

## $G$ -積空間の James 数

京大・理 入江幸右衛門 (Kouyemon Iriye)

### § 0. 序

$M$  を連結で向きづけ可能な閉多様体 (一般には、“写像度” という概念が定義され得る空間)、 $G$  は  $m$  次対称群 ( $m > 1$ ) の *transitive* な部分群とする。このとき、 $G$  は  $(M)^m = M \times \cdots \times M$  ( $m$  個) に自然な方法で作用する。写像

$$f: (M)^m \rightarrow M$$

は、 $\forall (x_1, \dots, x_m) \in (M)^m$  と  $\forall \alpha \in G$  に対して

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(m)})$$

を満たすとき、 $G$ -invariant であると言う。このような  $G$ -invariant map  $f: (M)^m \rightarrow M$  に対して、その *type* という整数を

$$t(f) := \text{degree}(f \circ i: M \rightarrow M)$$

によって定義する。ここに、 $i: M \rightarrow (M)^m$  は、 $x \in M$  をある基点として、 $i(x) = (x, *, \dots, *)$  によって定義される写

像である。このような定義のもとで、自然に次の問題が提起される。

問題 (I.M. James)  $J(G, M) := \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists G\text{-invariant map } f: (M)^m \rightarrow M \text{ s.t. } t(f) = n\} \subset \mathbb{Z}$  を決定せよ。

ここでは、この問題に対する若干の結果と問題点を述べたいと思う。

## §1. 準備

まず最初に、以下の必要のために二、三の準備を行なう。

補題 (A. Kono)  $G$  を有限群、 $X$  を連結な  $G$ -空間、素数  $p$  は  $G$  の位数と素であるとする ( $p=0$  でもよい)。このとき、 $G$ -写像に関して自然な写像

$$\tau = \tau(X) : (\Sigma X/G)_{(p)} \rightarrow (\Sigma X)_{(p)}$$

で、 $(\Sigma \pi \circ \tau) = \text{id} : (\Sigma X/G)_{(p)} \rightarrow (\Sigma X/G)_{(p)}$  となるものが存在する。

注意. 上の補題も一般化して、次のような命題:

「 $G$  を有限群、 $H$  は  $G$  の部分群、 $X$  は  $G$ -空間、素数  $p$  は  $|G/H|$  と素であるとする。このとき写像

$$\tau : \Sigma^\infty X/G_{(p)} \rightarrow \Sigma^\infty X/H_{(p)}$$

で、 $\pi \circ \tau = \text{id} : \Sigma^\infty X/G_{(p)} \rightarrow \Sigma^\infty X/G_{(p)}$  となるものが存在

する。」

が考えられるが、これは正しくはない。反例は、たとえば、 $G = \mathbb{G}_3$ ,  $H = \{1, (2,3)\} < G$ ,  $X = S^n \times S^n \times S^n$ ,  $p=2$  の場合を考えればよい。実際、[6, §14]により自然な写像

$$\pi^*: H^*(X/G; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(X/H; \mathbb{Z}/2)$$

は、split monomorphism であるが Steenrod algebra の module としては split しないことが分かる。

次に、 $M$  が連結で向きづけ可能な関多様体、 $j: M \rightarrow \Omega \Sigma M$  も canonical embedding とする。そして、集合

$$D(M) := \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists f: \Omega \Sigma M \rightarrow M \text{ s.t. } \deg(f \circ i) = n\}$$

を考える。 $M$  が  $H$ -空間ならば、[7, Theorem 3.2] などにより  $D(M) \ni 1$  であることがわかる。このことと [5] により、次の命題は明らかであろう。

命題.  $M$  は連結で向きづけ可能な関多様体とする。

このとき、 $D(M) \neq \{0\}$  であるためには、 $M$  が rational  $H$ -空間であることが必要かつ十分である。また、 $M$  が modulo  $p$   $H$ -空間なく、 $D(M)$  の元  $n$  で  $p$  と素なものが存在する。

## §.2. $G$ -積空間の James 数についての一般論

以下、 $M$  様体  $M$  は単連結で向きづけ可能な閉  $M$  様体とする。このとき、 $(M)^m$ 、 $(M)^m/G$  なども単連結になる。また、 $G$ -invariant map  $f: (M)^m \rightarrow M$  と  $f': (M)^m/G \rightarrow M$  で  $f = f' \circ \pi$  を満たすものは一対一に対応するから両者を同一視する。また、 $\pi \circ i: M \rightarrow (M)^m/G$  も  $i$  と書く。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (M)^m & & \\
 & \nearrow i & \downarrow \pi & \nwarrow f & \\
 M & & & & M \\
 & \searrow i & & \nearrow f' & \\
 & & (M)^m/G & & 
 \end{array}$$

命題 2.1.  $J(G, M) \neq \{0\}$  であるためには、 $M$  が rational  $H$ -空間であることが必要かつ十分である。

証明. まず  $J(G, M) \neq \{0\}$  とすれば、 $G$ -invariant map  $f: (M)^m \rightarrow M$  で  $t(f) \neq 0$  となるものが存在する。 $i': M \times M \rightarrow (M)^m$  を  $i'(x, y) = (x, y, *, \dots, *)$  と定義して、 $f \circ i': M \times M \rightarrow M$  を考える。ここで  $i_1: M \rightarrow M \times M$ ,  $x \mapsto (x, *)$ ,  $i_2: M \rightarrow M \times M$ ,  $x \mapsto (*, x)$  で定義すれば、 $f$  は  $G$ -invariant より

$$f \circ i' \circ i_1 = f \circ i' \circ i_2: M \rightarrow M$$

で、その写像度は 0 ではない。つまり、 $(f \circ i' \circ i_1)^*: H^*(M, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(M, \mathbb{Q})$  は同型で  $M$  は単連結より

$$(f \circ i)_{(10)} : (M \times M)_{(10)} \cong M_{(10)} \times M_{(10)} \rightarrow M_{(10)}$$

が  $M_{(10)}$  の  $H$ -空間としての積を与えているとみなしてよい。  
よって、 $M$  は *rational*  $H$ -空間である。

次は逆に  $M$  が *rational*  $H$ -空間であるとする。§2  
の補題を  $X = (M)^m$ ,  $p = 0$  に対して適用する。  $pr : (M)^m \rightarrow$   
 $M$  を最初の成分への射影として

$$\tau' = \Sigma(pr) \circ \tau : \Sigma(M)^m / G_{(10)} \rightarrow \Sigma(M)^m_{(10)} \rightarrow \Sigma M_{(10)}$$

を考えると、 $\tau' \circ \Sigma i \simeq id : \Sigma M_{(10)} \rightarrow \Sigma M_{(10)}$  を満たす。 $M_{(10)}$   
が  $H$ -空間より写像  $g : \Omega \Sigma M_{(10)} \rightarrow M_{(10)}$  で  $g \circ j \simeq id :$   
 $M_{(10)} \rightarrow M_{(10)}$  となるものが存在する。ここに、 $j : M_{(10)} \rightarrow \Omega \Sigma M_{(10)}$   
は *canonical embedding* である。 $\tau'' : (M)^m / G_{(10)} \rightarrow$   
 $\Omega \Sigma M_{(10)}$  を  $\tau'$  の *adjoint map* として合成

$$f' = g \circ \tau'' : (M)^m / G_{(10)} \rightarrow M_{(10)}$$

を考えると、 $f' \circ i \simeq id : M_{(10)} \rightarrow M_{(10)}$  である。したがって、  
[5] により、写像

$$f : (M)^m / G \rightarrow M$$

でその *type*  $t(f)$  が 0 でないものが存在する。

命題 2.2. (J.M. James) 写像  $\mu : M \times M \rightarrow M$  でそ  
の *type* が (1,2) のものが存在すれば、 $J(G, M)$  は *ideal* をな  
す。

証明は [2] を参照。また、上記のような  $\mu$  が存在

しなくても、 $J(G, M)$  は ideal になることがある。たとえば、 $J(G, S^{2t_1+1} \times \cdots \times S^{2t_s+1}) = J(G, S^{2t_1+1}) \cdots J(G, S^{2t_s+1})$  が成り立ち、 $J(G, S^{2t_1+1} \times \cdots \times S^{2t_s+1})$  は ideal をなす。

命題 2.3.  $p$  を素数とする。このとき、 $p \mid |G|$  ならば  $p \mid J(G, M)$  ( $\forall n \in J(G, M)$ ) に対して  $p \mid n$ ) である。

証明:  $m=p$ ,  $G=\mathbb{Z}/p$  のときに証明すれば十分である。そこで、 $CP^p M = (M)^p / \mathbb{Z}/p$  とおく。  $H^*(CP^p M; \mathbb{Z}/p)$  の構造は、[6] により分かっている。

証明は背理法による。よって、 $\mathbb{Z}/p$ -invariant map  $f: CP^p M \rightarrow M$  でその type  $t(f)$  が  $p$  と素なものが存在したとする。仮定より、

$$(f \circ i)^*: H^*(M; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(M; \mathbb{Z}/p)$$

は同型である。ここで、合成

$$H^*(CP^p M; \mathbb{Z}/p) \xrightarrow{f^*} H^*(M; \mathbb{Z}/p) \xrightarrow{(f \circ i)^*{}^{-1}} H^*(M; \mathbb{Z}/p)$$

も考えることにより、 $f: CP^p M \rightarrow M$  は  $(f \circ i)^* = \text{id}$  を満たすと仮定してよい (以下の議論では、 $H^*(CP^p M; \mathbb{Z}/p)$ 、 $H^*(M; \mathbb{Z}/p)$  などの環構造と Steenrod algebra 上の加群構造しか用いないから)。また、 $H^*(M; \mathbb{Z}/p)$  は Hopf 代数であることを注意しておく。

$$p=2 \text{ のとき: } H^*(M; \mathbb{Z}/2) = 0 \text{ for } 0 < * < r, H^r(M; \mathbb{Z}/2)$$

$\neq 0$ ,  $\alpha \neq 0 \in H^r(M; \mathbb{Z}/2)$  とする。このとき、

$$(2.4) \quad f^*(\alpha^{2^{s+1}}) = \phi^*(\alpha^{2^{s+1}} \times 1) + \sum_{j=2}^{2^s r} E_j(\alpha_j).$$

$$\alpha_{2^s r} = \alpha^{2^s}$$

と表わされる。証明は帰納法による。このとき、 $\alpha^{2^{s+1}} = 0$ 、 $\alpha^{2^s} \neq 0$  なる  $s$  をとれば、 $E_{2^s r}(\alpha^{2^s}) = 0$ 。よって、 $\alpha^{2^s} = 0$  となり矛盾である。

$p$  が奇素数のとき:

case i):  $H^*(M; \mathbb{Z}/p)$  に偶数次元の元で *non-decomposable* な元が存在するときは、 $p=2$  のときと同様の議論により矛盾が導かれる。

case ii):  $H^*(M; \mathbb{Z}/p)$  が case i) でないとき、つまり  $H^*(M; \mathbb{Z}/p) = \Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\dim \alpha_i = \text{odd}$ , のときを考える。  $\dim \alpha_1 \leq \dim \alpha_2 \leq \dots \leq \dim \alpha_n$  とし、 $\alpha = \alpha_1$  とする。 $\phi^* \alpha = 0$  ならば、

$$f^*(\alpha) = \phi^*(\alpha \times 1 \times \dots \times 1)$$

よ)

$$\begin{aligned} 0 &= f^*(\phi^* \alpha) = \phi^* f^*(\alpha) = \phi^*(\phi^* \alpha \times 1 \times \dots \times 1) + E_{2(p-1)}(\alpha) \\ &= E_{2(p-1)}(\alpha) \end{aligned}$$

$\dim \alpha \geq 3$  よ),  $E_{2(p-1)}: H^*(M; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(CP^p M; \mathbb{Z}/p)$  は単射である。よって、 $\alpha = 0$  となり矛盾する。次に、 $\phi^* \alpha$

$\neq 0$  の場合を考える。このとき、

$$f^*(\phi'x) = \phi^*(\phi'x \times 1 \times \cdots \times 1) + E_{2(p-1)}(x).$$

この両辺に Bockstein 準同型を apply して

$$\begin{aligned} 0 &= f^*(\Delta_p \phi'x) = \Delta_p f^*(\phi'x) \\ &= \Delta_p \phi^*(\phi'x \times 1 \times \cdots \times 1) + \Delta_p E_{2(p-1)}(x) \\ &= E_{2p-1}(x). \end{aligned}$$

この場合も  $x=0$  となり矛盾する。

命題 2.4. 素数  $p$  は  $G$  の位数と素であると仮定する。

このとき、 $G$ -invariant map  $f: (M)^m \rightarrow M$  での type  $t(f)$  が

$$t(f) = d \cdot \mathcal{L}, \quad d \in D(M), \quad (p, \mathcal{L}) = 1.$$

と表わせるものが存在する。

証明は命題 2.1. における証明と同様である。この命題は、 $D(M) \ni 1$  或 2 などのとき非常に有効である。

§.3.  $M = S^{2t+1}$  のとき。

$M$  が  $S^{2t+1}$  のとき、 $J(G, S^{2t+1})$  の正の生成元を  $k^{m, 2t+1}(G)$  と書く。

命題 3.1. ([3])  $k^{2, 2t+1}(Z/2) = 2^{\varphi(2t)}$  である。

ここに、 $\varphi(b) = \#\{0 < a \leq b \mid a \equiv 0, 1, 2 \text{ or } 4 \pmod{8}\}$  である。



命題 3.2. ([4])  $k^{n, 2t+1}(\mathbb{G}_m)$  は、 $m^t, (m-1)^t, \dots, 2^t$  のすべての数で割り切れる。

命題 3.3. ([7])  $p$  を素数、 $G^r$  を  $\mathbb{G}_{p^r}$  の  $p$ -Sylow 部分群とする。このとき、

$$k^{p^r, 2t+1}(G^r) = \begin{cases} 2 \cdot p^{rt} & \text{if } 2t+1 \neq 1, 3, 7, \\ p^{rt} & \text{if } 2t+1 = 1, 3, 7. \end{cases}$$

#### 参考文献

- [1] B. Gray: On the homotopy groups of mapping cones, Proc. London Math. Soc. 26 (1973), 497-520.
- [2] J.M. James: Symmetric function of several variables whose range and domain is sphere, Bol. Soc. Mat. Mexicana 1 (1956), 85-88.
- [3] , E. Thomas, H. Toda and G.W. Whitehead: On the symmetric square of spheres, J. Math. and Mech. 12 (1963), 771-776.
- [4] P.S. Landweber: On symmetric maps between spheres and equivariant K-theory, Topology 9 (1970), 55-61.
- [5] M. Mimura, G. Nishida and H. Toda: Locali-

zation of CW-complexes and its applications.

J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 596-624.

- [6] M. Nakaka: Cohomology theory of a complex with a transformation of prime period and its applications, J. Inst. Poly. O.C.U. 17 (1956) - 51-102.

- [7] K. Iriye: On the James number of cyclic maps of spheres, preprint.