

序 論

— 乱流理論の論理と問題 —

京大 理 巽 友 正

「乱流の分布汎函数方程式」研究会を始めるに当って、乱流理論の論理的構成と、その現状における問題点について簡単に述べて、今後の討論のための参考にしたい。

§ 1. 乱流理論の課題

対象を非圧縮粘性流体に限ると、流れの場合は速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ と圧力 $p(\mathbf{x}, t)$ によって決定され、それぞれはつぎの二つの方程式に従わなければならない：

$$\text{連続方程式} \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

連動方程式 (Navier-Stokes 方程式)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (2)$$

ただし、 ρ は密度、 ν は動粘性率。

乱流理論では、 $\mathbf{u}$ 、 p は確率変数を考え、それぞれに対して確率分布 $P(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ 、 $P(p(\mathbf{x}))$ が存在するものとする。確率平均に $\bar{}$ 、平均からの偏差に $\hat{}$ をつけて表わせば、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \\ p(\mathbf{x}, t) &= \bar{p}(\mathbf{x}, t) + \hat{p}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (3)$$

$\bar{\mathbf{u}}$ 、 $\bar{p}$ を平均流、 $\hat{\mathbf{u}}$ 、 $\hat{p}$ を乱れ (turbulence) という。

(3)を(2)に代入して平均をとり，(1)を考慮すれば，平均流に対する運動方程式

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad}) \bar{\mathbf{u}} = - \frac{1}{\rho} \text{grad} (\bar{p} + \rho \overline{\mathbf{u} \mathbf{u}}) + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} \quad (4)$$

が得られる。(4)式は $\rho \overline{\mathbf{u} \mathbf{u}}$ の項がなければ， $\bar{\mathbf{u}}$ ， $\bar{p}$ に対する(2)式と全く同形で，平均流は層流（乱れない）の場合と同じになる。したがって， $\rho \overline{\mathbf{u} \mathbf{u}}$ の項が乱れの平均流入の作用を表わす大事な項で，乱流の平均流を求めるには，まずこの項を求めなければならない。 $\rho \overline{\mathbf{u} \mathbf{u}}$ は応力の次元をもち，Reynolds 応力とよばれる。

§ 2. 気体論との対比

Reynolds 応力と平均流との関係は，気体分子運動論における運動量輸送と巨視的な輸送係数との関係に似ている。そこで，最も簡単な類推として，気体の平均自由行路に対応する長さとして混合距離という概念を乱流に導入し，それによって平均流を求めようとする混合距離理論が生れた。しかし，混合距離は平均自由行路とは違って現実の乱流過程を表わしていないので，この理論は現象論でしかあり得ない。

気体論との対比をもう少し精密に調べるため，気体論の構成をふり返ってみよう。

(1) まず，巨視的な状態は一様であると仮定して， N 個の気体分子の位置 $\mathbf{x}_i$ ，速度 $\mathbf{v}_i$ ($i=1, 2, \dots, N$) について分布函数 $P(\{\mathbf{x}\}, \{\mathbf{v}\})$ を定義する。 V 個分子に対する運動方程式と確率保存則とから， P を支配する Liouville 方程式を導く。 P に関して定義されたエントロピーは保存される。

P から出発して高次相関を逐次無視することによって，一点 $\mathbf{x}$ における速度 $\mathbf{v}$ に対する分布函数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ を定義し，Liouville 方程式から $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ に対する Maxwell-Boltzmann 方程式を導びく。 f に関して定義されたエントロピーは保存されない。エントロピー極大の条件から Maxwell-Boltzmann 分布 $f_{M.B.}(\mathbf{v})$ が定まる。

(2) 巨視的な状態は一様ではないが，その grad は一定であり，しかも grad の値があ

より大きくない場合を考え、その場合の分布を $f(\mathbf{v}) = f_{M.B.}(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{v})$ とおく。

$|f_1| \ll |f_{M.B.}|$ をいう近似のもとに f_1 に対する方程式を解いて f_1 を求め、 f に関する平均としていろいろな輸送係数、たとえば、粘性率 ν 、熱伝導率 κ などを計算する。

(3) 輸送係数が定まると、巨視的な場の量、たとえば速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 、圧力 $p(\mathbf{x})$ などに対する方程式が (1), (2) のように得られる。これを解いて $\mathbf{u}$ 、 p を求めるのは流体力学の仕事である。

以上の気体論の構成と平行して、乱流理論の構成を考えてみよう。

(1) 平均流のない一様な乱れの場合を考え、その中でさらに等方性を仮定する。乱れの速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ に対して分布汎関数 $P[\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})]$ および特性汎関数

$$\Phi[\mathbf{y}(\mathbf{x})] = \overline{\exp[i \int \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}]}$$

を定義する。 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ に対する運動方程式 (1), (2) と確率保存則とから、 Φ に対する Hopf 方程式を導く。 P に対する方程式も同様に導かれる。 P に関するエントロピーは $\nu > 0$ の場合は減少する ($\nu = 0$ のときは保存)。

Liouville 方程式から Boltzmann 方程式を導びいたように、Hopf 方程式から一体分布 $f(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}})$ を導びくことが出来ない。乱流の場合には高次相関を無視することができないのである。乱流はこの点、気体よりも液体に似ている。

(2) 平均流のない一様な等方性乱れに関して、一点分布関数 $f_{H.I.}(\hat{\mathbf{u}})$ が求まったとしよう。簡単な平均流、 $\text{grad } \bar{\mathbf{u}} = \text{一定}$ 、の場合に、もし分布関数が $f(\hat{\mathbf{u}}) = f_{H.I.}(\hat{\mathbf{u}}) + f_1(\hat{\mathbf{u}})$ と書けて、 $|f_1| \ll |f_{H.I.}|$ と近似することができれば、気体論との対比は完全になるが、残念ながらこの近似は成立たない。その理由は、 $f_{H.I.}$ が時間的に変化する関数であるのに対して、 f は時間的に定常なものを考えるからである。したがって、乱流において f を求める問題は $f_{H.I.}$ を求める問題とは全く別問題であると考えの方がよい。

もし、この問題の $f(\hat{\mathbf{u}})$ が求まったとしたら、Reynolds 応力 $\overline{\hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}}}$ は直ちに計算できる。

(3) Reynolds 応力が平均流と関係づけられれば、あとは平均流に関する流体力学の問

題になる。

§ 3. 乱流理論の問題点

前節に述べた対比の成立しない点はすべて乱流理論の難点となる。

(1) まず、乱流には厳密な意味で平衡状態が存在しないこと。 $\nu > 0$ の場合、流体運動はエネルギー的に閉じておらず、乱流のエントロピーは時間的に減少する。

乱流理論以外で非平衡状態を取扱う理論といえば、非平衡統計力学が代表的なものであるが、これについて西川恭治氏に解説をお願いします。また、流体より簡単な力学系である一次元格子における不規則運動は乱流理論に非常に参考になるので、これについて松田博嗣氏に解説して頂く。

乱流理論の枠内でこの非平衡性の困難の解決として提案された方法に、局所平衡の考え方と偶然外力の導入との二つがある。前者は、全体として非平衡な系の中で局所的な平衡状態（波数の大きい乱れの成分に実現する）に着目する理論（Kolmogorov）で、その代表的な結論に有名な $-5/3$ 乗スペクトルがある。後者は、 ν による消散を補うため一様等方的な偶然外力からのエネルギー流入を仮定する理論（Kraichnan, Edwards, 細川など）で、定常状態を取扱える大きい利点がある反面、結果が偶然外力の特性に依存するという点で一般性に欠ける。

外力の代りに一様でない平均流を考えれば、問題は、はるかに現実的になるが、この場合、乱れの等方性が仮定できないので取扱いが非常に厄介になる。これに属する理論としては、一様なズレ運動の場における一様非等方性乱れの解析（Burgers-Mitchner, Craya）があるだけである。

(2) 確率分布が関数 $\hat{u}(\mathbf{x})$ の汎関数 $P(\hat{u}(\mathbf{x}))$ であるため、解析は N 体分布関数に比べて遙かに困難になる。しかも、その N 体分布関数といえども、これを直接取扱っている理論はまだないのである。このことから類推するに、特性汎関数方程式（あるいは分布汎関数方程式）を直接解くという努力は、非常に困難でかつ実りの少いものになる虞れがある。

分布あるいは特性関数が汎関数となることを避ける一つの方法は、乱れの空間に周期性を仮

定することである。しかし、この場合にも周期 $L \rightarrow \infty$ の極限移行にいろいろ問題がある。一様な乱れの場合は空間的な定常過程であるから、その表現について小野山卓爾氏に解説をお願いする。また、同時相関の表現について小倉久直氏の研究発表がある。

(3) 汎函数方程式の厳密解を得るという研究方向が当分大きな進展が望めないとすれば、どのような近似解法が最も有効であるかという問題になる。

乱流速度の Wiener-Hermite 展開法と Hopf の特性汎函数方程式の特解との関係について今村勤氏の注意がある。一方、特性汎函数の独立変数を Hermite 多項式で展開する方法について桑原真二氏の計算結果の紹介がある。Burgers 乱流については要素解が解析的に閉じた形に求まるという利点があるので、これを利用した特性汎函数方程式の数値解法の結果が細川巖氏によって発表される。最後に、巽友正による高 Reynolds 数における乱れの漸近解法の発表がある。