

On Sapphire Spaces

神戸大 理 森元勘治 (Kanzi Morimoto)

二つの Solid tori をその境界で同一視して得られる三次元多様体を Lens space と呼び、Solid torus と Klein bottle 上の twisted I-bundle をその境界で同一視して得られる三次元多様体を Prism manifold と呼ぶことはよく知られている。

本稿では、二つの Klein bottle 上の twisted I-bundle をその境界で同一視して得られる三次元多様体を Sapphire space と呼び、この多様体の topological type を分類し、構造や性質を考察する。

§1 Sapphire spaces の定義と分類

K を Klein bottle とし、 KI を K 上の twisted I-bundle とする。 KI は二通りの Seifert fibrations π_1, π_2 を持つ。ここで π_1 の orbit manifold は index 2 の exceptional point を二つ持つ disk、 π_2 の orbit manifold は exceptional point を持た

ない、Möbius band である。(c.f. ch. VI of [4])

1.1 Lemma A を KI に proper に埋め込まれた、essential annulus とする。 A は $\mathcal{Y}_1$ 又は $\mathcal{Y}_2$ に saturated な annulus に ambient isotopic である。 $\mathcal{Y}_1$ のとき type I、 $\mathcal{Y}_2$ のとき type II と呼ぶ。

証明 [4] の Theorem VI.34 より直ちに従う。

$S' = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ iff $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ を複素平面上の単位円周とし、 $F = S' \times I$ とおく (但し $I = [0, 1]$)。 $f: F \rightarrow F$: homeo. を、 $f(e^{i\theta}, t) = (e^{-i\theta}, 1-t)$ で定義する。 $F \times I$ において $(x, 0) \in F \times \{0\}$ と $(f(x), 1) \in F \times \{1\}$ を同一視する関係を $\sim$ と書けば、 $KI \cong F \times I / \sim$ である (但し $\cong$ は同相を表わす)。

以下で KI 上の三つの self-homeomorphism を定義する。

$$\textcircled{1} \quad T: KI \rightarrow KI \quad ((e^{i\theta}, t), u) \in F \times I / \sim \text{ に対して}$$

$$T((e^{i\theta}, t), u) = ((e^{i(\theta+2\pi u)}, t), u)$$

$$\textcircled{2} \quad S: KI \rightarrow KI \quad ((e^{i\theta}, t), u) \in F \times I / \sim \text{ に対して}$$

$$S((e^{i\theta}, t), u) = ((e^{-i\theta}, t), u)$$

$$\textcircled{3} \quad R: KI \rightarrow KI \quad ((e^{i\theta}, t), u) \in F \times I / \sim \text{ に対して}$$

$$R((e^{i\theta}, t), u) = ((e^{i\theta}, t), 1-u)$$

即ち、 T は twist、 S は type I の annulus についての折り

返し、 R は type II の annulus についての折り返しである。

X を位相空間とする。 X の全ての self-homeo. からなる群の、identity に isotopic な homeo. 全体からなる部分群による剰余類群を X の homeotopy group と呼び $\mathcal{H}(X)$ と書く。

1.2 Proposition $\mathcal{H}(KI) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ここで $\mathbb{Z}_2$ は位数 2 の巡回群、生成元は T と S と R である。

略証 A を KI 内の type II の annulus とし、 h を KI の self-homeo. とする。 KI の isotopy によ、 $T h(A) = A$ とでき、さらに、 S 又は R を合成して、 A 上で identity とできる。故に KI を A で切り開くことにより結論を得る。

∂KI 上の simple loop で γ_1, γ_2 に saturated なものをそれぞれ α, β とする。 $\pi_1(\partial KI) \cong \langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle$ である。今、 KI と $K_1 I$ を二つの KI とする。 $i = 1, 2$ に対して

$$\pi_1(\partial K_i I) \cong \langle \alpha_i \rangle \oplus \langle \beta_i \rangle \quad \pi_1(K_i I) \cong \langle l_i, m_i \mid l_i m_i l_i^{-1} = m_i^{-1} \rangle$$

である。ここで、 α_i, β_i は α, β に対応し、 l_i, m_i は K_i 上の simple loops で、 α_i と l_i^2 、 β_i と m_i が homotopic となるものである。

$$G.L.(2, \mathbb{Z}) = \{(rstu) \mid r, s, t, u \in \mathbb{Z}, ru - st = \pm 1\} \text{ とおく。}$$

$(rstu) \in G.L.(2, \mathbb{Z})$ に対して $h: \partial K_i I \rightarrow \partial K_i I: \text{homeo.}$ を $h(\alpha_i) = r\alpha_i + s\beta_i$, $h(\beta_i) = t\alpha_i + u\beta_i$ で定義する。(但し h が導く基本群間の準同型

を再びと書いた)。このとき、 k によって $\partial K_1 I$ と $\partial K_2 I$ を同一視して得られる三次元多様体を $K(rstu)$ と書き、 $\text{type}(rstu)$ の Sapphire space と呼ぶ。

1.3 Proposition $K(rstu)$ は irreducible であり、
 $\partial K_1 I = \partial K_2 I$ は separating incompressible torus である。

$$\pi_1(K(rstu)) \cong \left\langle l_1, m_1, l_2 \mid \begin{array}{l} l_1 m_1 l_1^{-1} = m_1^{-1} \quad l_2^2 = l_1^{2r} m_1^s \\ l_2 l_1^{2t} m_1^u l_2^{-1} = m_1^{-u} l_1^{-2t} \end{array} \right\rangle$$

$$H_1(K(rstu)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{4t} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{if } s: \text{even} \\ \mathbb{Z}_{4t} \oplus \mathbb{Z}_4 & \text{if } s: \text{odd} \end{cases}$$

1.4 Lemma T を KI 内の incompressible torus とすれば、 T は ∂ -parallel である。

証明 [4] の Theorem VI.34 より 直ちに従う。

1.5 Lemma T を $K(rstu)$ 内の separating incompressible torus とすれば、 T は K 上の 3 つの types の tori の一つに ambient isotopic である。

① $\partial K_1 I = \partial K_2 I$

② $K_1 I \cap T, K_2 I \cap T$ 共に type I の annuli

③ $K_1 I \cap T =$ 二つの type I の annuli, $K_2 I \cap T =$ 二つの type

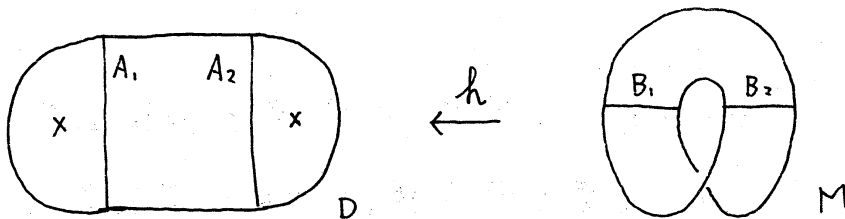
II の annuli. 又はこの逆。

略証 $K_1 I \cap T = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, $K_2 I \cap T = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$

A_i, B_i はそれぞれ $K_1 I, K_2 I$ 内の essential annulus ($n \geq 0$) としてよい。 $n=0$ のとき、明らかに ① が成立。 $n > 0$ のとき、 A_i, B_i 共に type I ならば ② が成立、 A_i と B_i の type が異なれば ③ が成立する。 共に type II とはならない。

1.6 Lemma T を $K(rstu)$ 内の、 Lemma 1.5 における ③ の torus とする。 このとき $K(rstu)$ の self-homeo. T を $\partial K_1 I$ へうつすものが存在する。

略証 一般性を失わずに、 $K_1 I \cap T = A_1 \cup A_2$ を type I, $K_2 I \cap T = B_1 \cup B_2$ を type II としてよい。 ∂B_1 の一つの component を β_2 , ∂A_1 の一つの component を α_1 とみなせば、 $h: \partial K_2 I \rightarrow \partial K_1 I$ において $h(\beta_2) = \alpha_1$ とおける。 故に $K(rstu) = K(r110)$ とおける。
 D と M をそれぞれ disk と Möbius band とし、 $P_1: K_1 I \rightarrow D$, $P_2: K_2 I \rightarrow M$ を π_1 と π_2 の fibration の projection とする。
 $P_1(A_1 \cup A_2)$ と $P_2(B_1 \cup B_2)$ に注目すれば、 T は $K(r110)$ を二つの KI に切り開き、その同一視は $(r110)$ とみなせることがわかる。



1.7 Theorem $A, A' \in G.L.(2, \mathbb{Z})$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$K(A), K(A')$ 二つの Sapphire spaces とする。

$K(A)$ と $K(A')$ が同相である為の必要十分条件は、 A' が $\pm A^{\pm 1}$, $\pm BA^{\pm 1}$, $\pm A^{\pm 1}B$, $\pm BA^{\pm 1}B$, のうちの一つに等しいことである。

略証 $K(A) = K_1I \cup K_2I$ $h: \partial K_2I \rightarrow \partial K_1I$, $K(A') = K'_1I \cup K'_2I$
 $h': \partial K'_2I \rightarrow \partial K'_1I$, とする。 $h=A$, $h'=A'$ である。

まず、 A' が上記行列のうちの一つ、たとえば $-A'B$ に等しいとする。
 $S: K'_1I \rightarrow K_2I$ とおけば、 $S|_{\partial K'_1I} = B$ であるから、
 $h \circ S|_{\partial K'_1I} \circ h': \partial K'_2I \rightarrow \partial K_1I$ は $A'BA = -A'BBA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となり、
これは $S \circ R: K'_2I \rightarrow K_1I$ へ拡張されて、 $K(A) \cong K(A')$ を得る。その他の場合も同様である。

逆に、 $f: K(A) \rightarrow K(A'): \text{homeo.}$ のとき、 $f(\partial K_1I)$ が $\partial K'_1I$ に重ならずことができれば明らか。そうでないとき、1.5 Lemma と 1.6 Lemma より、 $f(\partial K_1I)$ は 1.5 Lemma における ② の torus としてよく、このとき $A = (\varepsilon_1, 0 \pm \varepsilon_2)$, $A' = (\varepsilon'_1, 0 \pm \varepsilon'_2)$ ($\varepsilon_i = \pm 1$, $\varepsilon'_i = \pm 1$, $i=1,2$) とおけるが、 $H_1(K(A)) = H_1(K(A'))$ より $|\varepsilon_1| = |\varepsilon'_1|$ 。故に結論を得る。

次の定理は Homology group の計算と、Ch. 12 of [3] より直ちに従う。

1.8 Theorem $K(rst \pm u)$ が circle 上の torus bundle である為の必要十分条件は $t=0$ である。このとき

monodromy は $(-1 \ 5 \ 0 \ -1)$ となる。

次の定理は、[4]の Theorem VI.34 と KI の Seifert fibration より直ちに従う。

1.9 Theorem $K(rstu)$ が Seifert fibered space となる為の必要十分条件は、 r, s, t, u のうちの 하나가 0 となることである。またその orbit manifold は以下となる。

$s=0 \Leftrightarrow$ index 2 の exceptional points を 4 点持つ

2-Sphere

$r=0$ 又は $u=0 \Leftrightarrow$ index 2 の exceptional points を 2 点持つ

projective plane

$t=0 \Leftrightarrow$ exceptional point を持たない Klein bottle

§2 Sapphire Spaces の Heegaard genus

meridian loop

V を Solid torus とし、 $\pi_1(\partial V) \cong \langle l \rangle \oplus \langle m \rangle$ とする。また $\pi_1(\partial KI) \cong \langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle$ である。coprime integers (p, q) に対して $h: \partial V \rightarrow \partial KI$ を $h(m) = p\alpha + q\beta$ で定義し、この h によ、 ∂V と ∂KI を同一視して得られる三次元多様体を $M(p, q)$ と書く。これは

type (P, q) の Prism manifold と呼ばれる。(c.f. [1], [4], [5])

2.1 Lemma ① $M(P, q)$ は genus 2 の Heegaard splitting を持つ。② $M(P, q)$ が genus 1 の Heegaard splitting を持つ為の必要十分条件は $|q|=1$ である。

証明 ①は定義よりすぐわかる。②は [5] Theorem 2 より従う。

2.2 Lemma M を Sapphire space とし、 K を M 内の Klein bottle とし、 $N(K)$ を K の regular neighborhood とする。 $N(K) \cong KI$ かつ $\mathcal{C}(M - N(K)) \cong KI$ である。(但し $\mathcal{C}(\cdot)$ は閉包)

証明 M が orientable かつ irreducible であることと §1 の結果を用いれば直ちに結論を得る。

2.3 Lemma k を S^3 内の tame knot $N(k)$ を k の regular neighborhood、 $M(k) = \mathcal{C}(S^3 - N(k))$ とする。 μ_1, μ_2 を $\partial M(k)$ 上の交わらない k の meridian loops とし、 $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ を $M(k)$ の内部へ押し込んだ simple loops を $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ とする。二つの integers p_1, p_2 に対して $M(k)$ を $\bar{\mu}_i$ に沿って p_i/q_i surgery (但し q_i は p_i と互いに素な integer c.f. ch. 9 of [7]) して得られる三次元多様体を M_1 とすれば、 $H_1(M_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{G(p_1, p_2)}$ である。ここで

$G(p_1, p_2)$ は p_1 と p_2 の最大公約数である。

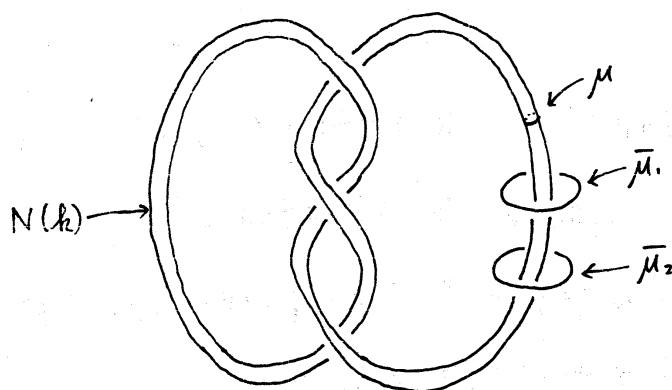
証明 Mayer-Vietoris の完全系列を用いて簡単に計算することができる。

さて、ここで Klein bottle を含む closed orientable 3-manifolds の三つの族を与える。

C(1) k を S^3 内の 2-bridge knot (c.f. ch 4 of [7]) とし (但し trivial knot も許す)、 $N(k)$ を k の regular neighborhood、 $M(k) = \mathcal{C}(S^3 - N(k))$ とする。 μ, μ_1, μ_2 を $\partial M(k)$ 上の三つの交わらない k の meridian loops とし、 μ_1, μ_2 を $M(k)$ の内部へ押し込んだ simple loops を $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ とする。 M_1 を $\bar{\mu}_1$ と $\bar{\mu}_2$ に沿った Dehn surgeries を行つて $M(k)$ から得られる 3-manifold とする。このとき、 β を μ に移す homeo. により ∂KI と ∂M_1 を同一視して得られる 3-manifolds 全体の族を C(1) とおく。

C(2) k を S^3 内の 2-bridge knot とし (但し trivial knot も許す)、 $N(k)$ を k の regular neighborhood、 $M(k) = \mathcal{C}(S^3 - N(k))$ とする。 μ, μ_1 を $\partial M(k)$ 上の二つの交わらない k の meridian loops とし、 μ_1 を $M(k)$ の内部に押し込んだ simple loop を $\bar{\mu}_1$ とする。 M_1 を $\bar{\mu}_1$ に沿った Dehn surgery を行つて $M(k)$ から得られる 3-manifold とする。このとき、 α を μ に移す homeo. により ∂KI と ∂M_1 を同一視して得られる 3-manifolds

全体の族を $C(2)$ とおく。



$C(3)$ L を Lens space とする。 $L = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$
 ここで V_i は solid torus である。 k を L 内の 1-bridge
 knot とする。 即ち $i=1,2$ に対して $(V_i, V_i \cap k)$ は $(A \times I, P \times I)$ に
 対として同相である。 ここで A は annulus , P は A の内部の
 ある点である。 $N(k)$ を k の regular neighborhood とし、
 $M(k) = \text{cl}(L - N(k))$ とし、 μ を $\partial M(k)$ 上の k の meridian loop と
 する。 このとき、 α を μ に移す homeo. により $\partial K I$ と $\partial M(k)$ を同
 一視して得られる 3-manifolds 全体の族を $C(3)$ とおく。

2.4 Lemma (Theorem 2 of [6]) M を Klein
 bottle を含む closed orientable 3-manifold とする。 M
 が genus 2 の Heegaard splitting を持つ 為の 必要十分条件は、
 M が $C(1)$ 又は $C(2)$ 又は $C(3)$ に属することである。

以上の準備により Sapphire spaces の Heegaard genus を決

めることができる。

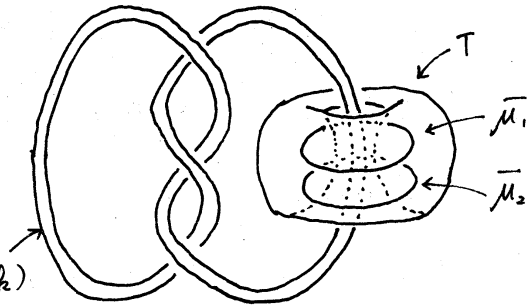
2.5 Theorem $K(rstu)$ を Sapphire space とする。

- ① $K(rstu)$ は genus 3 の Heegaard splitting を持つ。
- ② $K(rstu)$ が genus 2 の Heegaard splitting を持つ 為の必要十分条件は $|s|=1$ である。

略証 ①は定義よりすぐわかる。②の証明。 $K(rstu)$ が genus 2 の Heegaard splitting を持ったとする。2.4 Lemma より $K(rstu)$ は $C(1)$ 又は $C(2)$ 又は $C(3)$ に属する。

$C(1)$ のとき。 $C(1)$ の定義における M_1 と KI によって $K(rstu) = M_1 \cup KI$ となる。2.2 Lemma より $M_1 \cong KI$ 故 $H_1(M_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ 。一方2.3 Lemma より $H_1(M_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{G(P_1, P_2)}$ 。故に $|P_i| \geq 2$ となる。そこで

T を $M(k)$ 内の torus で $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ を core とする solid torus を張る torus とすれば、 $|P_i| \geq 2$ より T は M_1 で incompressible。 $N(k)$



1.4 Lemma より T は ∂ -parallel となり、 k は trivial knot となる。故に $|P_i|=2$ となり、 T は M_1 を $\mathbb{Z}_2$ とみたときの regular fiber となり $u=0$ を得る。即ち $|s|=1$ である。

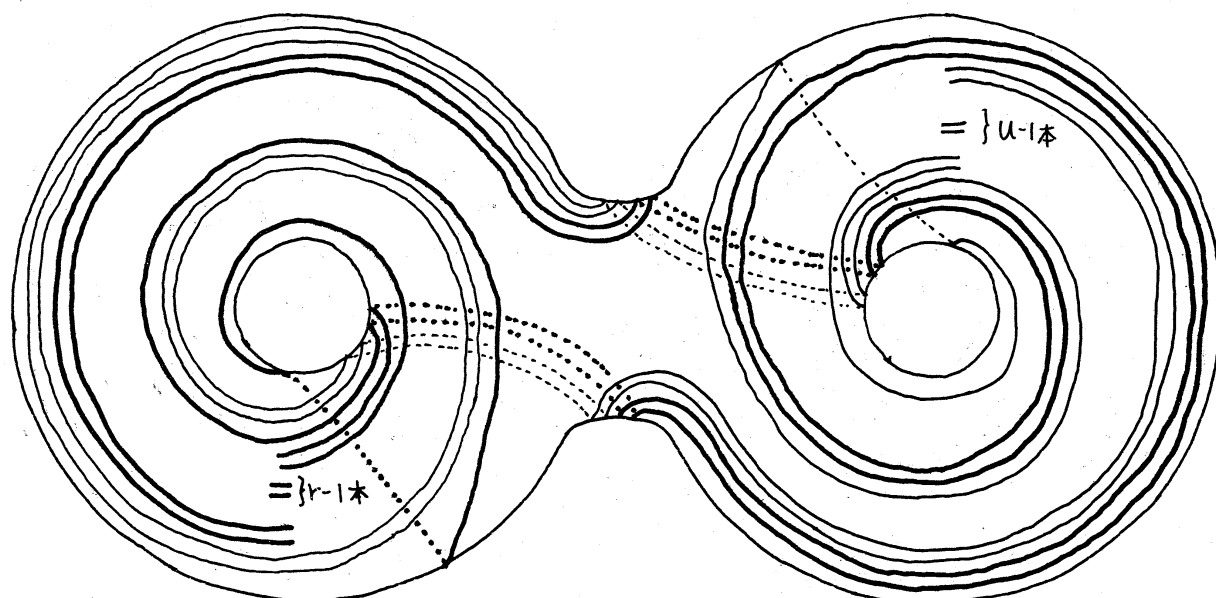
$C(2)$ のとき。 $H_1(M_1) \cong \mathbb{Z}$ となる故 Sapphire space は $C(2)$ には属さない。

C(3) のとき。 $L = V_1 \cup V_2$ を Lens space とし、 k を L 内の 1-bridge knot、 $N(k)$ を k の regular neighborhood とすれば 2.2 Lemma より $\mathcal{C}(L - N(k)) \cong KI$ となる故 L は Prism manifold となり、 2.1 Lemma と簡単な考察により $|S| = 1$ がわかる。

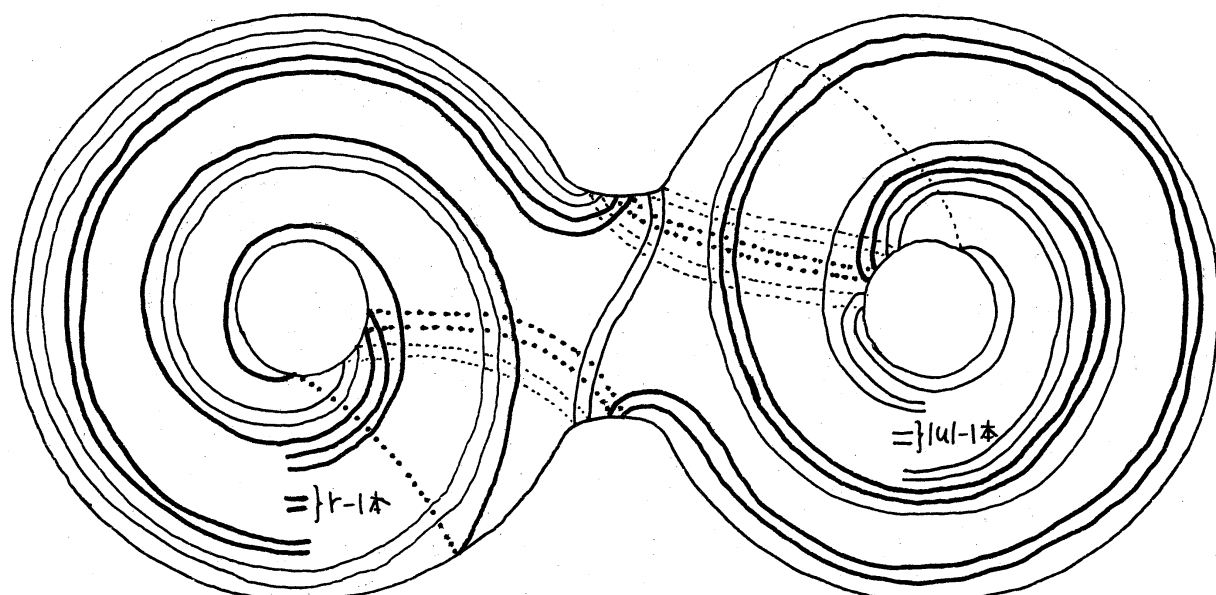
逆に $|S| = 1$ のとき。 $K(rstu) = K_1 I \cup K_2 I$ を、 $\partial K_1 I = \partial K_2 I = T$ とおき、 $\mathcal{C}(K(rstu) - T \times I) = K_1 I \cup K_2 I$ とみなして、 $K(rstu) = K_1 I \cup T \times I \cup K_2 I$ とみる。この分割を用いることにより、 $|S| = 1$ に注意すれば、 $K(rstu)$ の genus 2 の Heegaard splitting を得る。

以上で Sapphire space の Heegaard genus が分かったが、今 genus 2 の Heegaard splitting を持つものに注目する。 $|S| = 1$ のとき、 1.7 Theorem より $K(rstu) = K(r \mid ru^{-1}u)$ とおける。このとき実際に genus 2 の Heegaard splitting を構成すれば、その diagrams は以下のようなになる。

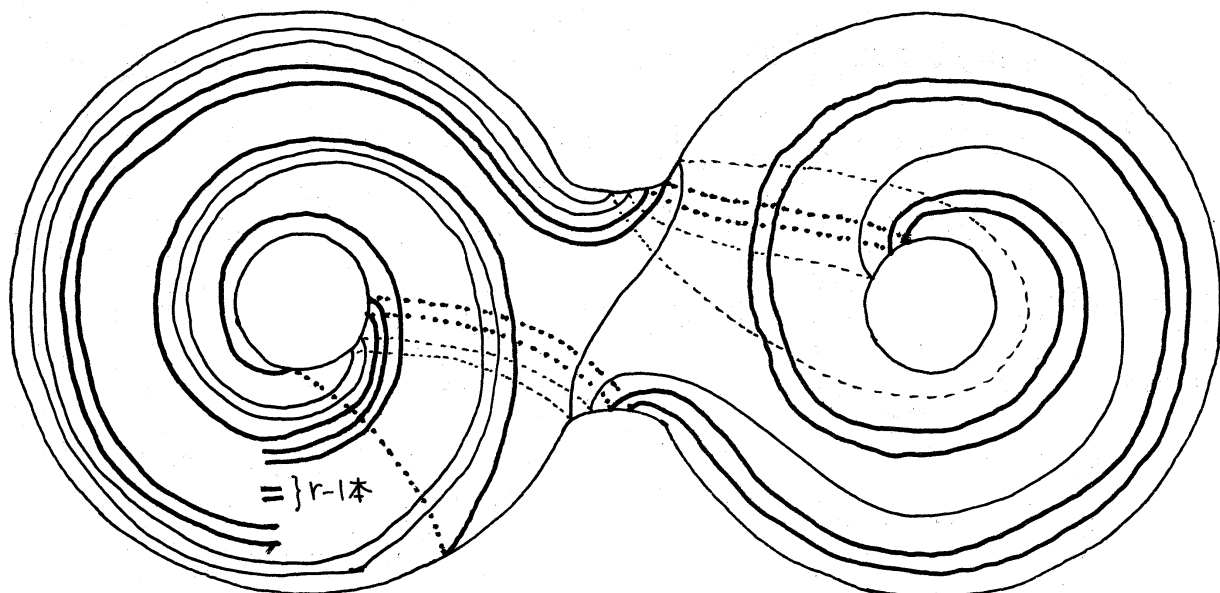
$r > 0, u > 0$ のとき



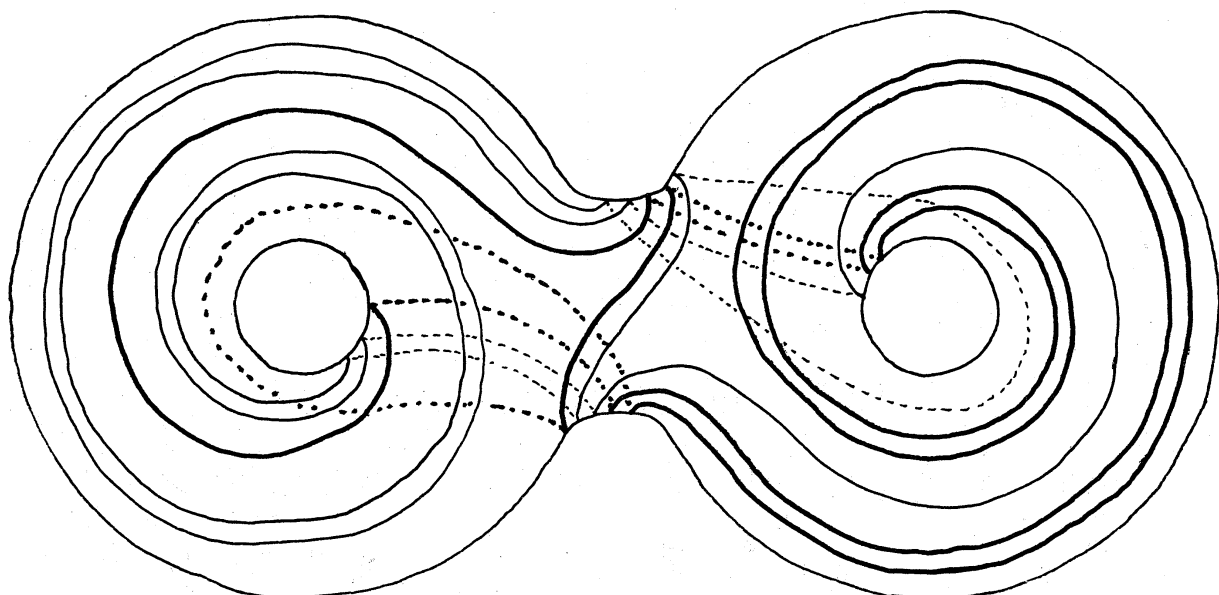
$r > 0, u < 0$ のとき



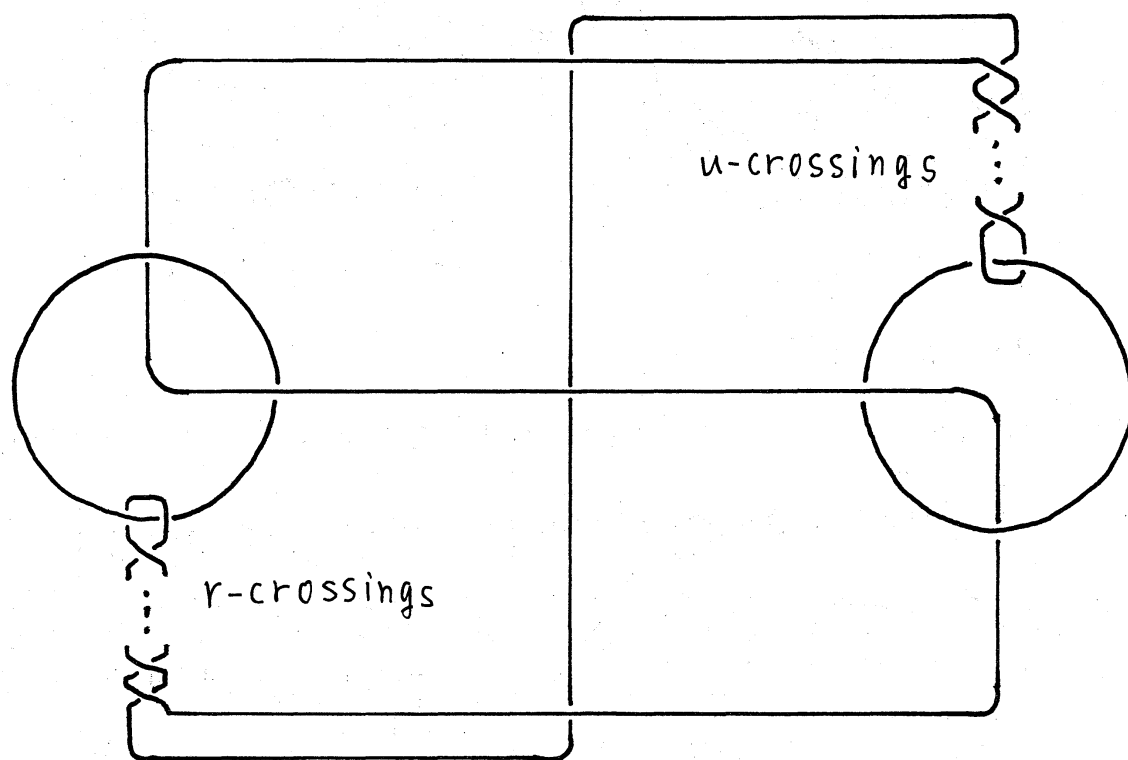
$r > 0, u = 0$ のとき



$r = u = 0$ のとき



さて、[2], [8], [9]より、genus 2のHeegaard splittingを持つclosed orientable 3-manifoldは S^3 内のあるlinkに沿ってbranchする S^3 の2-fold branched covering spaceになる。故に[8]の方法によってそのlinkを構成すれば、 $K(r, r+u)$ は下のlinkに沿ってbranchする S^3 の2-fold branched covering spaceである。



特に $r=u=0$ のとき。 $K(0,1,0)$ はBorromean ringsに沿ってbranchする S^3 の2-fold branched covering spaceとなるが、このlinkがperiod 3の周期を持つことを利用すれば、 $K(0,1,0)$ はfigure eight knotに沿ってbranchする S^3 の3-fold cyclic branched covering spaceとなることがわかる。

— References —

- [1] K. Asano : Homeomorphisms of Prism manifolds
Yokohama Math. J. vol 26 (1978) 19~25
- [2] J. S. Birman and H. M. Hilden : Heegaard
splitting of branched coverings of S^3 , Trans.
Amer. Math. Soc. vol 213 (1975) 315~352
- [3] J. Hempel : 3-manifolds, Ann. of Math. Studies
No. 86 Princeton N. J., Princeton University
Press 1976
- [4] W. Jaco : Lectures of three manifold topology,
Conference board of Math. Science, Regional
Conference Series in Math. No. 43 1980
- [5] P. K. Kim : Some 3-manifolds which admit Klein
bottle, Trans. Amer. Math. Soc. vol 244 (1978)
299~312
- [6] K. Morimoto : Klein bottles in genus two
3-manifolds, pre print

- [7] D. Rolfsen : Knots and Links, Mathematics
Lecture Series 7, Publish or Perish Inc.,
Berkeley, Ca, 1976
- [8] M. Takahashi : An alternative proof of Birman -
Hilden - Viro's Theorem, Tsukuba J. Math. vol 2
(1978) 27 ~ 34
- [9] O. Ja. Viro : Linkings, Two-sheeted branched
coverings and Braids, Math. sb. 87 (129) (1972)
216 ~ 228 = Math. USSR sb. 16 (1972) 223 ~ 236