造 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ の順序極小拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \dots)$ で考察する。このような構造は、[12] により、非可算無限個存在することが知られている。実閉体上でも議論することができるが、ここでは、 $\mathcal{M}$ に制限して考える。デファイナブルカテゴリーに関しては、[1], [2] などに性質がまとめられている。ここでは、デファイナブル集合は、すべてパラメータつきで考える。

連続のカテゴリーでのスライスの存在・埋め込み定理等の古典的な結果 [7], [8], [9], [10] が知られており、その固有デファイナブル版を考察する。詳しい内容は、[6] に書かれている。 G がコンパクトの場合は、[4], [3] 等で研究されている。固有の場合が、 G がコンパクトの場合の一般化にあたる。

$X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f: X \rightarrow Y$ がデファイナブル写像とは、 f のグラフがデファイナブル集合であることである。ここでは、デファイナブル写像は連続と仮定する。

$\mathbb{R}^n$ のデファイナブル部分集合 G がデファイナブル群とは、 G が群であって、群演算 $G \times G \rightarrow G, G \rightarrow G$ がデファイナブル写像となることである。

G をデファイナブル群、 X をデファイナブル集合とすると、デファイナブル写像 $\phi: G \times X \rightarrow X$ で次を満たすものをデファイナブル群作用という。

- (1) $\forall x \in X, \phi(e, x) = x$, ただし、 e は G の単位元とする。

2000 *Mathematics Subject Classification*. 14P10, 57R22, 03C64.

Keywords and Phrases. Definable G sets, definable slices, proper, o-minimal, definable G imbeddings.

$$(2) \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X, \phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1 g_2, x).$$

簡単のため、 $\phi(g, x)$ のことを gx と書く。

デファイナブル G 集合とは、デファイナブル集合とデファイナブル群作用 $\phi: G \times X \rightarrow X$ の組のことである。簡単のため、 X と略記する。デファイナブル写像 $f: X \rightarrow Y$ が**デファイナブル固有**とは、 Y の任意のデファイナブルコンパクト部分集合 C に対して、 $f^{-1}(C)$ がコンパクトとなることである。デファイナブル G 集合 X が**固有デファイナブル G 集合**とは、写像 $\phi \times id: G \times X \rightarrow X \times X, (g, x) \mapsto (gx, x)$ がデファイナブル固有となることである。 G がコンパクトデファイナブル群ならば、任意のデファイナブル G 集合は、固有となる。

G がコンパクトの場合、軌道型が定義されている。固有作用の場合に、軌道型について考える。 X をデファイナブル G 集合、 $x \in X$ のとき、 $G(x) := \{gx | g \in G\}$ を x を通る軌道という。ある $x \in X$ が存在して、 $X = G(x)$ のとき、作用が推移的または X を等質空間という。

定理 1 (Definable quotients, 10.2.3, 10.2.5 [1]). 群 G をデファイナブル群、 X を固有デファイナブル G 集合とすると、軌道空間 X/G はデファイナブル集合で、射影 $\pi: X \rightarrow X/G$ は全射デファイナブル固有デファイナブル写像となる。

G をデファイナブル群とする。 G の部分群 H が**デファイナブル部分群**とは、 H が G のデファイナブル部分集合であることである。[11] より、 G の任意のデファイナブル部分群は、閉部分群となる。この逆は成立しない。 $\mathbb{R}$ の閉部分群 $\mathbb{Z}$ はデファイナブルでない。

H をデファイナブル群 G のデファイナブル部分群とすると、 $H \times G \rightarrow G, (h, g) \mapsto hg$ により、 G はデファイナブル H 集合とみれる。定理 1 より、以下の命題を得る。

命題 2. H をデファイナブル群 G のデファイナブル部分群とする。このとき、 G は、固有デファイナブル H 集合で、射影 $G \rightarrow G/H$ は全射デファイナブル固有デファイナブル写像である。

X, Y をデファイナブル集合とする。同相写像 $f: X \rightarrow Y$ が**デファイナブル同相写像**とは、 f がデファイナブルであることである。

X, Y をデファイナブル G 集合とする。写像 $f: X \rightarrow Y$ が G 写像とは、 $\forall g \in G, \forall x \in X$ $f(gx) = gf(x)$ となることである。 G 写像 $f: X \rightarrow Y$ が**デファイナブル G 写像**とは、 f がデファイナブル写像となることである。デファイナブル G 写像 $f: X \rightarrow Y$ が**デファイナブル G 同相写像**とは、 f が同相写像となることである。 $x \in X$ とするとき、 $G_x := \{g \in G | gx = x\}$

を x のアイソトロピー部分群という。 X が固有のとき、任意の $x \in X$ に対して、 G_x がコンパクトとなる。

命題 3. G をデファイナブル群、 X を推移的 G 作用をもった固有デファイナブル G 集合、 $x \in X$ とする。このとき、 $f: G/G_x \rightarrow X, f(gG_x) = gx$ はデファイナブル G 同相写像である。

この命題の証明には、少し準備を要する。

定理 4 (部分的自明性定理、9.1.2 [1]). X, Y をデファイナブル集合、 $f: X \rightarrow Y$ を連続とは仮定しないが、グラフがデファイナブルな写像とする。このとき、 Y の有限個のデファイナブル部分集合への分割 $\{C_i\}$ とデファイナブル同相写像 $k_i: f^{-1}(C_i) \rightarrow C_i \times f^{-1}(a_i)$ が存在して、 $f|f^{-1}(C_i) = p_i \circ k_i$ となる。ただし、 $a_i \in C_i, p_i: C_i \times f^{-1}(a_i) \rightarrow C_i$ を射影とする。

この定理の系として以下を得る。

系 5. $f: X \rightarrow Y$ を連続とは仮定しないが、グラフがデファイナブルな写像とする。このとき、 X のデファイナブル開集合 Z が存在して、 $f|Z: Z \rightarrow Y$ は連続で、 $\dim(X - Z) < \dim X$ 。ただし、 $\dim \emptyset = -\infty$ とする。

命題 3 の証明. 定理 1 より、 G/G_x はデファイナブル集合である。 f の構成法より、 f は全単射連続 G 写像である。系 5 より、 X のデファイナブル開部分集合 U が存在して、 $f^{-1}|U: U \rightarrow f^{-1}(U)$ は連続である。 $g \in G$ で移すことによ、 f^{-1} は連続となる。 $\square$

この証明でデファイナブルを仮定しない一般の場合は、 f^{-1} の連続性を導くことができない。系 5 が本質的である。

G をデファイナブル群とする。二つの等質固有デファイナブル空間が同値とは、それらがデファイナブル G 同相であることである。 G/H の同値類を (G/H) で表す。等質固有デファイナブル G 集合の同値類 $(X), (Y)$ に対して、順序 $(X) \geq (Y)$ が成立するとは、デファイナブル G 写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在することと定義する。 $(X) = (G/H), (Y) = (G/K)$ のとき、 $(X) \geq (Y) \Leftrightarrow H$ が K のデファイナブル部分群と共役なることである。

この順序は、一般の以下の順序の公理を満たす。

- (1) $(X) \leq (X)$ 。
- (2) $(X) \leq (Y)$ かつ $(Y) \leq (X)$ ならば $(X) = (Y)$ 。

(3) $(X) \leq (Y)$ かつ $(Y) \leq (Z)$ ならば $(X) \leq (Z)$ 。

公理の (1) と (3) を満たすことを確かめるのは容易だが、(2) を示すには、デファイナブルの仮定がないとできない。この同値類を軌道型という。この軌道型の有限性が次の定理である。

定理 6 ([6]). G をデファイナブル群とすると、任意の固有デファイナブル G 集合 X は有限個の軌道型しかもたない。

この定理で、 X のデファイナブルの仮定をはずすと、たとえば無限個の連結成分をもつことを許すと、不成立となる。デファイナブルの仮定が本質的である。連続のカテゴリリー・ C^∞ 級のカテゴリリーでは、一般にはこの定理を導くことができない。

G をデファイナブル群、 X を固有デファイナブル G 集合、 H を G のコンパクトデファイナブル群とする。 $S \subset X$ がデファイナブル H スライスとは、 GS が X の開集合であって、デファイナブル G 写像 $f: GS \rightarrow G/H$ が存在して、 $f^{-1}(eH) = S$ となることである。このとき、 GS をデファイナブルチューブという。 $\forall x \in X$ に対して、 x におけるデファイナブルスライスとは、デファイナブル G_x スライスで x を含むものをいう。

定理 7 ([6]). G をデファイナブル群、 X を固有デファイナブル G 集合とする。

- (1) 任意の $x \in X$ に対して、 x におけるデファイナブルスライスが存在する。
- (2) X は有限個のデファイナブルチューブで覆われる。

この定理の証明の鍵となるのは、デファイナブル集合の三角形分割定理である

$\mathbb{R}^n$ の中の複体 K とは、 $\mathbb{R}^n$ の中の単体の有限個の集合で、 $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ ならば $\overline{\sigma_1} \cap \overline{\sigma_2} = \emptyset$ またはある共通の辺単体 τ が存在して、 $\overline{\sigma_1} \cap \overline{\sigma_2} = \tau$ となることである。ただし、 $\overline{\sigma_1}, \overline{\sigma_2}, \tau$ はそれぞれ $\mathbb{R}^n$ の中での σ_1, σ_2, τ の閉包を表す。ここで τ は K に属することを要求していない。 $A \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル集合とする。 $\mathbb{R}^n$ における A のデファイナブル三角形分割とは、 $\mathbb{R}^n$ における複体 K とデファイナブル同相写像 $\phi: A \rightarrow |K|$ の組 (ϕ, K) のことである。この三角形分割が $B \subset A$ と両立するとは、 B が $\phi^{-1}(K)$ の元の和集合となることである。

定理 8 (デファイナブル三角形分割定理、8.2.9 [1]). S を $\mathbb{R}^n$ のデファイナブル集合、 $S_1, \dots, S_k$ を S のデファイナブル部分集合とする。このとき、 S の $\mathbb{R}^n$ におけるデファイナブル三角形分割が存在して、 $S_1, \dots, S_k$ と両立する。

定理 7 は軌道空間 X/G にデファイナブル三角形分割定理を適用して、証明される。この三角形分割の有限性から、定理 7 の (2) が得られる。

[5]により、デファイナブルファイバー束が導入されている。定理7の系として、 X が1軌道型のとき、射影 $p: X \rightarrow X/G$ はデファイナブルファイバー束の構造をもつことが示される。

系 9. G をデファイナブル群、 X を固有デファイナブル G 集合とし、 X が1軌道型 (G/H) をもつとき、 $(X, p, X/G, G/H, N(H)/H)$ はデファイナブルファイバー束である。ただし、 $p: X \rightarrow X/G$ は射影、 $N(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ とする。

[5]においては、系9の X がコンパクトを仮定した場合が証明されている。

G をデファイナブル群とする。 G の表現写像とは、群準同型写像 $G \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ でデファイナブル写像となるものである。 G の表現とは、 G の表現写像の表現空間のことである。ある $GL_n(\mathbb{R})$ のデファイナブル部分群とデファイナブル線形群という。

定理 10 ([6]). G をデファイナブル線形群、 X を固有デファイナブル G 集合とすると、 X は G のある表現にデファイナブル G 埋め込み可能である。

この定理は、まず、 X から G 不動点 X^G を除いた集合が、 G のある表現にデファイナブル G 埋め込み可能であることを示す。次に、 $X - X^G$ が G の別の表現にデファイナブル G 埋め込み可能であることを帰納法を用いて示す。この帰納法を用いるところで、 G がデファイナブルであることが本質的となる。この二つを用いて、 X が G のある表現にデファイナブル G 埋め込み可能であることを証明する。

REFERENCES

- [1] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series 248, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).
- [2] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.
- [3] T. Kawakami, *Definable G CW complex structures of definable G sets and their applications*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci., **54**, (2004), 1-15.
- [4] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123**, (2002), 323-349.
- [5] T. Kawakami, *Homotopy property of definable fiber bundles*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **53**, (2003), 1-6.
- [6] T. Kawakami, *Proper definable actions*, preprint.
- [7] D. Montgomery and L. Zippin, *A theorem on Lie groups*, Bull. Amer. Math. Soc., **48**, (1942), 448-452.
- [8] G.D. Mostow, *Equivariant embeddings in Euclidean spaces*, Ann. of Math., **65**, (1957), 432-446.
- [9] R.S. Palais, *Imbedding of compact differential transformation groups in orthogonal representations*, J. Math. Mech., **6**, (1957), 673-678.
- [10] R.S. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. **73**, (1961), 295-323.

- [11] A. Pillay, *On groups and fields definable in o-minimal structures*, J. Pure Appl. Algebra **53**, (1988), 239-255.
- [12] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16**, (2003), no. 4, 751-777.